A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XV. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XV. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

ALGEBRAI RENDSZEREKEN ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEGYENLETEK, III. CSOPORTOK IZOTÓPJAI

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

A kvázicsoportokon értelmezett függvényegyenletek megoldásai között alapvető szerepet játszanak a csoportműveletek izotópjai[1] [2—3, 6—8, 11—14, 16, 18]. Kérdés: *milyen függvényegyenlet jellemzi a csoportműveletek izotópjait?*

A probléma speciálisan a nomográfiában lépett fel, abban a formában, hogy milyen kritérium alapján dönthető el egy $F(x, y)$ kétváltozós függvény ábrázolhatósága pontsoros nomogrammal, mely függvényosztályt tudvalevőleg az

$$F(x, y) = f[g(x)+h(y)]$$

kú függvények alkotják, azaz a valós additív csoport (folytonos) izotópjai. Egy ei. ző dolgozatban [9] az

$$F[g(x, y), H(u, v)] = F[G(x, u), H(y, v)] \tag{1}$$

függvényegyenlet jellemzés található, majd [10]-ben az a kritérium, hogy az

$$F(x, u), F(x, v), F(y, u), F(y, v)$$

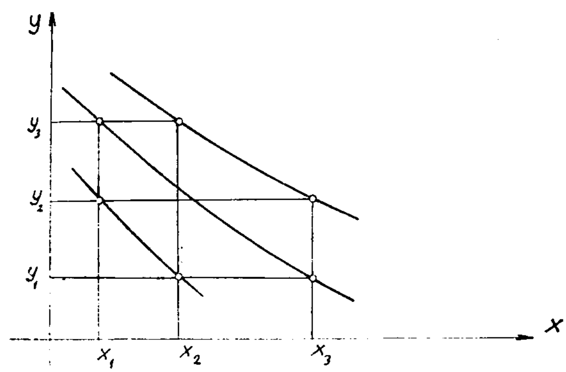
négyváltozós függvényrendszer nem független. RADÓ FERENC [15] felvetette azt a kérdést, hogy (1) helyett lehetne-e találni olyan egyenletet, mely csupán a jellemezni kívánt F függvényt tartalmazza. Így jutott az (1) függvényegyenlet olyan specializálásához, melyben az

$$F[G(y, x), y] = x,$$
$$F[x, H(y, x)] = y$$

..egkötés mellett már csupán az F függvény szerepel, továbbá felismerte a kapott egyenlet egyenértékűségét a hálózatgeometriából ismert

$$x_1 * y_2 = x_2 * y_1, x_1 * y_3 = $$
$$= x_3 * y_1 \Rightarrow x_2 * y_3 = x_3 * y_2$$

THOMSEN-féle záródási feltétellel (1. ábra) [4].



1. ábra

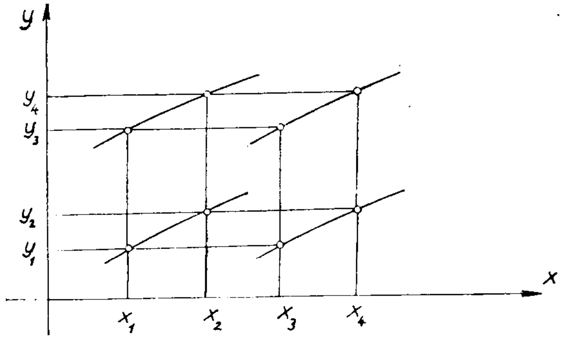
Bizonyítási módszere erősen kihasználja, hogy a szóban forgó kétváltozós függvény folytonos.

[1] A dolgozat a [14]-ben található jelöléseket és elnevezéseket használja.

Egyéb függvényegyenletek csoportművelettel izotóp megoldásait keresve S. K. STEIN [17] vetette fel teljes általánosságban a csoport-izotópok jellemzésének kérdését. RADÓ FERENCtől függetlenül megtalálta az

$$(2)\qquad x_1 * y_1 = x_2 * y_2, x_1 * y_3 = \\ = x_2 * y_4, x_3 * y_1 = x_4 * y_2 \Rightarrow x_3 * y_3 = x_4 * y_4$$

REIDEMEISTER-ábra záródási feltétel jellemzést (2. ábra). Megfigyelhetjük, hogy a (2) összefüggést elég csak bizonyos rögzített $x_1 = a$, $y_1 = b$ esetén megkövetelni. Közben ACZÉL JÁNOS [1] felismerte, hogy a hálózatgeometriában ismert záródási feltételek minden folytonossági megszorítás nélkül is egyenértékűek azzal, hogy a tekintett kvázicsoport bizonyos grupoid (csoport, ABEL-csoport stb.) izotópja, s így lehetőség nyílik a hálózatok axiomatikus alapon történő bevezetésére és osztályozására.



2. ábra

Csoportok izotópjainak jellemzésével foglalkozott A. FRIGERIO [8] is (idézve [6] alapján).

Itt a következő jellemzést adjuk:

TÉTEL: *Ahhoz, hogy egy Q^* kvázicsoport egy Q° csoport izotópja legyen, szükséges és elegendő, hogy az*

$$(x*y)*z = x*(A_1*z),$$

$$x*(y*z) = (x*A_2)*z$$

egyenlettel értelmezett

$$A_1(x, y, z) = \{^{-1}x*[(x*y)*z]\}*z^{-1},$$

$$A_2(x, y, z) = {}^{-1}x*\{[x*(y*z)]*z^{-1}\}$$

*asszociátor műveletek között*² *az*

$$A_1[u, A_2(u, s, a), v] = A_1[b, A_2(b, s, a), v]$$

összefüggés fennálljon tetszőleges $u, s, v \in Q$ és valamely rögzített $a, b \in Q$ esetén.

Bizonyítás: Tekintsük a Q^* kvázicsoport

$$(x*a)\circ(b*y) = x*y,$$

illetve az

$$(3)\qquad x\circ y = (x*a^{-1})*(^{-1}b*y)$$

² Az $x*y^{-1}$ és $^{-1}x*y$ inverz műveleteket az $(x*y^{-1})*y = x$, $x*(^{-1}x*y) = y$ összefüggések alapján értelmezzük.

³ A kvázicsoportok elméletében megszokott módon áttérünk egy egységelemes főizotópra. Nyilvánvaló haszonnal jár az, ha egységelem létezése biztosítva van.

egyenlettel értelmezett Q° egységelemes izotópját[3]. Az egységelem nyilván $e = b * a$, ami az $x = b$, illetve $y = a$ helyettesítésekből rögtön kitűnik:

$$e \circ (b * y) = (b * a) \circ (b * y) = b * y,$$

$$(x * a) \circ e = (x * a) \circ (b * a) = x * a.$$

Q^* nyilván akkor és csak akkor csoport izotópja, ha a fent értelmezett Q° egységelemes főizotóp is az. Egy csoport egységelemes izotópjai azonban valamennyien az illető csoporttal izomorf csoportok [5]. Tehát ahhoz, hogy Q^* csoport izotópja legyen, szükséges és elegendő a tetszőleges rögzített a, b elemekkel (3) alapján képezett $x \circ y$ művelet asszociativitása. (A többi csoporttulajdonságot nem kell bizonyítani, mert kvázicsoportról lévén szó, egységelem és inverzelem létezése már következik az asszociativitásból).

Az

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

asszociatív törvény az $x * y$ művelettel részletesen így írható:

$$\{[(x * a^{-1}) * ({}^{-1}b * y)] * a^{-1}\} * ({}^{-1}b * z) =$$
$$= (x * a^{-1}) * \{{}^{-1}b * [(y * a^{-1}) * ({}^{-1}b * z)]\}.$$

Vezessük be itt az

$$u = x * a^{-1}, \quad v = {}^{-1}b * z$$

változót, akkor az előzővel egyenértékű

$$\{[u * ({}^{-1}b * y)] * a^{-1}\} * v = u * \{{}^{-1}b * [(y * a^{-1}) * v]\},$$

egyenletet nyerjük. Ez másként, az

(4) $$y = b * (s * a) = (b * t) * a, \quad t = A_2(b, s, a)$$

jelöléssel az

$$\{[u * (s * a)] * a^{-1}\} * v = u * \{{}^{-1}b * [(b * t) * v]\}$$

alakban írható.

Így A_1 és A_2 értelmezéséből kifolyólag az

(5) $$[u * A_2(u, s, a)] * v = u * [A_1(b, t, v) * v],$$

vagy ekvivalensen az

$$A_1(b, t, v) = A_1[u, A_2(u, s, a), v],$$

majd az

$$A_1[b, A_2(b, s, a), v] = A_1[u, A_2(u, s, a), v]$$

egyenletet kapjuk. Ez utóbbi tehát, figyelembe véve A_1, A_2 és $x \circ y$ értelmezését, továbbá azok összefüggését $x * y$-nal, egyenértékű $x \circ y$ asszociativitásával, vagyis azzal, hogy Q^* csoport izotópja, amit bizonyítani kellett.

Megjegyezzük, hogy az (5) egyenlet a (4), továbbá a

$$p = u * y, \quad q = x * v, \quad y = A_2(u, s, a), \quad x = A_1(b, t, v)$$

jelölés mellett egyenértékű az alábbival:

$$p*v = u*q,\quad p*a = u*(s*a),\quad b*q = (b*t)*v \Rightarrow b*(s*a) = (b*t)*a,$$

vagy ami ugyanaz,

$$p*v = u*q,\quad p*a = u*\bar{s},\quad b*q = \bar{t}*v \Rightarrow b*\bar{s} = \bar{t}*a$$

-val, vagyis a REIDEMEISTER-ábra záródásával.

IRODALOM

[1] J. ACZÉL—G. PICKERT—F. RADÓ, Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, *Mathematica Cluj*, **2** (25) (1960), 5—24.

[2] В. Д. Белоусов, Производные операции и ассоциаторы в лупах, *Матем. Сборник* **45** (1958), 51—70.

[3] В. Д. Белоусов, Ассоциативные в целом системы квазигрупп, *Матем. Сборник* **55** (1961), 221—236.

[4] W. BLASCHKE—G. BOL, *Geometrie der Gewebe*. Berlin 1938.

[5] R. H. BRUCK, *A survey of binary systems*. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

[6] DÉNES J.—PÁSZTOR E.-né, A kvázicsoportok néhány problémájáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **13** (1963), 109—118.

[7] V. DEVIDÉ, Autoreferati sa ukazivanjem na neriješena pitanja, *Matematička Biblioteka, Beograd*, **25** (1963), 129—148.

[8] A. FRIGERIO: Sui quasi gruppi associati ai gruppi., *Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Padova* 1958., 107—111.

[9] HOSSZÚ M., A biszimmetria függvényegyenletéhez, *MTA Alk. Mat. Int. Közleményei*, **1** (1952), 335—342.

[10] M. HOSSZÚ, A generalization of the functional equation of bisymmetry, *Studia Math.*, **14** (1953), 100—106.

[11] HOSSZÚ M., Nem szimmetrikus középértékek, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **7** (1957), 207—218.

[12] HOSSZÚ M., Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 51—56.

[13] HOSSZÚ M., Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében I-III, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 149—162, 237—253, 333—346.

[14] HOSSZÚ M., Algebrai rendszereken értelmezett függvényegyenletek I—II, *MTA III. Oszt. Közl.*, **12** (1962), 303—315, **13** (1963), 1—15.

[15] F. RADÓ, Équations fonctionnelles caracterisant les nomogrammes avec trois exhelles rectilignes, *Math. Cluj*, (1959), 19—23.

[16] A. SADE, Théorie des systems demosienes groupoides, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 625—660.

[17] S. K. STEIN, Levélbeli közlés, 1957.

[18] B. ZELENKO, Schwach assoziative Gruppoide, *Glasnik mat.-fiz.* **16** (1961), 3—73.

(Beérkezett: 1964. IX. 23.)

EGY ELOSZLÁSPROBLÉMA A PRÍMSZÁMELMÉLETBEN

Írta: KÁTAI IMRE

Az analitikus számelmélet egyik fontos feladata a különböző számtani sorokba eső prímszámok számának eltérését vizsgálni. Ezen problémakör vizsgálatára TURÁN PÁL és S. KNAPOWSKI [1] egy módszert dolgoztak ki. Dolgozatukban problémaként áll a következő:

Rögzített l_1, l_2 párra, $l_1 \neq l_2$, $(k, l_1)=(k, l_2)=1$, milyen a $N_{l_1, l_2}(Y)$ függvény aszimptotikus viselkedése $Y \to \infty$-re, ahol $N_{l_1, l_2}(Y)$ jelenti azon $m \leqq Y$ egészek számát, amelyre $\pi(m, k, l_1) \geqq \pi(m, k, l_2)$, továbbá $\pi(x, k, l)$ a $\equiv l (\operatorname{mod} k)$ számtani sorba eső x-et meg nem haladó prímszámok számát jelenti.

Az első kérdés ezzel kapcsolatban, hogy $\lim\limits_{Y\to\infty} \frac{N_{l_1, l_2}(Y)}{Y}$ létezik-e. Ennek megoldása igen nehéznek látszik, s valószínűbbnek tűnik, hogy a határérték általában nem létezik.

Hasonló jellegű kérdéssel WINTNER AURÉL [2] is foglalkozott. Kimutatta a következő tételt:

Ha

$$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} \Lambda(n), \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n=p^t,\ p \text{ prím}, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

továbbá a *Riemann*-sejtés igaz, akkor a

$$(\psi(e^t)-e^t)e^{-\frac{t}{2}} < \alpha$$

egyenlőtlenséget kielégítő t-k, $0 \leqq t \leqq T$ relatív mértéke $T \to \infty$-re valamely $F(\alpha)$ eloszlásfüggvényhez konvergál annak minden folytonossági pontjában.

WINTNER gondolatmenete alkalmazható a

$$(\pi(e^t, k, l_1)-\pi(e^t, k, l_2))e^{-\frac{t}{2}} \cdot t$$

függvény eloszlásának vizsgálatára, ha a *Riemann*-sejtés helyett azt tesszük fel, hogy a k modulushoz tartozó *Dirichlet*-féle $L(s, \chi)$-függvények összes kritikus sávba eső gyökei az $s=\sigma+it$ komplex sík $\sigma=\frac{1}{2}$ egyenesére esnek. Az L-függvények gyökeinek numerikus ismerete lenne szükséges annak megállapítására, hogy a határeloszlás eloszlásfüggvénye a 0 pontban folytonos-e. Amennyiben folytonos, ez rögtön kiadná, hogy a $\pi(e^t, k, l_1) \geqq \pi(e^t, k, l_2)$ egyenlőtlenséget kielégítő t értékek $0 \leqq t \leqq T$ intervallumra vonatkozó relatív sűrűségének van határértéke $T \to \infty$-re. Kézenfekvő kérdés ezek után, hogy a

$$(\psi(x, k, l_1)-\psi(x, k, l_2))x^{-\frac{1}{2}}$$

függvénynek létezik-e határeloszlása.

Kimutatjuk, hogy ha az általános *Riemann*-sejtés igaz, és a mod k vett $L(s, \chi)$ függvények az $s=\frac{1}{2}$ pontban nem tűnnek el, akkor nincs határeloszlás. Állításunkat pontosabban is megfogalmazzuk. Jelöljük $m_T(\alpha)$-val a $0 \leqq x \leqq T$ intervallum

$$(\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2))x^{-\frac{1}{2}} < \alpha$$

egyenlőtlenséget kielégítő pontjainak *Lebesgue*-mértékét, s legyen $F_T(\alpha) = \dfrac{m_T(\alpha)}{T}$.

TÉTEL: *Ha a k modulushoz tartozó $L(s, \chi)$ függvényekre igaz a Riemann-sejtés, továbbá $L(\frac{1}{2}, \chi) \neq 0$, akkor az $F_T(\alpha)$ eloszlásfüggvények sorozata $T \to \infty$-re nem konvergál majdnem mindenütt.*

A bizonyítás indirekt úton történik. Feltesszük, hogy az $F_T(\alpha)$ függvénysorozat valamely $F(\alpha)$ eloszlásfüggvényhez konvergál majdnem mindenütt. Kimutatjuk továbbá, hogy az $F_T(\alpha)$ függvények második momentumai korlátos sorozatot alkotnak. Ebből levezetjük, hogy az $F_T(\alpha)$ függvények várható értékeinek sorozata konvergens és innen ellentmondásra jutunk. A továbbiakban $c_1, c_2, \ldots$ alkalmas állandókat jelölnek.

1. LEMMA: *A tétel feltételei mellett fennáll az*

$$\int_0^T \frac{(\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2))^2}{x}\, dx < c_1 T$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: ϱ fusson végig az $L(s, \chi)$-függvények kritikus sávba eső gyökein, $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma_\varrho$. Ismeretes [3], hogy

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) = \sum_{|\gamma_\varrho| \leqq T} b_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\log^2(T+2))$$

az $1 \leqq x \leqq T$ intervallumban. A b_ϱ-kra könnyen levezethető a $b_\varrho = O(\log(|\gamma| + 2))$ becslés. Innen

$$\frac{(\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2))^2}{x} \leqq 2 \sum_{\substack{|\gamma_{\varrho_1}| \leqq T \\ |\gamma_{\varrho_2}| \leqq T}} b_{\varrho_1} \cdot \bar{b}_{\varrho_2} \frac{x^{i(\gamma_1 - \gamma_2)}}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} + O\left(\frac{\log^4 T}{x}\right).$$

Továbbá

$$\left| \int_1^T x^{i(\gamma_1 - \gamma_2)}\, dx \right| \leqq \frac{4T}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|}.$$

Így

$$\int_0^T \frac{(\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2))^2}{x}\, dx < c_2 T \sum_{0 < \gamma_2 \leqq \gamma_1 \leqq T} \frac{|b_{\varrho_1}| \cdot |b_{\varrho_2}|}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot (1 + (\gamma_1 - \gamma_2))} + O(\log^5 T).$$

Az L függvényekre vonatkozó gyökeloszlási tételekből azonnal következik, hogy

$$\sum_{0<\gamma_2\leqq\gamma_1<\infty} \frac{|b_{\varrho_1}|\cdot|b_{\varrho_2}|}{\gamma_1\cdot\gamma_2(1+(\gamma_1-\gamma_2))}<\infty,$$

s innen adódik a lemma állítása.

2. LEMMA: *Található olyan* $1\leqq y_1<y_2<\ldots<y_n<\ldots$ *és* $1\leqq z_1<z_2<\ldots<z_n<\ldots$ *sorozat, amelyre* $y_n\to\infty$, $z_n\to\infty$, $(n\to\infty)$, *és*

$$\int_1^{y_\nu} \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}}\,dx>c_3 y_\nu, \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

$$\int_1^{z_\nu} \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}}\,dx<-c_3 y_\nu, \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

ahol $c_3>0$ *állandó, amennyiben a tétel feltételei teljesülnek.*

A *bizonyítás* teljesen hasonló módon történik, mint a szerző [4] dolgozatában álló 3. tételé.

Tegyük fel, hogy az $F_T(\alpha)$ eloszlásfüggvények sorozata konvergál valamely $F(\alpha)$-hoz majdnem mindenütt. Az 1. lemmából következik, hogy a $0\leqq x\leqq T$ intervallum azon pontjainak mértéke, amelyre

$$\left|\frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}}\right|\geqq\lambda,$$

legfeljebb $\frac{c_1 T}{\lambda^2}$, s innen $1-F_T(\alpha)\leqq\frac{c_1}{d^2}$, $F_T(-\alpha)\leqq\frac{c_1}{d^2}$, ha $\alpha>0$. Ezért $1-F(\alpha)\leqq\frac{c_1}{\alpha^2}$, $F(-\alpha)\leqq\frac{c_1}{\alpha^2}$. Ebből egyszerűen következik, hogy $F(\alpha)$ várható értéke létezik. Másrészt a

$$|F_T(\alpha)-F(\alpha)|\leqq\frac{2c_1}{\alpha^2}$$

egyenlőtlenség fennállása miatt

$$\int_{|\alpha|\geqq A} \alpha d\{F_T(\alpha)-F(\alpha)\}\to 0.$$

$A\to\infty$-re egyenletesen T-ben. Ezért az $F_T(\alpha)$ függvénysorozat várható értékei konvergálnak, vagyis az

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\psi(x,k,l_1)-\psi(x,k,l_2)}{\sqrt{x}}\,dx$$

sorozat konvergál $T\to\infty$-re, ami ellentmond a 2. lemmának.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] S. KNAPOWSKI—P. TURÁN: Comparative prime-number theory. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 13 (1962), 299—314.
[2] A. WINTNER: On the distribution function of the remainder term of the prime number theorem. *American Journal of Math.*, 53 (1941), 233—248.
[3] K. PRACHAR: *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, 1953.
[4] I. KÁTAI: Eine Bemerkung zur „Comparative prime-number theory" von S. Knapowski und P. Turán, *Annales Univ. Sci. Budapest* (sajtó alatt).

(Beérkezett: 1964. IX. 29.)

A MÖBIUS-FÉLE μ-FÜGGVÉNYRŐL

Írta: KÁTAI IMRE

G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD kimutatták, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\,\zeta(2k+1)} = O\left(x^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), \qquad (x \to \infty) \tag{1}$$

összefüggés érvényessége a *Riemann*-sejtéssel ekvivalens. Ebben az az érdekes, hogy (1) csupán a $\operatorname{Re} s = 1$ egyenestől jobbra eső értékektől függ. (1) átírható $x = \beta^2$ helyettesítéssel a

$$S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\beta/n)^2} = O\left(\beta^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon}\right), \qquad (\beta \to \infty) \tag{2}$$

alakba. Innen azonnal következik, hogy ha a *Riemann*-sejtés nem igaz, akkor

$$\overline{\lim_{\beta \to \infty}} \frac{|S(\beta)|}{\beta^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Kimutatjuk, hogy ez az egyenlőtlenség a *Riemann*-sejtés fennállása esetén is érvényes.

W. STAS hasonló problémával foglalkozott és kimutatta a következő tételt [1]:

Ha a *Riemann*-féle ζ-függvény nem-triviális gyökei a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszenek és egyszeresek, akkor $T > c_1$-re

$$\max_{T^{1-\sigma(1)} \leq \beta \leq T} |S(\beta| > T^{-\frac{1}{2}-\sigma(1)},$$

alkalmas $c_1 > 0$ állandóval.[1]

Ennek bizonyítása a *Turán*-féle hatványösszeg-módszer segítségével történik.

Igen egyszerűen bizonyítható a következő

TÉTEL: *Feltéve a Riemann-sejtés helyességét, minden $M_1 > c_2$-re érvényesek a*

$$\max_{M_1 \leq \beta \leq N_1} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) > \delta, \tag{3}$$

$$\min_{M_1 \leq \beta \leq N_1} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) < -\delta \tag{4}$$

egyenlőtlenségek az $N_1 = e^{(\log M_1)^{c_3} \log_3 M_1}$ választással és alkalmas, numerikusan meghatározható c_2, c_3, δ pozitív állandókkal.[2]

[1] A továbbiakban $c_1, c_2, \ldots$ alkalmas, numerikusan meghatározható pozitív állandókat jelölnek.

[2] $\log_1 x = \log x$, $\log_{\nu+1} x = \log(\log_\nu x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

$S(\beta)$ definíciójából könnyen levezethető a

(5) $$\beta S(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon_1)} \beta^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)} ds \qquad \left(0<\varepsilon_1<\frac{3}{2}\right)$$

azonosság, ahol $\Gamma(s)$ az *Euler*-féle Γ függvény. Innen $\sigma > \frac{1}{4}$-re $(s=\sigma+it)$ a

(6) $$\int\limits_0^\infty \beta^{-\frac{1}{2}-s} S(\sqrt{\beta})\, d\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)}$$

azonosságot kapjuk.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő segédtételekre.

1. LEMMA: *Minden T-re létezik egy $t=t(T)$, $T \leqq t \leqq T+1$, amelyre*

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leqq (|t|+1)^{c_3}$$

a $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ *szakaszon* [2].

2. LEMMA: *Ha a $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqq A+3$ sávban $\zeta(s)$ nem tűnik el, akkor az $\frac{1}{2} < \sigma \leqq \leqq \frac{5}{4}$, $|t| \leqq A$ téglalapban*

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leqq (|t|+1)^{-c_4 \log(\sigma-\frac{1}{2})},$$

alkalmas $c_4 > 0$ állandóval.

Bizonyítás: Jelöljük $N(T)$-vel a $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $0 \leqq |t| \leqq T$ tartományba eső ζ-gyökök számát. Ismeretes [2], hogy

$$N(T+5) - N(T) < c_5 \log(|T|+1).$$

Az 1. lemma szerint minden m természetes számhoz található olyan T_m, amelyre $m \leqq T_m < m+1$ és

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+iT_m)}\right| \leqq (|T_m|+1)^{c_3}$$

az egész $-1 < \sigma \leqq 2$ szakaszon. Legyen $s_0 = \sigma_0 + it_0$, $|t_0| \leqq A$, $\frac{1}{2} < \sigma_0 < \frac{5}{4}$, $[t_0] = m$. Felhasználva az 1. lemmát és a szokásos nagyságrendi becsléseket, adódik, hogy a $(2+iT_{m-2}, 2+iT_{m+2})$, $(2+iT_{m+2}, iT_{m+2})$, (iT_{m+2}, iT_{m-2}), $(iT_{m-2}, 2+iT_{m-2})$ szakaszokon $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < c_6(|t|+1)^{c_7}$. Jelöljük $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_N$-nel a ζ-függvény e szakaszok által határolt D tartományba eső gyökeit. Mivel a

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{N}(s-\varrho_j)}{\zeta(s)}$$

függvény D-ben és határán reguláris,

$$\frac{\prod_{j=1}^{N}(s_0-\varrho_j)}{\zeta(s_0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\prod_{j=1}^{N}(z-\varrho_j)}{\zeta(z)}\frac{1}{z-s_0}dz,$$

ahol az integrál D határára van kiterjesztve. Az előbbiek felhasználásával

$$\frac{\left|\prod_{j=1}^{N}(s_0-\varrho_j)\right|}{|\zeta(s_0)|} \leqq c_8 5^N \cdot (|t_0|+1)^{c_7}.$$

Innen $|s_0-\varrho_j| \geqq (\sigma_0-\frac{1}{2})$ és $N < c_5 \log(|m|+1)$ miatt érvényes az állítás.

3. LEMMA: *Ha igaz a Riemann-sejtés, akkor*

$$S(\beta) = O(\beta^{-\frac{1}{2}} e^{c_8 \log_2\beta\cdot\log_3\beta}) \qquad (\beta\to\infty).$$

Bizonyítás: Az (5) jobb oldalán álló integrált toljuk át a $\sigma = \frac{1}{4}+r$ egyenesre, ahol $0<r<\frac{1}{4}$ állandó. Ismeretes [3], hogy $\frac{1}{4}<\sigma<2$-re egyenletesen $|\Gamma(\sigma+it)| = = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\cdot(|t|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$. Ezek segítségével

$$|\beta S(\beta)| \leqq c_9 \beta^{\frac{1}{2}+2r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}(|t|+1)^{c_4\log\frac{1}{2r}-\frac{1}{4}-r}dt < c_{10}\beta^{\frac{1}{2}+2r}\Gamma\left(c_4\log\frac{1}{2r}+1\right).$$

Mivel pozitív x-re

$$\Gamma(x+1) < c_{11}e^{x\log x},$$

így

$$|\beta S(\beta)| < c_{12}\beta^{\frac{1}{2}} e^{2r\log\beta + c_{13}\log\frac{1}{2r}\log_2\frac{1}{2r}}.$$

Az $\dfrac{1}{2r} = \dfrac{1}{c_{12}}\dfrac{\log\beta}{\log_2\beta\cdot\log_3\beta}$ választással világos, hogy $\beta > c_{13}$-ra $r<\dfrac{1}{4}$. Így

$$\beta S(\beta) = O(\beta^{\frac{1}{2}} e^{c_8\log_2\beta\cdot\log_3\beta}).$$

Rátérünk tételünk bizonyítására.

Mivel a $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(25)}$ függvény a $\sigma=\frac{1}{2}$ egyenesen reguláris és

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\Gamma(0-it)}{\zeta(1+2it)}\right|dt < \infty,$$

így tetszőleges $\beta>0$-ra $S(\beta)=O(1)$ következik (5)-ből. Legyen $\varrho_0 = \frac{1}{2}+i\gamma_0 = = \frac{1}{2}+i\cdot 14,13\ldots$ a ζ-függvény legkisebb pozitív képzetes részű gyöke. A (6) formulába $s = \frac{1}{4}+\lambda+i\dfrac{\gamma_0}{2}$-t írva, ahol $0<\lambda<\frac{1}{4}$, tegyük fel, hogy valamely

$1 \leqq M \leqq \beta < N$ szakaszon $\max\limits_{M \leqq \beta \leqq N} \left(S(\sqrt{\beta}) - \frac{\delta}{\beta^{1/4}} \right) \leqq 0$, vagy $\min\limits_{M \leqq \beta \leqq N} \left(S(\sqrt{\beta}) + \frac{\delta}{\beta^{1/4}} \right) \geqq 0$.
Ezek szerint

$$\left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda-\frac{i\gamma_0}{2}} S(\sqrt{\beta})\, d\beta \right| \leqq \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda-\frac{i\gamma_0}{2}} \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}}\, d\beta \right| + \tag{7}$$

$$+ \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} \left(S(\sqrt{\beta}) \pm \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} \right) d\beta \right| \leqq 2\delta \int_M^N \beta^{-1-\lambda}\, d\beta + \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} S(\sqrt{\beta})\, d\beta \right|.$$

Másrészt

$$\int_0^M \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} |S(\sqrt{\beta})|\, d\beta \leqq c_{13} + c_{14} e^{c_8 \log_2 M \cdot \log_3 M} \cdot \frac{1 - M^{-\lambda}}{\lambda}$$

és a $\lambda = \dfrac{2c_8 \log_2 N \cdot \log_3 N}{\log N}$ választással,

$$\int_N^\infty \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} |S(\sqrt{\beta})|\, d\beta \leqq \int_N^\infty \beta^{-1-\lambda} e^{c_8 \log_2 \beta \cdot \log_3 \beta}\, d\beta = \int_{\log N}^\infty e^{-\lambda \log \beta + c_8 \log_2 \beta \cdot \log_3 \beta}\, d \log \beta <$$

$$< \int_{\log N}^\infty e^{-\frac{\lambda}{2} v}\, dv = \frac{2e^{-2c_8 \log_2 N \cdot \log_3 N}}{\lambda} = o\left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

M-et úgy választjuk, hogy

$$e^{c_8 \log_2 M \cdot \log_3 M} (1 - M^{-\lambda}) \to 0 \qquad (M \to \infty)$$

teljesüljön. Ez biztosan teljesül akkor, ha a $\log_2 M \cdot \log_3 M = 2 \log_2 N$, azaz az $N = e^{(\log M)^{\frac{1}{2}} \log_3 N}$ választással élünk.

Ezek felhasználásával (6), (7)-ből a

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - r - i\lambda \right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + 2r + 2\lambda i \right)} \right| \leqq \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - r \right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + 2r \right)} \right| + \frac{2\delta}{\lambda} + \frac{o(1)}{\lambda} \qquad (\lambda \to 0)$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Mivel $\Gamma(s)$ az egész síkon 0-tól különböző, a bal oldal $\lambda \to 0$-ra

$$\geqq \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - i \frac{\gamma_0}{2} \right)}{4\lambda |\zeta'(\varrho_0)|} \right| \overset{\text{def}}{=} \frac{B}{\lambda}; \qquad (B > 0),$$

a jobb oldal első tagja korlátos $\lambda \to 0$-ra. Így a $\frac{B}{\lambda} \leqq \frac{2\delta}{\lambda} + \frac{o(1)}{\lambda}$ egyenlőtlenséget kapjuk $\lambda \to 0$-ra. Ez azonban nem állhat fenn, ha $\delta < \frac{B}{2}$ és λ elég kicsi. Így

$$\max_{M \le \beta \le N} \left(S(\sqrt{\beta}) - \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} \right) > 0 \quad \text{és} \quad \min_{M \le \beta \le N} \left(S(\sqrt{\beta}) + \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} \right) < 0.$$

Bevezetve az $M_1 = M^{1/2}$, $N_1 = N^{1/2}$ jelöléseket és $\sqrt{\beta}$ helyett β-t írva kapjuk a (3), (4) egyenlőtlenségeket.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. STAS: Über eine Reihe von Ramanujan, *Acta Arithm.* **8** (1963), 261—271.
[2] E. C. TITCHMARSH: *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.
[3] E. C. TITCHMARSH: *The theory of functions*, Oxford 1939.

(Beérkezett: 1964. IX. 29.)

A MÖBIUS-FÜGGVÉNY SZÁMTANI KÖZEPÉNEK Ω-BECSLÉSE

Írta: KÁTAI IMRE

I

Ismeretes, hogy a *Möbius*-függvényből képzett bizonyos típusú középértékek és a *Riemann*-féle ζ-függvény gyökeinek eloszlása között szoros összefüggés áll fenn. Így, ha $M(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leqq x} \mu(n)$, $\mu(n)$ a Möbius-függvény és $M(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$, valamely rögzített θ-val és tetszőleges $\varepsilon > 0$-val, akkor a ζ függvénynek a $\operatorname{Re} s > \theta$ félsíkban nincs gyöke. Másrészt, ha a ζ-függvénynek a $\operatorname{Re} s > \theta$ félsíkban nincs gyöke, akkor $M(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$ tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra. LANDAU pozitív együtthatós *Dirichlet*-sorokra vonatkozó tételéből könnyen következik, hogy ha $\varrho = \beta + i\gamma$ valamely, kritikus sávba eső ζ-gyök, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra $\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{M(x)}{x^{\beta-\varepsilon}} = \infty$ és $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{M(x)}{x^{\beta-\varepsilon}} = -\infty$. Innen azonnal következik, hogy $x \to \infty$-re $M(x)$ végtelen sokszor jelet vált.

Míg a végtelen sokszori jelváltás igazolása igen könnyű, egy olyan explicit véges intervallum megadása, amelyben $M(x)$ egyaránt vesz fel pozitív és negatív értékeket, már több nehézséget okoz. Az első ilyen irányú eredményt a *Turán*-féle hatványösszegmódszer segítségével S. KNAPOWSKI érte el. Első idevonatkozó dolgozatában [1] a *Riemann*-sejtés mellett a ζ-gyökök egyszerességét is feltételezi, a másodikban [2] csupán a *Riemann*-sejtést. Az esetleges többszörös gyökök által okozott nehézség leküzdésére igen ötletes gyökszétválasztási eljárást dolgozott ki. Ezzel azonban a bizonyítás bonyolultabbá vált.

Pontosabban szólva KNAPOWSKI a következő tételt bizonyította be:

Feltéve, hogy a $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqq \omega$, $(s = \sigma + it)$ téglalapban minden ζ-gyök a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszik, minden $c_1 \leqq T \leqq e^{\omega^{10}}$ esetén[1]

$$\max_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \geqq T^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-15 \cdot \frac{\log T}{\log_2 T} \cdot \log_3 T}, \tag{1}$$

$$\min_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \leqq -T^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-15 \cdot \frac{\log T}{\log_2 T} \cdot \log_3 T}, \tag{2}$$

c_1 numerikusan meghatározható.

A következőkben bebizonyítunk egy, a fentinél valamivel erősebb tételt.

[1] Jelölés: $\log_1 x = \log x$, $\log_{\nu+1} x = \log(\log_\nu x)$.

1. TÉTEL: *Feltéve, hogy igaz a Riemann-sejtés,*

(3) $$\max_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \geqq T^{\frac{1}{2}} e^{-c_2 \cdot \log_2^2 T}$$

(4) $$\min_{1 \leqq x \leqq T} M(x) \leqq -T^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-c_2 \cdot \log_2^2 T},$$

hacsak $c_2 > 0$ numerikus állandó.

A továbbiakban $c_3, c_4, \ldots$ legyenek pozitív állandók. A bizonyításhoz felhasználjuk a következő segédtételeket:

1. LEMMA: *Minden $T \geqq 2$-re létezik egy $t = t(T)$, $T \leqq t \leqq T+1$, amelyre $\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leqq |t|^{c_3}$ a $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ szakaszon* [3].

Ebből könnyen levezethető a

2. LEMMA. *Ha a $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqq A+1$ sávban $\zeta(s)$ nem tűnik el, akkor $\frac{5}{4} \geqq \sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqq A$-ban* $\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leqq |t|^{-c_4 \cdot \log\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)}$.

A *Perron*-formula alkalmazásával

$$\sum_{n \leqq x}{}' \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s} \frac{1}{\zeta(s)} ds.$$

A bal oldalon a vessző azt jelenti, hogy egész x-re $\mu(x)$ helyett $\frac{\mu(x)}{2}$ veendő az összegben.

Vezessük be a következő jelöléseket.

$$M_0(x) = M(x),$$

$$M_k(x) = \int\limits_1^x \frac{M_{k-1}(u)}{u} du \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Könnyű belátni, hogy

(5) $$M_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^{k+1}} \cdot \frac{1}{\zeta(s)} ds \qquad (k \geqq 1).$$

Másrészt

(6) $$M_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leqq x} \mu(n) \cdot \left(\log \frac{x}{n}\right)^k.$$

Innen parciális integrálással kapjuk, hogy

$$M_k(x) \leqq \max_{1 \leqq u \leqq x} M(u) \cdot \frac{(\log x)^k}{k!},$$

azaz

(7) $$\max_{1 \leqq u \leqq x} M(u) \geqq M_k(x) \cdot \frac{k!}{(\log x)^k}.$$

A következőkben kimutatjuk, hogy $M_k(x)$ elég nagy k-ra (k az x-től függeni fog) aránylag nagy pozitív és abszolút értékben nagy negatív értékeket vesz fel. E célból (5) integrációs útját toljuk át a

$$\Gamma_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}-i\infty,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}-i\cdot 20\right),\quad \Gamma_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}-i\cdot 20,\ \frac{1}{4}-i\cdot 20\right),$$

$$\Gamma_3\left(\frac{1}{4}-i\cdot 20,\ \frac{1}{4}+i\cdot 20\right),\quad \Gamma_4\left(\frac{1}{4}+i\cdot 20,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}+i\cdot 20\right),$$

$$\Gamma_5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}+i\cdot 20,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}+i\infty\right)$$

szakaszokból álló törött vonalra, s ezeken az (5) integrált jelöljük rendre I_1, I_2, I_3, I_4, I_5-tel. A 2. lemmából azonnal következik, hogy az integrál abszolút konvergens $k\geqq c_4\log_2 x+2$-re, ha x elég nagy. Mivel

$$I_1, I_5 = O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{20^{k-c\log_2 x}}\right);\quad I_2, I_4 = O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{20^k}\right);\quad I_3 = O(x^{\frac{1}{4}}4^k),$$

és $\zeta'(\overline{\varrho_0})=\overline{\zeta'(\varrho_0)}\neq 0$, $\varrho_0=\frac{1}{2}+i\cdot 14,\ldots$ és a $0<\sigma<1$, $0<t<20$ téglalapban más gyök nincs, így

$$M_k(x) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{x^{\varrho_0}}{\varrho_0^{k+1}}\cdot\frac{1}{\zeta'(\varrho_0)}+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{20^{k-c_2\log_2 x}}\right)+O(x^{\frac{1}{4}}\cdot 4^k).$$

Ha $k\leqq\dfrac{1}{4}\dfrac{\log x}{\log 80}$, akkor $x^{1/4}\cdot 4^k=O\left(\dfrac{x^{1/2}}{20^k}\right)$. Továbbá $k>100c_4\log_2 x$-ra

$$\frac{x^{1/2}}{20^{k-c_2\log_2 x}}=o\left(\frac{x^{1/2}}{|\varrho_0|^{k+1}}\right).$$ Így elég nagy k-ra,

$$M_k(x) = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{|\varrho_0|^{k+1}\cdot|\zeta'(\varrho_0)|}\left[\cos\left(\gamma_0\log x-(k+1)\varphi-\psi\right)+\theta\right],$$

ahol $\varrho_0=|\varrho_0|\cdot e^{i\varphi}$, $\zeta'(\varrho_0)=|\zeta'(\varrho_0)|\cdot e^{i\psi}$, $|\theta|\leqq\frac{1}{2}$. Legyen $Y>c_5$, $Z=e^{2\pi/\gamma_0}\cdot Y$, $k=[101c_4\cdot\log_2 Y]$. Világos, hogy Y-t elég nagyra választva k teljesíti a kirótt követelményeket az egész $Y\leqq x\leqq Z$ intervallumon. Továbbá ezen az intervallumon létezik olyan x_1, illetve x_2, amelyre $\cos\left(\gamma_0\log x-(k+1)\varphi-\psi\right)$ a $+1$, illetve -1 értéket veszi fel. Így

$$\max_{1\leqq u\leqq Z} M(u)\geqq\frac{Y^{\frac{1}{2}}}{|\varrho_0|^{k+1}\cdot|\zeta'(\varrho_0)|}\,\frac{k!}{(\log Z)^k},$$

$$\min_{1\leqq u\leqq Z} M(u)\leqq-\frac{Y^{\frac{1}{2}}}{|\varrho_0|^{k+1}\cdot|\zeta'(\varrho_0)|}\,\frac{k!}{(\log Z)^k}.$$

Innen az 1. tétel állítása következik.

2. TÉTEL: *Ha a* $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqq B$ $(B > 10^5)$ *sávban* $\zeta(s)$ *nem* 0, *akkor* $T > c_6$*-ra*

$$\max_{1 \leqq u \leqq T} M(u) \geqq T^{\frac{1}{2} - c_7 \frac{\log_2 \frac{B}{|\varrho_0|} + \log |\varrho_0|}{\log \frac{B}{|\varrho_0|}} - c_8 \frac{\log T_2^2}{\log T}}$$

és

$$\min_{1 \leqq u \leqq T} M(u) \leqq -T^{\frac{1}{2} - c_7 \frac{\log_2 \frac{B}{|\varrho_0|} + \log |\varrho_0|}{\log \frac{B}{|\varrho_0|}} - c_8 \frac{\log T_2^2}{\log T}}.$$

Egy következő dolgozatban lokalizált jelváltást fogunk bizonyítani minden sejtés nélkül.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] S. KNAPOWSKI: On the Möbius function, *Acta Arithm.* **4** (1958), 209—216.
[2] S. KNAPOWSKI: On oscillations of certain means formed from the Möbius series I, *Acta Arithm.* **8** (1963), 311—320.
[3] E. C. TITCHMARSH: *The theory of the Riemann, zeta-function* Oxford 1951.

(Beérkezett: 1964. IX. 29.)

REGISZTRÁLÁSSAL KAPCSOLATOS SZTOCHASZTIKUS PROBLÉMÁKRÓL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

Bevezetés

A NEHÉZVEGYIPARI KUTATÓ INTÉZETBEN folyó kutatások kapcsán merült fel az alábbi probléma:

Egy adott rendszer (pl. valamely vegyi folyamatot automatizáló rendszer) működését M számú hibaforrás — amit a továbbiakban csatornának nevezünk — befolyásolja. Ha valamelyik csatornán meghibásodás történik, azt egy regisztráló készülék jelzi. Ezt követően megkezdődik a hiba elhárítása. Ha valamely csatornán a hiba elhárítása befejeződik, akkor ezt a regisztráló készülék ismét jelzi. A regisztráló készüléknek egy-egy időpont regisztrálásához bizonyos időre van szüksége. Egy-egy ilyen regisztrálási időtartam jellemezze a regisztráló készülék „gyorsaságát." Kérdés:

a) milyen követelményt adjunk meg a regisztráló készülék gyorsaságára nézve, ha nagy megbízhatósággal azt kívánjuk elérni, hogy a készülék minden meghibásodást és minden javításbefejezést T ideig regisztráljon.

b) Adott gyorsaságú készülék előírt megbízhatóság mellett hány csatornát képes a jelzett kívánalmaknak megfelelően kiszolgálni.

c) Adott gyorsaságú készülék, adott csatornaszám mellett előírt megbízhatósági szint esetén milyen hosszúságú T ideig képes minden szóba jövő pontot regisztrálni.

A kérdések megválaszolásához szükséges matematikai feltevéseket az 1. §-ban tárgyaljuk. A többi paragrafus az e kérdéskörrel kapcsolatos matematikai vizsgálatokat tartalmazza.

Az a), b), c) pontokban felvetett kérdésekre az 5. §-ban válaszolunk.

1. §

A matematikai modell felállítása

Legyen adott M csatorna. Ha valamelyik csatornán meghibásodás történik, azt egy regisztráló készülék jelzi. Ezt követően megkezdődik a hiba elhárítása. Ha valamely csatornán a hiba elhárítása befejeződik, akkor ezt a regisztráló készülék ismét jelzi. A tárgyalás során mindvégig feltételezzük, hogy javítás, illetve működtetés addig sohasem kezdődik el, amíg a készülék a meghibásodást, illetve a javítás befejezését nem regisztrálta. Ebből következik, hogy egy csatornán mindig csak egy regisztrálandó pont lehet, s újabb regisztrálandó pont csak olyan csatornán jöhet létre, amelyen a regisztráló készülék nem rögzít meghibásodást, vagy javítás befejezést.

Jelöljük ξ-vel egy tetszés szerinti csatornán valamely folyamat működési idejét (élettartamát), η-val pedig a javítási idő hosszát. Tekintsük a meghibásodási és a hiba elhárítási időpontokat együttesen. Nevezzük ezeket realizációs időpontoknak. Legyen ζ az az időtartam, melyre a regisztráló készüléknek szüksége van ahhoz, hogy bármelyik csatornán egy realizációs pontot regisztrálni tudjon.

Tegyük fel, hogy kivétel nélkül minden csatornán ugyanazon alábbi feltételek teljesülnek:

1° $$P(\xi < t+\Delta t \mid \xi \geqq t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy egy csatornán a $(t, t+\Delta t)$ időközben meghibásodás történik, feltéve, hogy a t időpontban nem volt meghibásodás $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

2° $$P(\eta < t+\Delta t \mid \eta \geqq t) = \mu \Delta t + o(\Delta t),$$

vagyis annak a valószínűsége, hogy a $(t, t+\Delta t)$ időközben a javítás befejeződjék, feltéve, hogy a t időpontban a hibaelhárítás folyamatban volt $\mu \Delta t + o(\Delta t)$.

Tegyük fel továbbá, hogy

3° $$P(\zeta < t+\Delta t \mid \zeta \geqq t) = \gamma \Delta t + o(\Delta t),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy a $(t, t+\Delta t)$ időközben egy regisztrálás befejeződik, feltéve, hogy a t időpontban a regisztrálás folyamatban volt $\gamma \Delta t + o(\Delta t)$.

A továbbiakban mindvégig feltételezzük azt is, hogy valamely tetszés szerinti i csatornán egy realizációs pontnak a bekövetkezése független attól, hogy korábban melyik k $(k \neq i)$ csatornán volt realizációs pont.

Megjegyzések:

I. Jelölje A_{t_0} azt az eseményt, hogy a t_0 időpontban — ahol $t_0 \in (t, t+\Delta t)$ — bekövetkezett realizációs pont regisztrálása a $t+\Delta t$ ideig befejeződik. A 3° feltétel alapján könnyen igazolható az alábbi segédtétel.

SEGÉDTÉTEL:

Mindig létezik olyan $\delta = \delta(t_0, \Delta t)$ t_0-tól és Δt-től függő kétváltozós függvény, melyre nézve:

1′ $$-\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \leqq \delta \leqq \gamma$$

2′ $$P(A_{t_0}) = \delta \Delta t + o(\Delta t).$$

Bizonyítás: Legyen tetszőlegesen rögzített $t_0 \in (t, t+\Delta t)$, ahol Δt is tetszőlegesen rögzített érték. Ekkor

$$P(A_{t_0}) = 1 - e^{-\gamma(t+\Delta t - t_0)} \leqq 1 - e^{-\gamma \Delta t} = \gamma \Delta t + o(\Delta t),$$

azaz

$$0 \leqq P(A_{t_0}) \leqq \gamma \Delta t + o(\Delta t).$$

Mivel $\gamma \Delta t$ pozitív érték, ezért Δt és $o(\Delta t)$ változatlanul hagyása mellett mindig létezik olyan $\delta = \delta(t_0, \Delta t)$, melyre 1′ és 2′ teljesül.

Q. e. d.

II. A modell felállításakor feltételeztük azt, hogy kivétel nélkül minden csatornán ugyanazon 1°, 2° és 3° feltétel teljesül. Ez más szóval azt jelenti, hogy valamennyi csatornán a realizációs pontok bekövetkezése és regisztrálása azonos eseménysűrűség mellett történik. A gyakorlatban ez a feltétel nem minden esetben teljesül, mivel a rendszer részegységei meghibásodásának az eloszlása, illetve a hibák részegységenkénti kijavításának az eloszlása, ha feltehetően azonos eloszláscsaládhoz is tartozik, az eloszlások paramétere azonban már különböző értékű lehet. — Ebben az esetben kézenfekvőnek látszik azon λ és μ paraméterekkel számolni, melyek ahhoz a csatornához tartoznak, melyen a leggyakoribb a realizációs pontok bekövetkezése. Ezen meggondolással kapott eredmények a tényleges helyzetet leíró eredmények extrém esetének tekinthetők, melyek viszont a felmerülő kérdéseket gyakorlati szempontból már kielégítően megválaszolják.

III. A modell felállítása során azt is feltételeztük, hogy valamely csatornán egy realizációs pontnak a bekövetkezése független attól, hogy korábban melyik csatornán volt realizációs pont. Bár a gyakorlatban ez a feltétel sem teljesül mindig, meg kell azonban jegyeznünk, hogy ha a regisztráló készülékünk elég gyors, és egy-egy meghibásodás azon nyomban nem von maga után más csatornán újabb meghibásodást, akkor ez a megkötés — az extrém eset tárgyalása szempontjából — nem túlzottan erős feltételt jelent.

2. §

1. Probléma

Tekintsünk egy tetszés szerinti csatornát.

Legyen $Q_1(t)$ annak a valószínűsége, hogy a csatorna a t időpontban működés alatt áll, $Q_2(t)$ pedig annak a valószínűsége, hogy a regisztráló készülék a t időpontban meghibásodást regisztrál.

$Q_3(t)$ legyen annak a valószínűsége, hogy a csatorna a t időpontban javítás alatt áll, és végül $Q_4(t)$ jelölje annak a valószínűségét, hogy a t időpontban a regisztráló készülék a javítás befejezését regisztrálja.

Kérdés: milyen összefüggés adható a szóban levő valószínűségekre.

1. TÉTEL: *$Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ és $Q_4(t)$ az alábbi differenciálegyenletrendszernek tesz eleget:*

$$Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t)+\gamma Q_4(t)$$

$$Q_2'(t) = -\gamma Q_2(t)+\lambda Q_1(t)$$

$$Q_3'(t) = -\mu Q_3(t)+\gamma Q_2(t)$$

$$Q_4'(t) = -\gamma Q_4(t)+\mu Q_3(t).$$

Bizonyítás:

A könnyen belátható

$$Q_1(t+\Delta t) = Q_1(t)(1-\lambda\Delta t)+Q_4(t)\gamma\Delta t+o(\Delta t)$$

$$Q_2(t+\Delta t) = Q_2(t)(1-\gamma\Delta t)+Q_1(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$Q_3(t+\Delta t) = Q_3(t)(1-\mu\Delta t)+Q_2(t)\gamma\Delta t+o(\Delta t)$$

$$Q_4(t+\Delta t) = Q_4(t)(1-\gamma\Delta t)+Q_3(t)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

összefüggésekből állításunk nyilvánvaló.

Következmény:

I. Ha $t \to \infty$, akkor

$$Q_1(t) \to Q_1 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}}$$

$$Q_2(t) \to Q_2 = \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}}$$

$$Q_3(t) \to Q_3 = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}}$$

$$Q_4(t) \to Q_4 = \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}}.$$

II. Például annak a valószínűsége, hogy a t időpontban az M csatorna közül pontosan i csatorna javítás alatt álljon

$$V_i(t) = \binom{M}{i} Q_3(t)^i (1-Q_3(t))^{M-i}.$$

Ha $t \to \infty$, akkor

$$V_i(t) \to V_i = \binom{M}{i} \left(\frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}} \right)^i \left(1 - \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}} \right)^{M-i}.$$

III. Tegyük fel, hogy M regisztráló készülékünk van. Jelölje $P_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a t időpontban k regisztráló készüléknek kell realizációs pontot regisztrálnia. Ekkor

$$P_k(t) = \binom{M}{k} (Q_2(t)+Q_4(t))^k (Q_1(t)+Q_3(t))^{M-k}.$$

Ha $t \to \infty$, akkor

$$P_k(t) \to P_k = \binom{M}{k} \left(\frac{\frac{2}{\gamma}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}} \right)^k \left(\frac{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}} \right)^{M-k}.$$

3. §

2. Probléma

Legyen $R_l(t)$ $(l=0, 1)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpontban l realizációs pontot kell regisztrálni úgy, hogy a t ideig 1-nél több realizációs pontot egyetlen esetben sem kellett egyidejűleg regisztrálni.[1] A modell feltevései mellett kérdés, mivel egyenlő $R_l(t)$.

2. TÉTEL: $R_l(t)$ $(l=0, 1)$ *eleget tesz az alábbi differenciálegyenletrendszernek:*

$$R_0'(t) = -R_0(t)\{(\mu-\lambda)MQ(t)+\lambda M\}+R_1(t)\gamma \tag{1}$$

$$R_1'(t) = -R_1(t)\{(\mu-\lambda)(M-1)Q(t)+\lambda(M-1)+\gamma\}+ +R_0(t)\{(\mu-\lambda)MQ(t)+\lambda M\}, \tag{2}$$

ahol

$$Q(t)=\frac{Q_3(t)}{Q_1(t)+Q_3(t)}.$$

Bizonyítás: könnyen belátható, hogy

$$R_0(t+\Delta t) = R_0(t)\sum_{i=0}^{M} V_{i,0}(t)(1-\lambda\Delta t)^{M-i}(1-\mu\Delta t)^i+ +R_1(t)\sum_{i=0}^{M-1} V_{i,1}(t)(1-\lambda\Delta t)^{M-1-i}(1-\mu\Delta t)^i\gamma\Delta t+o(\Delta t) \tag{3}$$

$$R_1(t+\Delta t) = R_1(t)\sum_{i=0}^{M-1} V_{i,1}(t)(1-\lambda\Delta t)^{M-1-i}(1-\mu\Delta t)^i(1-\gamma\Delta t)+ +R_0(t)\sum_{i=0}^{M} V_{i,0}(t)\left\{\binom{M-i}{1}(1-\lambda\Delta t)^{M-1-i}\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)^i(1-\delta\Delta t)+ +\binom{i}{1}(1-\lambda\Delta t)^{M-i}(1-\mu\Delta t)^{i-1}\mu\Delta t(1-\delta\Delta t)\right\}+o(\Delta t), \tag{4}$$

ahol

$$V_{i,k}(t) = \binom{M-k}{i}Q^i(t)\,(1-Q(t))^{M-k-i},$$

s itt

$$Q(t) = \frac{Q_3(t)}{Q_1(t)+Q_3(t)}.$$

Innen

$$R_0'(t) = -R_0(t)\{(\mu-\lambda)MQ(t)+\lambda M\}+R_1(t)\gamma.$$

[1] Más szóval ez azt jelenti, hogy egyetlen készülék t ideig minden realizációs pontot regisztrálhatott.

Másrészt, mivel

$$\lambda\Delta t \sum_{i=0}^{M} V_{i,0}(t)(M-i)(1-\lambda\Delta t)^{M-1-i}(1-\mu\Delta t)^{i}(1-\delta\Delta t)+$$

$$+\mu\Delta t \sum_{i=0}^{M} iV_{i,0}(t)(1-\lambda\Delta t)^{M-i}(1-\mu\Delta t)^{i-1}(1-\delta\Delta t)+o(\Delta t) =$$

$$= \left\{\frac{\lambda M}{1-\lambda\Delta t}-(\lambda-\mu)MQ(t)\right\}\Delta t+o(\Delta t),$$

ezért

$$R_1'(t) = -R_1(t)\{\mu(M-1)Q(t)+\lambda(M-1)[1-Q(t)]+\gamma\}+R_0(t)\{(\mu-\lambda)MQ(t)+\lambda M\}$$

Q. e. d.

Következmény:

Annak a valószínűsége, hogy t ideig a készülék minden realizációs pontot regisztrált, feltéve, hogy a készülék hibátlanul működött

(5) $$R_0(t)+R_1(t).$$

Ebből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a készüléknek t ideig valamely $(0, t)$-be eső időpontban legalább 2 realizációs pontot kellett volna regisztrálnia

(6) $$F(t) = 1-[R_0(t)+R_1(t)].$$

Ez másképpen azt jelenti, hogy $F(t)$ valószínűséggel állíthatjuk, hogy a $(0, t)$ intervallumban van olyan két realizációs pont, amelynek a távolsága kisebb, mint az előző realizációs pont regisztrálási időtartama.

Így a korábbi jelölésünk értelmében, ha τ-val jelöljük a két egymás után következő realizációs pontok távolságát, akkor

(7) $$P(\tau-\zeta<0) = F(t).$$

Ha megadunk egy ε valószínűségi szintet (7) teljesülésére, azaz előírjuk, hogy

(8) $$P(\tau-\zeta<0) = F(t) \leqq 1-\varepsilon$$

legyen, ekkor az $F(t)$-ben szereplő γ értékére meghatározható, egy időtől függő becslés. Innen már információt kapunk a regisztrálások időtartamára vonatkozóan, mivel a regisztrálás átlagos ideje $1/\gamma$.

4. §

A 2. probléma közelítő megoldása

A 2. §. I. következménye alapján $t\to\infty$ esetén

$$Q(t) \to \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}} = p.$$

Ha tehát t elég nagy ($t > T_0$), akkor $Q(t)$ jól közelíthető a p értékkel. Ezen szempont figyelembevételével a 3. §. 2. tételének differenciálegyenletrendszere helyett tekinthetjük az alábbi állandó együtthatójú differenciálegyenletrendszert, amelynek megoldása $t > T_0$ esetén már jó közelítéssel adja a probléma megoldását:

(1) $$R_0'(t) = -R_0(t)A + R_1(t)\gamma,$$

(2) $$R_1'(t) = R_0(t)A - R_1(t)(B+\gamma),$$

ahol

$$A = (\mu-\lambda)pM + \lambda M,$$

$$B = (\mu-\lambda)p(M-1) + \lambda(M-1),$$

és feltehetően $R_0(O) = 1$, $R_1(O) = 0$. Ha s-sel jelöljük a differenciálás operátorát, akkor, mivel

(3) $$\begin{cases} sR_0(t) = R_0'(t) + 1 \\ sR_1(t) = R_1'(t) \end{cases}$$

kapjuk, hogy

(4) $$R_0(t) = \frac{s+B+\gamma}{s^2 + (A+B+\gamma)s + AB}.$$

Bevezetve az $A+B+\gamma = A_1$, $AB = A_0$ jelölést, továbbá ha ω_1 és ω_2 jelöli az

$$s^2 + A_1 s + A_0 = 0$$

egyenlet gyökeit, azaz ha

(5) $$\omega_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2} =$$

$$= \frac{-\gamma - (2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda] + \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda] + [(\mu-\lambda)p+\lambda]^2}}{2},$$

(6) $$\omega_2 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2} =$$

$$= \frac{-\gamma - (2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda] - \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda] + [(\mu-\lambda)p+\lambda]^2}}{2},$$

akkor

(7) $$R_0(t) = \frac{s+B+\gamma}{(s-\omega_1)(s-\omega_2)} = \frac{K_1}{s-\omega_1} + \frac{K_2}{s-\omega_2} = K_1 e^{\omega_1 t} + K_2 e^{\omega_2 t},$$

ahol

(8) $$K_1 = \frac{B+\gamma+\omega_1}{\omega_1-\omega_2}, \quad K_2 = 1 - K_1 = -\frac{B+\gamma+\omega_2}{\omega_1-\omega_2}.$$

A $\sqrt{A_1^2 - 4A_0} < A_1$ alapján nyilvánvaló, hogy $\omega_2 < \omega_1 < 0$, s így

(9) $$\lim_{t\to\infty} R_0(t) = 0.$$

Mivel

$$R_1(t) = \frac{1}{\gamma}[K_1 e^{\omega_1 t}(\omega_1 + A) + K_2 e^{\omega_2 t}(\omega_2 + A)], \tag{10}$$

ezért

$$H(t) = 1 - [R_0(t) + R_1(t)] = 1 - \left\{K_1 e^{\omega_1 t}\left(1 + \frac{\omega_1}{\gamma} + \frac{A}{\gamma}\right) + \right. \tag{11}$$

$$\left. + K_2 e^{\omega_2 t}\left(1 + \frac{\omega_2}{\gamma} + \frac{A}{\gamma}\right)\right\}.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\lim_{t \to \infty} H(t) = 1. \tag{12}$$

5. §

A bevezetésben felvetett kérdések megválaszolása

A gyakorlatban γ értéke λ, és μ értékhez viszonyítva meglehetősen nagy. Vegyük figyelembe ugyanis azt, hogy $1/\gamma$ a regisztrálási idő, $1/\lambda$ a működési, $1/\mu$ pedig a javítási idő várható értékét jelenti, és az esetek többségében hetek, hónapok is eltelnek, míg egy meghibásodás bekövetkezik. A javítási idő is órákig, napokig tarthat, ugyanekkor a regisztrálási idő mindössze néhány másodperc. A gyakorlatban M értéke is legfeljebb tízes nagyságrendű ($M < 100$). Ezen szempontok figyelembevételével a bevezetésben felvetett kérdésekre könnyen válasz adható az alábbi tétel alapján.

3. TÉTEL: *Ha τ_1 jelenti az első olyan realizációs pontot, amelynek bekövetkezésekor az előző realizációs pont regisztrálása még nem fejeződött be, akkor*

$$P(\tau_1 < t) = F(t) \approx G(t) = 1 - e^{-\alpha t} \qquad (t > T_0), \tag{1}$$

ahol

$$\alpha = \frac{M(M-1)}{\gamma}\left[\frac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}\right]^2, \tag{2}$$

feltéve, hogy γ, M, λ és μ értékeinek a nagyságrendje a fent jelzett módon alakul.

Bizonyítás: Tekintsük a

$$\sqrt{A_1^2 - 4A_0} = \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda] + [(\mu-\lambda)p+\lambda]^2} =$$

$$= \gamma\sqrt{1 + \frac{2(2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda]}{\gamma} + \frac{[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2}{\gamma^2}}$$

kifejezést.

Az

$$y = \frac{2(2M-1)[(u-\lambda)p+\lambda]}{\gamma} + \frac{[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2}{\gamma^2}$$

jelölés, valamint $y \ll 1$ feltételezése folytán

$$\sqrt{1+y} \approx 1+\frac{y}{2}-\frac{1}{8}y^2,$$

s így

$$\sqrt{A_1^2-4A_0} = \gamma\sqrt{1+y} \approx \tag{3}$$

$$\approx \gamma+(2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda]-\frac{2}{\gamma}M(M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2.$$

Ezek alapján

$$\omega_1 \approx -\frac{1}{\gamma}M(M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2, \tag{4}$$

$$\omega_2 \approx -\left\{\gamma+(2M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda]+\frac{1}{\gamma}M(M-1)[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2\right\}. \tag{5}$$

Tekintettel arra, hogy

$$\omega_1-\omega_2 = \sqrt{A_1^2-4A_0}, \tag{6}$$

K_1-re az alábbi becslést nyerjük:

$$K_1 = \frac{B+\gamma+\omega_1}{\omega_1-\omega_2} \approx 1-\frac{M}{\gamma}[(\mu-\lambda)p+\lambda]. \tag{7}$$

Ennek ismeretében

$$K_2 \approx \frac{M}{\gamma}[(\mu-\lambda)p+\lambda]. \tag{8}$$

A K_1 és K_2 ilymódon nyert értékei alapján

$$R_0(t)+R_1(t) \approx \left(1-\frac{M}{\gamma}[(\mu-\lambda)p+\lambda]\right)e^{\omega_1 t}\left(1+\frac{\omega_1}{\gamma}+\frac{A}{\gamma}\right)+ \tag{9}$$

$$+\frac{M}{\gamma}[(\mu-\lambda)p+\lambda]e^{\omega_2 t}\left(1+\frac{\omega_2}{\gamma}+\frac{A}{\gamma}\right) \approx$$

$$\approx e^{\omega_1 t}\left(1+\frac{\omega_1}{\gamma}\right)+e^{\omega_2 t}\left\{\frac{M^2(M-1)}{\gamma^3}[(\mu-\lambda)p+\lambda]^3-\frac{M(M-1)}{\gamma^2}[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2\right\} \approx$$

$$\approx e^{\omega_1 t}\left\{1-\frac{M(M-1)}{\gamma^2}[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2\right\} \approx e^{-\frac{M(M-1)}{\gamma}[(\mu-\lambda)p+\lambda]^2 t}.$$

A fentiekből — figyelembe véve, hogy —

$$p = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}$$

állításunk már következik.

Q. e. d.

Az imént bizonyított tétel alapján a 3. §. (8) összefüggése helyett tekintsük a

$$G(t) \leqq 1-\varepsilon \tag{10}$$

egyenlőtlenséget. Innen

$$\varepsilon \leqq e^{-\alpha t}, \tag{11}$$

azaz

$$\frac{1}{\gamma} \leqq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{M(M-1)\left(\frac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}\right)^2 T}. \tag{12}$$

Ezzel választ adtunk a bevezetésben megfogalmazott a) kérdésre. Tudniillik a (12) alatti egyenlőtlenség szavakban az alábbiakat jelenti. Az M, λ, μ ismeretében és T megadásával ha γ értékét úgy válasszuk meg, hogy arra nézve teljesül a (12) alatti egyenlőtlenség, akkor $1-\varepsilon$-nál kisebb a valószínűsége annak, hogy a készülék a $0 \leqq t \leqq T$ intervallumon nem tud minden realizációs pontot regisztrálni, illetve $\varepsilon 100\%$-nál nagyobb biztonsággal állíthatjuk, hogy készülékünk a $0 \leqq t \leqq T$ intervallumon minden realizációs pontot regisztrál.

A (12) egyenlőtlenség alapján könnyen válasz adható a bevezetésben felvetett b) kérdésre is. (12)-ből ugyanis M-re az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$M \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}\right)^2 T}}. \tag{13}$$

Más szóval ez azt jelenti, hogy a γ, λ, μ ismeretében és T megadásával, ha M értékét úgy választjuk meg, hogy arra nézve teljesül a (13) alatti egyenlőtlenség, akkor legalább $\varepsilon\, 100\%$ biztonsággal állíthatjuk, hogy a készülék, a $0 \leqq t \leqq T$ intervallumon minden realizációs pontot regisztrál.

Végül, ha azt akarjuk, hogy ε-nál nagyobb valószínűséggel regisztráljon a készülék minden $0 \leqq t \leqq T$ intervallumban bekövetkező realizációs pontot, akkor T-re (12)-ből az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

$$T \leqq \frac{\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}}{M(M-1)\left(\frac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}\right)^2}. \tag{14}$$

Megemlítjük, hogy a τ_1 valószínűségi változó empirikus értékei ismeretében α-ra — következésképpen γ-ra, — az (1) összefüggés alapján az exponenciális eloszlás esetén szokásos konfidencia intervallum adható.

(Beérkezett: 1964. X. 19.)

AZ EGYSÉGELEMES FÉLCSOPORTOK NÉHÁNY JELLEMZÉSE

Írta: LAJOS SÁNDOR és SZÉP JENŐ

Egy nem üres S halmazt félcsoportnak nevezünk, ha zárt egy az elemeire értelmezett kétváltozós, asszociatív műveletre nézve. Ebben a dolgozatban multiplikatív írásmódot alkalmazunk, vagyis a félcsoportban értelmezett műveletet szorzásnak nevezzük. Az S félcsoport e elemét a félcsoport bal oldali egységelemének nevezzük, ha az $ea=a$ összefüggés fennáll az S-nek valamennyi a elemére. Hasonló módon értelmezzük a félcsoport jobb oldali egységelemét. Ha az e elem egyszerre bal és jobb oldali egységeleme a S félcsoportnak, akkor a félcsoport kétoldali egységelemének nevezzük. Ha egy félcsoportnak van kétoldali egységeleme, akkor csak egy van. Az S félcsoport a elemét a félcsoport balegységének nevezzük, ha kielégíti az

$$aS=S \tag{1}$$

feltételt. Analóg módon értelmezhető a félcsoport jobbegysége. Ha a félcsoport valamely eleme egyszerre bal- és jobbegysége a félcsoportnak, akkor kétoldali egységnek nevezzük. Egy félcsoportnak több különböző balegysége is lehet. RÉDEI LÁSZLÓ mutatott példát olyan félcsoportra, amelynek nincsen bal oldali egységeleme, de van balegysége (l. [5]). Ebben a dolgozatban azzal a VINCZE ENDRE által felvetett kérdéssel foglalkozunk, hogy bal- és jobbegységet tartalmazó félcsoport milyen további feltétel teljesülése esetén lesz egységelemes félcsoport. Megmutatjuk, hogy ha egy félcsoportnak van kétoldali egysége, akkor a félcsoport egységelemes. Bebizonyítjuk, hogy egy véges félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha van legalább egy bal- és legalább egy jobbegysége. Ugyanilyen szükséges és elégséges feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy egy reguláris félcsoport egységelemes legyen. Végül megmutatjuk, hogy ha egy félcsoportnak van olyan balegysége, amely nem balnövelő elem, és van olyan jobbegysége, amely nem jobbnövelő elem, akkor a félcsoport tartalmaz kétoldali egységelemet. Az S félcsoport x elemét bal oldali növelő (vagy röviden balnövelő) elemnek nevezzük, ha az S félcsoportnak van olyan T valódi részhalmaza, amelyre fennáll az $xT=S$ összefüggés. Hasonló a jobb oldali növelő elem definíciója. A növelő elem fogalmát E. SZ. LJAPIN [2] vezette be, s megmutatta, hogy csoportnak, kommutatív, véges, ill. reguláris félcsoportnak nincsen sem bal-, sem jobbnövelő eleme.

A dolgozatban nem definiált fogalmakra nézve RÉDEI [4] könyvére utalunk. A félcsoportok algebrai elméletének összefoglalása CLIFFORD és PRESTON [1], valamint LJAPIN [3] könyvében található.

1. TÉTEL. *Egy félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha tartalmaz kétoldali egységet.*

Bizonyítás. Ha az S félcsoport egységelemes, akkor az egységelem egyszersmind kétoldali egység is, ennélfogva a tételben kimondott feltétel szükséges ahhoz, hogy egy félcsoport egységelemes legyen.

Megmutatjuk, hogy a feltétel elégséges is. Legyen S kétoldali egységet tartalmazó félcsoport, mondjuk $aS=S=Sa$, ahol $a\in S$. Akkor az S félcsoportnak van olyan s és t eleme, amelyekre

$$as=a=ta. \tag{2}$$

Másrészt legyen b az S-nek tetszőleges eleme. Akkor valamilyen x, y S-beli elempárra

$$ax=b=ya. \tag{3}$$

(2)-ből és (3)-ból következik, hogy

$$bs=(ya)s=y(as)=ya=b, \tag{4}$$

illetve

$$tb=t(ax)=(ta)x=ax=b. \tag{5}$$

Ha a (4) és (5) összefüggésekben $b=t$, ill. $b=s$, akkor azt kapjuk, hogy

$$ts=t \quad \text{és} \quad ts=s. \tag{6}$$

Így az $s=t$ elemre fennáll, hogy

$$bs=b \quad \text{és} \quad sb=b \tag{7}$$

az S félcsoportnak bármely b elemére, vagyis s kétoldali egységeleme S-nek. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. TÉTEL. *Ha egy félcsoport tartalmaz olyan balegységet, amely nem balnövelő, és olyan jobbegységet, amely nem jobbnövelő, akkor a félcsoport egységelemes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az S félcsoportnak a olyan balegysége, amely nem bal oldali növelő eleme S-nek, és b olyan jobbegység, amely nem jobb oldali növelő elem. Akkor az

$$aS=S=Sb \tag{8}$$

összefüggésből következik, hogy az S félcsoportnak van olyan x és y eleme, amelyre fennáll, hogy

$$ax=a \quad \text{és} \quad yb=b. \tag{9}$$

Megmutatjuk, hogy x az S-nek balegysége, y pedig jobbegysége. Ugyanis (9)-ből és (8)-ból következik, hogy

$$axS=aS=S. \tag{10}$$

Ebből már következik, hogy $xS=S$, mert ha $xS=T\subset S$, vagyis $xS=T$ az S félcsoportnak valódi részhalmaza volna, akkor $aT=S$ lévén, ellentmondásba jutnánk azzal a kikötéssel, hogy a nem balnövelő elem. Így csakugyan $xS=S$, tehát az x elem S-nek balegysége. Hasonló módon igazolható, hogy y az S-nek jobbegysége.

Most bebizonyítjuk, hogy a az S-nek balreguláris eleme, azaz $as=at$ maga után vonja, hogy $s=t$, az S félcsoportnak bármely két s, t eleme esetén. Ez az állítás abból adódik, hogy az S félcsoport elemeinek as alakban való előállítása egyértelmű, mivel ellenkező esetben az S-nek valamely U valódi részhalmazára már $aU=S$ volna, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy a nem balnövelő elem. Így az a elem tényleg balreguláris. Hasonló módon lehet belátni, hogy b jobbreguláris elem. (9)-ből következik, hogy

$$axyb=ayb=axb=ab. \tag{11}$$

Itt a-val balról egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$(xy)b=yb, \tag{12}$$

amiből b-vel jobbról osztva

$$xy=y \tag{13}$$

adódik. A (11)-ben most először b-vel egyszerűsítve jobbról:

$$a(xy)=ax, \tag{14}$$

amiből a-val balról osztva kapjuk, hogy

$$xy=x. \tag{15}$$

(13) és (15) szerint $xy=y=x$, s ez az elem bal- és jobbegység is az S félcsoportban. Így az S-nek van kétoldali egysége, s az 1. tétel alkalmazásával adódik, hogy az S félcsoport egységelemes.

Mivel a 2. tételben megfogalmazott feltétel nyílván szükséges is ahhoz, hogy egy félcsoport egységelemes legyen, azért érvényes a következő kritérium.

3. TÉTEL. *Egy félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha tartalmaz olyan balegységet, amely nem balnövelő, és olyan jobbegységet, amely nem jobbnövelő elem.*

A 3. tételnek közvetlen folyománya az alábbi

4. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az S félcsoport nem tartalmaz sem bal oldali, sem jobb oldali növelő elemet. Akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy S egységelemes félcsoport legyen, az, hogy S tartalmazzon legalább egy bal- és legalább egy obbegységet.*

Mivel véges félcsoport nem tartalmaz sem bal oldali, sem jobb oldali növelő elemet, azért a 3. tételből következik az alábbi eredmény.

5. TÉTEL. *Egy véges félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha tartalmaz legalább egy bal- és legalább egy jobbegységet.*

Minthogy a reguláris félcsoportok sem tartalmaznak növelő elemet, azért fennáll még a következő tétel is:

6. TÉTEL. *Egy reguláris félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha tartalmaz legalább egy bal- és legalább egy jobbegységet.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, vol. I., Providence 1961.
[2] E. C. Ляпин, Увеличительные элементы ассоциативных систем, *Учен. зап. Ленинград. гос. пед. инст.* 89 (1953), 55—65.
[3] E. C. Ляпин, *Полугруппы*, Москва 1960.
[4] RÉDEI L., *Algebra*, I. Budapest 1954.
[5] L. RÉDEI, Halbgruppen und Ringe mit Linkseinheiten ohne Linkseinselemente, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 11 (1960), 217—222.

(Beérkezett: 1964. XI. 20.)

A GEOMETRIE (1637) ÉS A DIFFERENCIÁLÁSI ALGORITMUS SZÜLETÉSE

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

DESCARTES *Geometrie*-jét a XIX. század óta az analitikus geometria megteremtéseként ünnepelték. Így vezette ezt be M. CHASLES, a múlt század egyik leghíresebb geométere és matematikatörténésze, aki az analitikus geometria elöd nélküli, tökéletes formában való megjelenésének tekintette a *Geometrie*-t.[1] S így él ez máig a legtöbb matematikus képzeletében.

Pedig már a századfordulón figyelmeztetett rá egy kivételképpen matematikához is értő filozófus, Louis LIARD, hogy „a cím ellenére, a látszat ellenére a *Geometrie* tulajdonképpen nem geometria, hanem algebra[2]... Annak a szövetségnek a célja, amit az algebra és a geometria között teremt, nem a geometria megújítása, hanem az algebra átvilágítása a geometriai intuició tisztaságával. Amit kínál, az egy szóval kifejezve, egyenletek grafikus megoldása."[3]

Az analitikus geometria következménye lesz ennek az algebrai reformnak, de nem ez volt DESCARTES célja. Csak a már kialakult analitikus geometria felől visszatekintve, a helytelen perspektíva keltette azt a látszatot, hogy a *Geometrie*-ben geometriáról van szó. „Vissza kell fordítani ezt a hamis perspektívát; olyan rendbe kell állítani a dolgokat, amint azt a módszer előírta. Hűen módszeréhez, DESCARTES a tudomány reformját a legegyszerűbb dolgok tudományán kezdte el, ti. a viszonyokén és arányokén általában, vagy ahogy ő nevezte, az univerzális matematikán."[4] Ennek a módszernek az alapjait fiatalkori művében, a *Regulae*-ban fektette le. LIARD szerint a *Regulae* semmi egyéb, mint általánosított arányelmélet. LIARD ezt tekinti az egész későbbi cartesianus módszer kulcsának. „Végső analízisben a módszer célja összetett viszonyok képzése egyszerűek segítségével, mint ahogy a számolás a nagyobb számokat az egység megismétlésével konstruálja."[5]

A *Geometrie* későbbi interpretációi ennek a két iránynak a folytatásai. Akik a modern analitikus geometria felől közelednek hozzá, azok, mint CHASLES, koordináta geometriát látnak benne, akik a *Regulae* felől, azok algebrát és arányelméletet.

Moritz CANTOR[6] jól látta, hogy a *Geometrie*-ben az algebra a lényeg, de az egészet nem tartotta túlságosan újnak. Ezzel szemben Pierre BOUTROUX[7] szerint DESCARTES előtt az algebra zsákutcában volt, a továbbjutáshoz mindenekelőtt

[1] CHASLES, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles 1837, 94–95.

[2] LIARD, L.: *Descartes.* Paris ²1903, 47.

[3] Uo. 62–63.

[4] Uo. 63.

[5] Uo. 21.

[6] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II/1. von 1200–1650.* Leipzig ²1899, 793–796.

[7] BOUTROUX, P.: *L'imagination et les mathématiques selon Descartes.* Paris 1900, 41.

az egyenletek algebrai megoldásának az elméletét kellett megteremteni, s éppen ezt végezte el DESCARTES. Charles ADAM[8] is az egyenletek elméletét tartja nagy újságnak a *Geometrie*-ben, ez teszi lehetővé a görbék algebrai kezelését. TANNERY szerint viszont az a tény, hogy DESCARTES olyan nagy fontosságot tulajdonít a folytonos mozgás által szerkeszthető görbéknek, arra utal, hogy egy folytonos mozgáson alapuló görbeelmélet kiépítése lebegett a szeme előtt, az érintőszerkesztés módszerének általánosítása érdekében.[9]

Ezeket a század végi—század eleji interpretációkat ismétlik a későbbi történészek. Pl. L. J. BECK,[10] aki LIARD interpretációját eleveníti fel, kidolgozva a *Geometrie* és a *Regulae* közötti összefüggéseket. Egy másik angol történész, J. F. SCOTT pedig Charles ADAM értelmezését részletezi: „Minden algebrai számítás öt elemi műveletből, összeadásból, kivonásból, szorzásból, osztásból, gyökvonásból van összetéve. Hasonlóképpen, mondja DESCARTES, a geometriai szerkesztéseket öt megfelelő elemi szerkesztésből kell összetenni. Algebra és geometria így egymás struktúrájára vetnek fényt."[11]

A geometriai értelmezés felől közeledik a *Geometrie*-hez Morris KLINE. Arra a hirtelen megnőtt szükségletre figyelmeztet, amit a XVII. század elejének technikai-természettudományos fejlődése támasztott a különféle görbékkel szemben. Az antikvitás görbéi nem voltak elegendőek ennek a keresletnek a kielégítésére. Itt lépett közbe DESCARTES. A görbét egy változó hosszúságú egyenes vonalszakasz mozgásaival állítja elő, ezen egyenes és talppontjának egy választott kezdőponttól való távolsága között algebrai egyenletet állít fel, s így megadja a kívánt új módszert különféle görbék előállítására.[12]

Ezt az inkább ötletszerű interpretációt alapozza meg tudományos pontossággal D. T. WHITESIDE. Szerinte DESCARTES az algebrai görbéket „ponthalmazként" fogja fel, s az x, y koordináta hosszúságok közötti kapcsolat és a görbét kifejező egyenlet közötti aequivalencia analitikus feltételét adja meg $f(x, y)=0$ formában. „Ilyen körülmények között csak akkor meglepő, hogy a *Geometrie* olyan nagy része foglalkozik egyenletek analízisével, ha elfogadjuk azt a modern szempontot, amely ezekben az eljárásokban pusztán algebrai technikát lát. Mélyebb szinten azonban a *Geometrie* nagy része az általános független-változós polinomot megszabó feltételeket kutatja —, amely vizsgálat közvetlenül kapcsolódik a geometriai pont (és vonal) halmazok elméletéhez."[13]

DESCARTES matematikai módszerének egyik legutóbbi interpretátora, Jules VUILLEMIN szerint viszont DESCARTES az „algebrai függvények általános elméletét" redukálja a geometriai arányelméletre azáltal, hogy csak olyan görbéket enged meg, amelyeknek minden pontja megszerkeszthető. Ekkor a görbe egyetlen pontjának a megadásában sincs szükség megközelítésre, határátmenetre, mint az pl. a DE BEAUNE-feladat görbéje esetében szükséges volt. „Csupán, mivel az analitikus geometria

[8] ADAM, Ch.: *Vie et OEuvres de Descartes. Supplément a l'édition de Descartes.* Paris 1910, 214.

[9] TANNERY, P.: „Les Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes" *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft,* 1899, 501—513.

[10] BECK, L. J.: *The method of Descartes. A study of the Regulae* London 1952.

[11] SCOTT, J. F.: *The scientific work of René Descartes.* London 1952, 90.

[12] KLINE, M.: *Mathematics in Western culture.* London 1954, 170.

[13] WHITESIDE, D. T.: „Patterns of mathematical thought in the later Seventeenth Century" *Archive for History of Exact Sciences.* 1, 1961, 179—388.

szemszögéből ítéltek, hihették azt, hogy DESCARTES számot és pontot azonosítva a pontból, azaz a számból indul ki az egyenes megszerkesztésében. Ez a reprezentáció azonban az utódoké, nem az övé. Az ő elve a pontos arányok elve, aminek a *Módszer* által kapott mennyiségek között kell fennállnia. A meghúzható vonalak között kétféle van: azok a görbék, amelyek algebrai egyenletnek felelnek meg, és az egyéb görbék. Az előbbiek DESCARTES szerint ... szabályozott, pontos és folytonos szerkesztés által keletkeznek. Az utóbbiak csak diszkontinuusan szerkeszthetők meg, grafikus eljárásokkal. Összefoglalva, a filozófus szándéka annak a befejezése volt, amit a görögök kezdtek el. A körzővel-vonalzóval való szerkesztés engedélyezése azt a bővített számtestet eredményezte, amiben csak négyzetgyökök fordultak elő; a DESCARTES által elfogadott szerkesztések rendeltetése az volt, hogy — modern kifejezést használva — megteremtse a számtest általános algebrai bővítését, a grafikus eljárásoknak átengedett transzcendens testbővítés kizárásával."[14]

Lényegében ugyanezt az interpretációt vezette be már évekkel VUILLEMIN előtt a XVII. század matematikájának legjobb ismerője, J. E. HOFMANN is. DESCARTES „különbséget tesz precíziós matematika és approximációs matematika között. Minden algebrai úton megoldható problémát — ő geometrikusoknak nevezi ezeket — a precíziós matematikába sorol, minden egyebet — ő mechanikusoknak hívja — az aproximációs matematikába ... Egyidejűleg, a vonalszakasz-egység bevezetésével aritmetizálja a geometriát. A számfogalom, ami kezdetben a természetes számokra korlátozódott és csak fáradságos lépések árán volt kiterjeszthető törtekre, negatív számokra és egyszerű irracionalitásokra, egy csapással lényegesen kibővített: az algebrai számok egész tartományát felölelte."[15]

Carl BOYER, az analitikus geometria történetének monográfusa nem látja ilyen kimagaslónak DESCARTES matematikai teljesítményét. Szerinte DESCARTES VIÈTE célját veszi át, ami algebrai egyenletek gyökeinek geometriai szerkesztése volt. DESCARTES tette pusztán új jelölések bevezetésében állott. Az analitikus geometriát viszont FERMAT teremti meg, aki ugyan megtartotta VIÈTE régi jelölésmódját, de bevezette az új, analitikus geometriának megfelelő célkitűzést: a geometriai hely, tanulmányozását.[16]

Mi volt hát valójában a *Geometrie*? Analitikus geometria? Algebra? Arányelméletre redukált egyenletelmélet? Görbék előállítására és osztályozására bevezetett módszer? Algebrai polinomok elmélete? Kezdődő függvényelmélet? Számtestbővítés? Vagy, mint TANNERY sejtette, előkészület egy általános érintőszerkesztési módszerhez? Vagy egyszerűen, DESCARTES szándékosan homályba borított könyvében bizonyos részleteket, s ezek vezetik félre az interpretátorokat? „Különös élvezet — írta erre célozva a legnagyobb DESCARTES-filológus, Charles ADAM —, ami újból rávilágít arra, hogy DESCARTES bizony egy kicsit misztifikátor volt."[17] A *Geometrie* valóban nagyon különös olvasmány. Könnyed és élvezetes, átfutva azt hiszi az ember, hogy teljesen érti. Azután újra kézbe véve meglepődik: mennyire nem értette meg először

[14] VUILLEMIN, J.: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Paris 1960, 87—88.
[15] SCHOLZ, H.—KRATZER, A.—HOFMANN, J.: *Descartes.* Münster, Westfalen 1951, 56.
[16] BOYER, C. B.: *History of analytic geometry.* New York 1956, 74.
[17] ADAM, Ch.: i. m. 224.

A szerkesztés fogalma és szerepe a *Geometrie*-ben

A *Geometrie* három könyvből áll. Az első könyv a körzővel-vonalzóval megszerkeszthető problémákról szól, a második görbe vonalak szerkesztésével, osztályozásával és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozik. A harmadik könyv a harmadfokú és magasabb problémák egy ötletes görbe-előállító mechanizmus segítségével történő szerkesztésével és ennek a szerkesztésnek megfelelő egyenletekkel foglalkozik.

A könyvben tehát szerkesztésekről van szó s így joggal viseli a *Geometrie* címet, amit éppen a szerkesztésekkel foglalkozó tudomány számára tartottak fenn már az antikvitás óta a számolásokkal foglalkozó aritmetikától való megkülönböztetésképpen.

Négy fontos szerkesztési feladat foglalkoztatja DESCARTES-ot a *Geometrie*-ben: **1.** a PAPPOSZ-probléma megoldása **2.** az ún. optikai oválisok szerkesztése, **3.** az érintőszerkesztés és **4.** a másodfokúnál magasabb fokú parabolák szerkesztése.

Az egyenletek nagyon megkönnyítik a munkát, de *elvi* különbséget nem jelentenek a rajzban történő szerkesztésekkel szemben. Csupán világosabban eldönthetővé teszik, melyik az a legegyszerűbb görbe, amelynek segítségével egy adott probléma megoldható. Ugyanis ez a görbe az, amelyik a második könyv osztályozási elvei alapján a legalacsonyabb görbe-osztályba tartozik. Ez pedig legkönnyebben a görbét leíró *egyenlet* vizsgálatával dönthető el.

Az egyenletek tárgyalásában is a *szerkesztés* szempontjai dominálnak. DESCARTES az egyenletet mintegy „megszerkeszti" a gyöktényezőkből. Ez az eljárás: az egyenleteknek az ismeretlenből és a gyökökből álló binomok szorzataként való előállítása ekkor már nem teljesen új. DESCARTES azonban felismeri az eljárás megfordíthatóságát: az egyenlet osztható egyik gyöktényezőjével, s így eggyel alacsonyabb fokú egyenletté redukálható.

A szerkesztés centrális fontosságának a gondolata végig követi az egyenletek vizsgálatát. A különféle problémák és a nekik megfelelő egyenletek osztályozása a szerkesztésükre használt eljárásokra épül fel. „Ami pedig a test-problémákat (harmad- és negyedfokú egyenletekkel kifejezett problémák) illeti — írja DESCARTES —, amikről azt mondottam, hogy nem oldhatók meg valamely, a körnél magasabb fokú görbe használata nélkül, eleget lehet találni közöttük, amik mindkét szerkesztésre vezethetők vissza. Ezek egyikében meg kell találni azt a két pontot, amit két adott vonalszakasz közötti középarányosok határoznak meg, a másikban azt a két pontot, amik egy adott ívet három egyenlő részre osztanak. Mert tekintve, hogy a kör csupán egyetlen aránytól függ, ti. amely a pontjai és a középpont között fennáll, a kört csupán két pont közötti egyetlen pont meghatározására, vagy két adott egyenes szakasz egyetlen középarányosának a megadására, vagy egy adott szög két részre osztására lehet felhasználni. A kúpszeletek azonban mindig két különböző dologtól függenek és így két pont meghatározására használhatók fel.

Ugyanezen okból a negyediknél magasabb fokú problémákat, amelyek négy középarányos beírását vagy a szög öt egyenlő részre való osztását követelik meg, nem lehet megoldani a kúpszeletek segítségével. Ezért a lehető legjobbnak gondolom, ha általános szabályt adok a megszerkesztésükre, azt a görbét alkalmazván, amit egy parabola és egy egyenes metszése ír le."[18]

[18] *Geometrie*... Descartes műveinek V. COUSIN-féle kiadása, V. kötet, 419—420.

Ez az egyenletek megoldására, helyesebben megszerkesztésére adott görbe-előállító mechanizmus, amelyik voltaképpen az algebrai görbék definíciójára szolgál egy parabola és egy egyenes metszéspontjainak a segítségével, lehetővé tette DESCARTES számára a különböző fokú algebrai egyenletekkel kifejezhető problémák megoldhatóságának a *konstruktív* definiálását. Így bizonyos fokig ebben az eljárásban a RUFFINI—ABEL-tétel cartesianus megfelelőjét láthatjuk. Mutatja ez az eljárás azt a mély különbséget, ami a komplex számtestben a polinomok faktorokra történő felbontásával dolgozó mai algebra és az egyenletpolinomot szerkesztés-feladatként felfogó cartesianus algebra között van.

Annál feltűnőbb ez a különbség, mert DESCARTES is a gyöktényezőkre való felbontásból és az egyenletpolinom gyöktényezővel vagy egy másik egyenletpolinommal való oszthatóságából indul ki, mint a mai egyenletelmélet. Pl. ha valamely probléma megszerkesztésénél olyan egyenletre jutunk, amelyben az ismeretlen dimenziója három (harmadik hatványon van), keresünk egy olyan binomot, amellyel az adott egyenletpolinom osztható és így visszavezetjük alacsonyabb fokú problémák megoldására. „De ha egyetlen binomot se találunk, amelyik az adott egyenletpolinomot osztaná, bizonyos, hogy az egyenlettől függő probléma test-probléma — háromdimenziós — és ezek után nem kisebb hiba lenne megkísérelni csupán körzővel és vonalzóval történő megszerkesztését, mint amilyen az lenne, ha kúpszeleteket alkalmaznánk olyanok megszerkesztésére, amelyek csak köröket igényelnek: mert végül is mindaz, ami tudatlanságot árul el, hibának nevezendő."[19]

Ugyanígy megadja, milyen esetekben redukálhatók negyedfokú egyenletek, azaz milyen esetekben húzódnak meg mögöttük sík-problémák. Azután megadja az általános szabályt a negyediknél magasabb fokú egyenletek redukciójára: „Felsorolhatnánk a következőkben az ötödfokú, hatodfokú és ennél magasabb fokú egyenletek esetét, de inkább összefoglalva tárgyaljuk őket és általánosságban azt állítjuk, hogy ha megkíséreltük az egyenletet előállítani alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzataként és összeszámlálva mindazokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható, azt találjuk, hogy az előállítás egyik által sem sikerül, akkor meggyőződhetünk, hogy nem redukálhatók alacsonyabb fokú egyenletekre, úgyhogy ha az ismeretlen mennyiség harmadik vagy negyedik hatványon van, a probléma amelynek a megoldását keressük test-probléma és ha az ismeretlen ötödik vagy hatodik hatványon van, még magasabb fokú és így tovább."[20]

Megelőzően megadott egy példát egy hatodfokú egyenlet redukciójára.[21] A példát a fentebb említett görbe-előállító mechanizmusa igénybevételével oldja meg, tehát szerkesztéses alapon. A példa:

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

éppen

$$x^{km} + a_1 x^{(k-1)m} + \ldots + a_{k-1} x^m + a_k = 0$$

alakú, ahol $k=3$, $m=2$ s mint az jól ismert, éppen ez az eset az, amelyet k-ad fokúra redukálva, ill. ezt követően k számú m-ed fokú $x^m - a = 0$ binom egyenletre redukálva a négy alapművelettel és gyökvonással lehet megoldani. Hozzávéve ehhez a

[19] Uo. 401.
[20] Uo. 408.
[21] Uo. 399—400.

fentebb idézett sorokat: „...összeszámlálva azokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható", hajlandók lennénk azt hinni, hogy DESCARTES itt a GALOIS-elmélet közelébe jutott. De a folytatás meggyőz róla, hogy erről szó sem lehet: „Egyébként a fentebb mondottak legnagyobb részének a bizonyításától eltekintek — írja közvetlenül az idézett általános redukciós szabály után —, mivel oly könnyűnek látszanak, ha valaki veszi a módszeres vizsgálathoz szükséges fáradságot, mint én tettem, hogy önmaguktól adódnak, és hasznosabb lesz ily módon megérteni azokat, mint készen olvasva."[22]

Nem kell itt mélyebb tudás szándékos titkolásától tartani. Egyszerűen, ahol mi az egyenletek általános megoldhatóságának nehéz problémáját sejtenénk, ott DESCARTES semmi egyebet nem lát próbálgatásokkal történő egyedi megoldásoknál. Az általánosítás számára nem az egyenletek *megoldhatóságának* a síkján jelentkezik, hanem az egyenletek által leírt problémák *megszerkeszthetőségének* a síkján. „Ha meggyőződtünk, hogy az adott probléma test-probléma, akár negyedfokú az egyenlet, amely által kerestük, akárcsak harmadfokú, mindig meg lehet találni a gyökét a három kúpszelet valamelyikének a segítségével,"[23] és ezenkívül csak körző és vonalzó alkalmazása szükséges a szerkesztésben.

Az egyenletek redukciójának az elmélete azt volt hivatva megmutatni, miért nem oldhatók meg a test-problémák a kúpszeletek használata nélkül, s az ezeknél magasabb fokú problémák más, összetettebb vonalak nélkül. Az algebrai egyenletek és az arányelméleti szerkesztések egymásra való leképzése egészen más természetű betekintést nyújt az algebrai egyenletek struktúrájába, mint a mai algebra. DESCARTES nem ismeri a csoport, a számtest, a testbővítés fogalmát. Amit a modern történetírás ilyenekként ismer fel nála, nem egyéb későbbi fejlődés visszavetítésénél. DESCARTES nem végezhette el azt, ami GALOIS és ABEL feladata volt. DESCARTES algebrája a megelőző száz év algebrai fejlődésének az összegezése az antik kúpszelet- és helyelmélet csúcsa. Ezentúl azonban bevezet valamit, ami a jövő fejlődés szempontjából felbecsülhetetlen jelentőségű volt: az ismeretlen hatványai szerint rendezett, zérusra redukált egyenletpolinom fogalmát és alakját, és felismeri, hogy az ilyen alakban felírt egyenletek oszthatók, akárcsak a közönséges számok.

A XVII. század matematikájában az egyenletpolinom centrális fontosságú lesz. Közvetlenül csatlakoznak hozzá a németalföldi iskola és az angolok: HUDDE, SLUSIUS, PELL, COLLINS, James GREGORY és NEWTON. Az egyenletek redukciója a XVII. század közepére a matematika centrális kérdése lesz, s ezzel szoros kapcsolatban alakul ki előbb csak algebrai egyenlet formájában felírható, majd végtelen sok tagú egyenletre is érvényes formában az első *differenciálási algoritmus*. DESCARTES az egyenletpolinomban olyan *modellt* teremtett, amelyikre a következő évszázad alatt lassan és nagy nehézségek leküzdése árán felépülhetett a *differenciálás művelete*.

Az egyenletpolinom differenciálása

DESCARTES a *Geometrie*-ban speciális módszert adott meg a görbe érintőjének a szerkesztésére. A módszer az érintőkör sugarának — a normálisnak — a meghatározásán alapul. A normális abból a feltételből adódik, hogy az érintési pontban a görbe és a kör két metszéspontja egybeesik. Ebben a pontban a normálisra a kör,

[22] Uo. 409.
[23] Uo. 409.

a görbe, valamint PÜTHAGORÁSZ tételének a segítségével felírt négyzetes egyenletnek két egybeeső gyöke van.

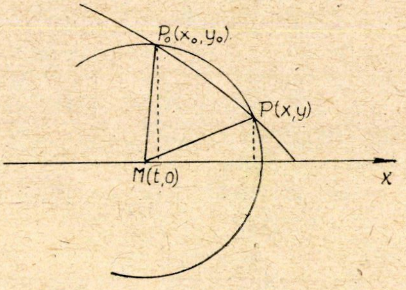
A történészek Moritz CANTOR-tól J. F. SCOTT-ig az érintő kör sugarának a meghatározására helyezik a hangsúlyt, ami a kör és a görbe két metszéspontjának az egybeeséséből adódik. J. E. HOFMANN éles szeme vette csak észre, hogy egyébről is van itt szó: DESCARTES választ a görbén, amelyhez érintőt akar húzni egy $P_0(x_0, y_0)$ pontot és a tengelynek választott egyenesen egy $M(t, 0)$ pontot. E körül az M pont körül leír egy P_0 ponton átmenő kört, ami a görbét újból metszi $P(x, y)$ pontban.

Ez az eljárás az ábra szerint az

$$(x-t)^2+y^2 = (x_0-t)^2+y_0 2$$

egyenletet eredményezi, ahonnan

$$y = x-t+\sqrt{(x_0-t)^2+y_0 2}.$$



1. ábra

Behelyettesítve ezt a görbe egyenletébe, $f(x, t)=0$ egyenletet kapja, amelyben $x-x_0$ lineárfaktor fordul elő. „DESCARTES most megköveteli — írja HOFMANN —, hogy az $x-x_0$ faktor még másodszor is lehasítható legyen, s így nyer t-re egy egyedül t-t tartalmazó feltételt.”[24]

HOFMANN ezt az eljárást egyáltalában nem tartja lekicsinylendő tettnek, mint azt a többi matematika történészek teszik, csupán mert megkerülte a határátmenetet. Éppen ellenkezőleg az a szép HOFMANN szerint ebben az eljárásban, hogy teljesen a cartesianus matematika keretei között maradva, *algebrai* megoldást talált erre az egyébként *infinitézimális* megfontolásokat igénylő problémára.[25]

Ennek az infinitézimális módszert megkerülő, tiszta algebrai eljárásnak azonban óriási jelentősége volt az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából. Ugyanis az első matematikus, aki ennek az érintőszerkesztési eljárásnak a jelentőségét felfogta, ezen keresztül alkotta meg a differenciálás műveletének az algoritmusát.

A két Francis SCHOOTEN — apa és fiú[26] — köré tömörült németalföldi cartesianus matematikusok a XVII. század közepén vaskos tanulmánykötetet adtak ki a *Geometrie*-hez írt kommentátorokból.[27] Ebben van közzétéve Johann HUDDE két rövid tanulmánya 1657, ill. 1658-ból. Az első[28] az egyenletek redukciójáról szól, a második[29] szélsőérték problémákról. Az 1657-es tanulmány tartalmazza az első világosan és általánosságban megfogalmazott differenciálási algoritmust a függvények egy speciális osztálya, az egyenletpolinomok esetére megfogalmazva. HUDDE

[24] SCHOLZ—KRATZER—HOFMANN: i. m. 64—65.

[25] Uo. 66.

[26] Az ifjabb Frans van SCHOOTENről J. E. HOFMANN írt a reá jellemző csodálatra méltó apparatúrával ellátott rövid bibliográfiát. HOFMANN, J. E.: *Frans van Schooten der Jüngere.* Wiesbaden 1962.

[27] Renati Des Cartes Geometria, una cum notis Florimondi de Beaune, in Curia Blesensi Consiliarii Regii, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten, in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris. ... Frankfurti. (1695-ös kiadás.)

[28] *Johannis Huddenii Epistola Prima de Reductione AEquationum.* Uo. 406—506.

[29] *Johannis Huddenii Epistola Secunda de Maximis et Minimis.* Amsterdam 1658. Uo. 507—516.

maga hangsúlyozza, hogy eljárásának lényege már benne foglaltatott a *Geometrie*-ban, ő csupán explicite kifejtette, megmagyarázta és általánosította az ott elrejtett lehetőségeket. Valójában sokkal többet tett ennél, megadta a DESCARTES által bevezetett egyenletpolinom differenciálásának az explicit és általános szabályát. Az egyenletpolinom esetében ugyanis a differenciálhatóság egyszerűen két egybeeső gyök létezését jelenti. Pontosan ezt adta meg a *Geometrie*, amikor az érintőszerkesztés kritériumaként a görbét reprezentáló egyenlet két gyökének az egybeesését követeli meg. HUDDE azonban felismeri az érintőszerkesztés és a maximum-minimum problémák összefüggését és DESCARTES speciális eljárását *általános számolási módszerré* fejleszti. Olyan *algoritmussá, amelyik egyenletpolinomok esetében mindig alkalmazható* s nem kell keresgélni alkalmazása előtt, vajon érvényes-e az adott esetben.

HUDDE, DESCARTES nyomán, mindig csökkenő hatványok szerint rendezett alakban, nullára redukálva írja fel az egyenletet s az ismeretlen hiányzó hatványait ✳-gal jelöli. Modern jelölésben (de egyebekben a cartesianus elmélet szelleméhez ragaszkodva)

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

alakban írhatjuk fel az egyenletpolinomot. HUDDE először is különbséget tesz kétféle redukció között. Az egyik, a közönséges értelemben vett redukció az ún. abszolút redukció az egyenlet közönséges algebrai műveletekkel történő megoldása. Ezzel nem foglalkozik. A másik, általa relatívnak nevezett redukció a feltett problémára vonatkoztatva vizsgálja az egyenlet gyökeinek a viselkedését. HUDDE csak ezzel a redukcióval foglalkozik.

Közvetlenül a *Geometrie*-hez kapcsolódva számos esetet sorol fel, hogyan kell olyan egyenletet redukálni, amely két másik egyenlet összeszorzásából állott elő. Mint láttuk, ezt a kérdést már DESCARTES elintézte. Azonban HUDDE felismeri, hogy a különféle esetek mind feltételezik annak az ismeretét, hogyan kell „két (vagy több) egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját megkeresni. Tegyük fel példának okáért, hogy két egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját kell megtalálni."[30]

Azonnal példán mutatja be az esetet. Legyen pl. a két egyenlet

$$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd = 0$$

és

$$d^4c - bbcdd + cacbb - caadd = 0.$$

Először azt kell megnézni, nincs-e valamely betű vagy szám, amellyel mindkét egyenlet osztható. Jelen esetben pl. mindkét egyenlet osztható c-vel:

$$d^3 - add + 2aab - 2abd = 0,$$

$$d^4 - bbdd + aabb - aadd = 0.$$

Azután mindkét egyetlenben ismeretlennek tekinti az egyik betűt. Legyen pl. ez a d betű:

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0,$$

$$\begin{array}{l} d^4 * - bbdd * + aabb = 0. \\ \qquad\; - aa \end{array}$$

[30] HUDDE, J.: *Epistola Prima*... 422.

Az egyenleteket a HUDDE által alkalmazott cartesianus írásmódban írtuk fel, ahol a zárójelet a tagok egymás alá írása helyettesíti. A legutolsó egyenlet a mi írásmódunkban

$$d^4-(b^2+a^2)d^2+a^2b^2=0$$

lenne. A csillagok a HUDDE-féle írásmódban az ismeretlen hiányzó hatványait (d^3-t és d-t) jelölik.

Ebben a lépésben veszi fel a HUDDE-féle egyenletpolinom azt az alakot, amit mi $f(x)=0$ alakkal jelölünk és ez a lépés vezet majd SLUSIUSON keresztül a parciális derivált képzéséhez. Ami ezután következik, az a továbbiak szempontjából nagyon lényeges, azért szó szerint idézzük.

„Azután a d^3-nek az első egyenletből vett értékét behelyettesíthetjük mindenütt a második egyenletben d^3 helyébe és ezt kapjuk:

$$d^4=ad^3+2abdd-2aabd=bbdd+aadd-aabb$$

vagy (d^3 helyébe az első egyenletből)

$$\begin{array}{l} aadd+2aabd-2a^3b \\ \quad -2aabd+2abdd \\ \hline aabb-2a^3b+2abdd-bbdd=0 \\ \hline \end{array}$$

azaz

és $dd=\dfrac{2a^3b-aabb}{2ab-bb}$ vagy aa; és $d=a$ vagy $d-a=0$. Így ezt a dd értéket helyettesítve az első egyenletbe, az

$$aad-a^3-2abd+2aab=0$$

egyenletet kapjuk.

Végül magát d-t helyettesítve be a helyébe az utolsó egyenletben

$$a^3-a^3-2aab+2aab=0$$

egyenletre jutunk.

Mivel ebben az egyenletben minden tag kölcsönösen megsemmisíti egymást, bizonyítást nyert, hogy mind a

$$d^3-add-2abd+2aab=0$$

egyenlet, mind a

$$\begin{array}{l} d^4*-bbdd*+aabb=0 \\ \quad\;\;\; -aa \end{array}$$

osztható $d-a=0$-val, azaz $d-a$ mindkettőnek az osztója, a legnagyobb közös osztó. És mivel továbbá mindkét adott egyenletet (vagy mennyiséget) előbb c-vel osztottuk, nyilvánvaló, hogy a legnagyobb közös osztójuk $d-a$ szorozva c-vel, vagy $dc-ac$."[31]

Lehet természetesen d helyett más betűt is ismeretlennek tekinteni és aszerint keresni meg a két egyenlet legnagyobb közös osztóját.

Mint látjuk — s a további fejlődés szempontjából ez a nagyon fontos — HUDDE világosan felismeri, hogy a legnagyobb közös osztó létesít olyan kapcsolatot egy

[31] Uo. 422—423.

$f(x)$ egyenlet s egy ebből megadott szabály szerint előállított másik $f'(x)$ egyenlet között, hogy az $f'(x)$ egyenletből az eredeti $f(x)$ egyenlet kétszeres vagy többszörös gyökét ki lehessen számítani. Ezt az eljárást adja meg az X. szabály:

„Hogyan kell redukálni minden, vagy betűkben vagy számokban megadott egyenletet, amelynek az ismeretlen mennyisége (vagy más betűje, amelyet mintegy ismeretlennek lehet tekinteni) két vagy több megegyező értékkel rendelkezik.

Először: ha az adott egyenletben két egyező gyök van, megszorzom azt egy tetszőlegesen felvett aritmetikai progresszióval. Magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Az így kapott szorzat legyen 0. Azután, midőn így két egyenletem van, megkeresem a fentebb megadott módszerrel a legnagyobb közös osztójukat. Végigosztom ezzel az adott egyenletet, így előállítható a hányados."[32]

Mai nyelven elmondva, egy adott $f(x)$ egyenlethez kell egy olyan másik $f'(x)$ egyenletet találni, hogy a két egyenletnek legyen legnagyobb közös osztója, $d(x)$. Ebben az esetben az eredeti $f(x)$ egyenletnek van többszörös gyöke, az $f(x)$ egyenlet szétejthető, redukálható egy alacsonyabb fokszámú egyenlet és a $d(x)$ szorzatára.

A további fejlődés szempontjából ennek a módszernek a jelentősége óriási. Az az $f'(x)$ egyenlet ugyanis, amit az $f(x)$ egyenletből azzal a feltétellel kaptunk, hogy legyen legnagyobb közös osztójuk, szolgál a maximum-minimum feladatok és az érintőfeladatok megoldására. Erről szól HUDDE második, 1658-as éretekezése.

Az értekezés a következő tétellel kezdődik: „Ahhoz, hogy egy egyenletben két gyök egyenlő legyen, meg kell szorozni egy tetszőleges aritmetikai progresszióval, magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Állítom, hogy ez a szorzat az az egyenlet, amelyből meg lehet találni a mondott gyököt."[33]

Mivel a két egybeeső gyök az egyenlet valamilyen szélsőértékét jelenti, az ismeretlen maximum vagy minimum értékét, nyilvánvaló, hogy az így kapott egyenletet lehet használni ennek a szélsőértéknek a megkeresésére. A kapott egyenlet és az eredeti egyenlet közös gyöke lesz az eredeti egyenlet kétszeres gyöke. „Úgyhogy a módszer bizonyítására még csupán azt kellene igazolni, hogy a kiinduló egyenletnek van két egyenlő gyöke. Amit valóban oly egyszerű bizonyítani, hogy ennél tovább időzni semmi más nem lenne, mint munka és olaj vesztegetése."[34]

E helyett felsorolja az egyes eseteket, s mindegyiket bemutatja néhány jól választott példán. Pl. az első esetet: ha az egyenlet csak egy ismeretlent tartalmaz és ez sem fordul elő a nevezőben, a következő példán mutatja be:

„Legyen pl. $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab$ x valamely maximumára érvényes. Szorozzunk tagonként

$$\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 1 & \text{-el:} \\ \hline \end{array}$$

Legyen $$9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x = 0 \quad \text{vagy}$$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0.$$

[32] Uo. 433–434.
[33] HUDDE, J.: *Epistola Secunda...* Uo. 507.
[34] Uo. 510.

Az általános módszer szerint hasonlóképpen:

$$3ax^3 - bx^3* - \frac{2bba}{3c}x + aab = 0$$

Szorozzunk egy aritmetikai haladvánnyal

$$\underline{\;3 \quad 3\cdot 2 \quad 1 \quad 0\;}$$

Legyen, mint fent

$$9ax^3 - 3bx^3* - \frac{2bba}{3c}x = 0 \quad \text{vagy}$$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0.\text{"}[35]$$

Ebből az egyenletből kiszámított x az eredeti egyenlet kétszeres gyöke (tehát szélső értékének a helye) lesz, mert a két egyenletnek van legnagyobb közös osztója.

Modern megfogalmazásban így foglalhatjuk össze a HUDDE-féle eljárást: Egy $f(x)$ egyenletnek akkor és csakis akkor van többszörös gyöke, ha $f(x)$-nek és egy, belőle megadott eljárással előállítható $f'(x)$ egyenletnek van $d(x)$ legnagyobb közös osztója, azaz ha $f(x)$ és $f'(x)$ nem relatív prím polinomok. Ebben az esetben az $f(x)$ többszörös gyökei a $d(x)=0$ egyenletnek tesznek eleget, ennek tesznek eleget az $f'(x)$ gyökei is, úgyhogy utóbbiakból kiszámíthatók. Az $\frac{f(x)}{d(x)}$ egyenlet pedig alkalmas az eredeti $f(x)$ egyenlet egyszeres gyökeinek a meghatározására.

Látnivaló, hogy a HUDDE-féle elmélet semmi egyéb, mint az a módszer, amit a mai algebra használ a gyökök többszörösségének a vizsgálatára.[36] Az $f'(x)$ nem más, mint az $f(x)$ polinom deriváltja. Természetesen HUDDE nem használta ezt az *elnevezést*, nem használta *explicite* még a *fogalmat* sem. De *ahogyan* használja a mi általunk így nevezett és definiált fogalmat, az fedi a mai értelmezést, s ezért átírhatjuk modern terminológiára.

A továbbiakat, hogy ti. hogyan lett a HUDDE-féle eljárásból NEWTONnál a mi parciális differenciálhányadosunknak megfelelő fogalom, már tisztázta WHITESIDE a XVII. század második felének matematikájáról szóló alapvető monográfiájában. A cartesianus algebra tehát nem csupán önmagában teljes tárgyalását adta az általa megteremtett egyenletpolinomoknak, hanem túlmutatott önmagán, s mintegy *modellként szolgált az algebrai egyenleteknél általánosabb függvények differenciálásának a kidolgozásához.*

Az érintőszerkesztés problémájának a megoldása abból a feltételből, hogy a problémára felállított egyenlet két gyöke összesen, nem kisebb jelentőségű az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából, mint amilyen ARKHIMÉDÉSZ kimeríthetetlenségi módszere volt. Azonban a két eljárás szellemében óriási a különbség. ARKHIMÉDÉSZ eljárása nehézkes, körülményes indirekt bizonyításon alapuló módszer volt, aminek az érvényességi feltételeit minden esetben külön meg kellett vizsgálni s egyedi módon ismételni el a bizonyítást. DESCARTES módszere a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenletekre leképezhető szerkesztések esetében, közvetlenül és általánosan alkalmazható egységes szabályt ad az egyenlet által előállított görbe érintőjének a megtalálására.

[35] Uo. 510.
[36] L. pl. SZELE Tibor: *Bevezetés az algebrába.* Budapest 1953, 216–218.

Igaz, hogy a módszere csak speciális esetben, az algebrai görbék esetében, érvényes. Ezáltal azonban ezen a területen megteremti egy olyan eljárás modelljét, ami NEWTON és LEIBNIZ kezében a *Geometrie*-ből kirekesztett transzcendens görbék esetére is alkalmazható algoritmussá bővül. Az a mód ugyanis, ahogyan két egyenlet megfelelő tagjainak az egyenlővé tételéből következtet a gyökök azonosságára, semmi egyéb, mint a deriváltképzés centrális gondolatának, a *lineáris approximálhatóságnak* a kifejezése.

A szerkesztések algebrája

Az aritmetika és geometria között létesített megfelelkezés, aminek a DESCARTES-algebra és „analitikus geometria" köszönheti létrejöttét, nem az algebrai és geometriai struktúrák ekvivalenciáján alapul. Nem az algebra leképezése geometriára, hanem a geometriai szerkesztések egyszerűvé, áttekinthetővé, racionális rend szerint elrendezetté tétele az algebra segítségével. A racionálist itt szó szerint kell érteni. Nem átvitt értelemben „ésszerűnek", hanem *arányos*nak kell fordítani, úgy, ahogyan azt az antik geometria és még DESCARTES is használta. Láttuk, milyen fontos szerepe volt DESCARTES görbeelméletében a középarányosok beiktatásának. A matematika történetírás jól ismeri és kellőképpen kiemeli DESCARTES matematikájának arányelméleti vonatkozásait. Éppen ez az arányelmélet kapcsolja a cartesianus matematikát legerősebben a reneszánsz századai alatt felfedezett antik matematikához.

A *Geometrie* első, XVII. századi kommentátorai többnyire ezeket az antik arányelméleti vonásokat veszik észre a műben. Így a század második felének a geometriájában bizonyos visszatérés észlelhető az antik módszerekhez, s azt lehetne mondani, hogy a valóban cartesianus geometria csak sokkal későbben, a XIX. században bontakozik majd ki CHASLES munkáiban.

Jóllehet CANTOR és már MONTUCLA is ismerték a XVI—XVII. századi hatalmas, antik matematikáról szóló kommentárirodalmat — joggal beszélhetünk ezzel kapcsolatban „matematikai humanizmusról" —, mégis nagyon keveset tudunk arról, milyen szerepet játszott az antik matematika pontos megismerése az ötlet- és problémaadáson túl a XVI—XVII. századi matematika kialakulásában.

Nem egyszerűen arról van szó, hogy pl. VIÈTE és FERMAT jól ismerik és utánozzák DIOPHANTOSZT vagy APOLLONIOSZT, s hogy a XVII. században végig lankadatlanul fáradoznak elveszett görög matematikai művek rekonstruálásán. A WARBURG-intézet korszakalkotó munkája óta tudjuk, milyen hallatlanul bonyolult történelmi problémát jelentenek „átvétel" és „rekonstrukció", ha olyan magasrendű és önmagában zárt kulturális képződményekről van szó, mint az antik művészet vagy matematika.

A XV., XVI. és XVII. század egyik legnagyobb jelentőségű, döntő élménye az antik kultúra recepciója volt. Ennek a nagy felfedezésnek a súlypontja a XVI. században van, a XV. század bizonyos értelemben elő-, a XVII. utójátéka. De ez az utójáték az antikvitásnak, mint élet- és kulturális eszménynek az értékcsökkenésével párhuzamosan az antikvitás egyre pontosabb megismeréséhez vezetett. POUSSIN sokkal antikabb, mint MICHELANGELO, HALLEY sokkal inkább követi APOLLONIOSZT, mint FERMAT. Az antikvitás *értékelése* és *megismerése* közötti ellentét a XVII. század végén az „antikok" és a „modernek" közötti nagy harcban realizálódik és hosszú küzdelem után a „modernek" javára dől el.

Amikor a XVII. század legvégén NEWTON műveinek nagy csodálója és kiadója, BENTLEY doktor *Phalaris*-ában leleplezi az antikvitásimádók hamisításait, nemcsak egy új szakmát, a klasszika-filológiát teremti meg, nemcsak a szövegkritika első nagy példáját adja, hanem egyben megöli az antikvitást is, az antikvitást mint utólérhetetlen életeszményt.

A humanizmus általános jelenség volt, a kultúra minden területét átitatta. Azért volt olyan általános és szenvedélyes az ellene vívott harc is a XVII. század második felében. A humanizmus mozgalma egész Európára kiterjedt. Általánosabb jelenség, mint a vallási reformok, mert utóbbiak egy északi (szárazföldi és óceáni) és egy déli (mediterrán) részre osztották Európát. A humanizmus azonban egész Európán átsöpört. Amikor a XVII. század során a gazdasági és kulturális vezetés a mediterráneumból fokozatosan északnyugatra tevődik át, úgyszólván ezt az egyetlen tényezőt, a humanizmust viszi magával.

A XVII. században a németalföldi és angol egyetemek lesznek a humanizmus fő fészkei. Ezzel azonban átalakul a mozgalom jellege: a humanizmus, ami Itáliában többnyire egyetemen kívüli emberek vállalkozásaként indult, itt szorosan egyetemi tudósokhoz kötődik. S ez nem kicsiny változást jelent. Szinte beosztási elvként lehetne végigvinni az aurópai kultúra történelmén az egyetemi és nem-egyetemi korszakok váltakozását, annyira fontos különbség az, hogy a kor szellemi életének a vezetői ennek a nagy, középkorban kialakult intézménynek a keretében dolgozó emberek-e vagy sem.

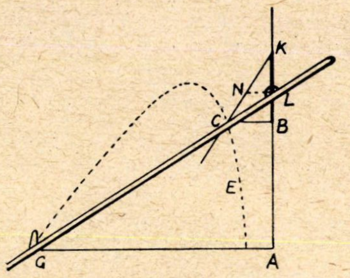
Nem lehet tehát figyelmen kívül hagyni, hogy a humanizmus a XVII. században lényegében egyetemi mozgalommá válik, s hogy a humanizmus első nagy és sikeres ellenfele, DESCARTES, mindvégig kívül marad az egyetemeken és egyre fokozódó harcban áll velük. Annyira nem egyetemi ember, s annyira gyűlöli az egyetemi tudósokat és humanistákat egyaránt, hogy szinte hajlandók vagyunk a PAPPOSZ-probléma *Geometrie*-ben adott megoldását egyszerű ürügynek tekinteni. Ürügynek és párviadalnak: lám, a híres problémát, amit a bámult EUKLIDÉSZ és APOLLONIOSZ sem tudtak megoldani, s aminek PAPPOSZ csak a legegyszerűbb esetét tudta nagy nehézségek árán megfejteni, azt ő, DESCARTES, az egyetemeken kívüli ember, az egyszerű *honette homme*, az egyszerű polgár játszi könnyedséggel és teljes általánosságban megoldotta.

Két kultúra ütközik itt össze a matematika területén: az egyetemivé vált humanista kultúra és az új, előbb gúnyként, majd DESCARTES által is vállaltan cartesianusnak nevezett Univerzális Módszer. Nem kis dologról volt hát szó és DESCARTES jogosan tiltakozott felháborodottan, mikor a *Geometrie*-t a PAPPOSZ-probléma egyik sikerült megoldásává akarták degradálni.

A PAPPOSZ-probléma megoldása DESCARTES-nál csupán a szerkesztések és az egyenletek között kidolgozott megfelelkezés egyik példája. Szerkesztések és egyenletek megfelelkeztetésének a módszeréhez csatlakozik SCHOOTEN és de WITT munkái nyomán a XVII. századi kúpszelet-elmélet nagy része. Ez jelentkezik HUYGENS és NEWTON műveiben. Ehhez csatlakozik, NEWTON és HALLEY nyomán, az egész késő XVII. századi, XVIII. század eleji angol geometria. A *Geometrie* eredeti felfogása azonban közben észrevétlenül egyre inkább elvész, egyre nagyobb lesz az antikvitáshoz való visszatérés, s alig lehet nagyobb különbséget elképzelni matematikai stílusban, mint a PAPPOSZ-problémának NEWTON és DESCARTES által adott megoldásait.

Ezzel párhuzamosan vész el az a másik, tisztán geometriai kúpszeletelmélet is, ami Desargues és Pascal munkáiban a *Geometrie* algebrai kúpszeletelméletével egy időben és szintén az antikvitással való teljes szakításként, nem-egyetemi emberek kezében alakult ki. Mindkét módszer elmerül az egyetemi humanizmus fokozódó antikizálásában.

Az első lépést e felé az antikizálás felé az ifjabb Frans van Schooten Leyden-i professzor, Descartes tanítványa és Huygens mestere tette híres *Geometrie* kommentárjaiban. Schootenben a matematikatörténetírás J. E. Hofmann alapvető tanulmányáig Descartes szolgai kommentátorát és utánzóját látta. Hofmann ismerte fel, hogy a Leyden-i professzor módszere több helyenjel entősen eltér a kommentált szöveg stílusától.[37]



2. ábra

A mi szempontunkból különösen fontosak Schooten második könyvhöz írott kommentárjai. A második könyvben vezeti be Descartes a görbék osztályozását és algebrai-geometriai analízisét az általa kigondolt ötletes, egymáson eltolható és egy középpont körül forgatható egyenesekből összeállított görbe-szerkesztő gép segítségével. Azután így folytatja: „Tegyük fel, hogy az EC görbét a GL vonalzó és $CNKL$ sík idom metszése írja le, amelynek KN oldalát meghosszabbítjuk C irányába és amely úgy mozog az adott síkban, hogy KL oldala mindig egybeesik a mindkét irányban meghosszabbított BA vonal valamely részével és ezáltal GL vonalzónak, amely az L pontban a $CNKL$ síkidomhoz van kapcsolva forgó mozgást ad G középpont körül. Ha meg akarom tudni, hogy milyen osztályba tartozik az így leírt görbe, választok egy egyenes vonalat, pl. AB-t amelyre a görbe pontjait vonatkoztatom és választok AB egyenesen egy A pontot, amelynél kezdem a számítást. ...Azután felveszünk a görbén egy tetszőleges C pontot és feltesszük, hogy a görbeleíró gép éppen ezt határozza meg. Ezen a C ponton át CB párhuzamost húzunk GA-hoz. Mivel CB és BA két ismeretlen és indeterminált mennyiség, egyiket y-nal, másikat x-szel jelöljük. Ahhoz, hogy e között a két mennyiség közötti viszonyt megkapjuk, tekintetbe kell venni egyéb, a görbe leírását megszabó ismert mennyiségeket is, mint GA, amit a-val jelölünk; KL, amit b-vel jelölünk és a GA-val párhuzamos NL, amit c-vel jelölünk. Azt állítom, hogy CB vagy y úgy aránylik BK-hoz, amint NL aránylik LK-hoz, vagyis amint c aránylik b-hez. Tehát BK egyenlő $\frac{b}{c}y$. De akkor BL egyenlő $\frac{b}{c}y-b$ és AL egyenlő $x+\frac{b}{c}y-b$. Továbbá CB úgy aránylik LB-hez, azaz y úgy aránylik $\frac{b}{c}y-b$-hez, amint AG vagy a aránylik LA vagy $x+\frac{b}{c}y-b$-hez. Az aránypár második tagját megszorozva a harmadikkal az eredmény $\frac{ab}{c}y-ab$, és ez egyenlő az aránypár első és negyedik tagjának a szorzatával,

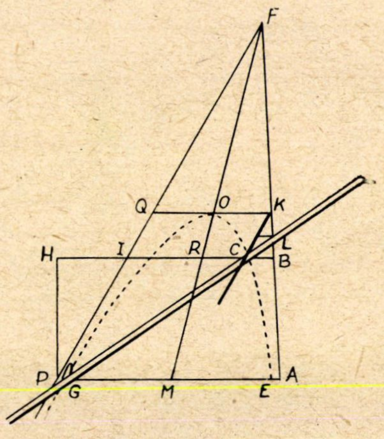
[37] Hofmann, J. E.: i. m. 4.

ami $xy+\frac{b}{c}y^2-by$. A keresett egyenlet tehát

$$y^2 = cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac.$$

Ebből az egyenletből látjuk, hogy az *EC* görbe az első osztályba tartozik, amennyiben semmi egyéb, mint egy hiperbola."[38]

Ehhez a legutolsó mondathoz fűzi SCHOOTEN az alábbi hosszú magyarázatot: „Ha ugyanis *AG*-t meghosszabbítjuk *D*-ig és *DG*-t egyenlőnek vesszük *EA*-val vagy *NL*-el (l. 3. ábra, de vö. 2. ábrával) és *D* ponton keresztül *CK*-val párhuzamos egyenest húzunk, amely az *AB* egyenest *F* pontban metszi, *DF* lesz az egyik aszimptota és *AF* a másik. Tegyük fel ugyanis, hogy a *GOCE* vonal hiperbola és *DF*, *FA* az aszimptotái, továbbá hogy *DG*, *EA* egyenlők *NL*-el, *DF* párhuzamos *CK*-val, amint mondottuk, azaz *DFA* szög egyenlő *CKB* szöggel. Hosszabbítsuk meg *BC*-t, amíg *I*-ben metszi *DF*-et és húzzunk *D*-n keresztül egy *AF*-el párhuzamos *DH* egyenest, amely *H* pontban metszi *BC*-t. Mivel *DHI* és *KLN* háromszögek egyébként hasonlóak *FAD* háromszöghöz, azért hasonlóak egymáshoz is. Tehát ahogy *KL* aránylik *LN*-hez, azaz *b* aránylik *c*-hez, úgy aránylik *DH* vagy *AB*, azaz *x*, *HI*-hez, amely így $\frac{cx}{b}$ lesz. Levonva *HB*-ből ezt és *BC* vagy *y* szakaszt, marad *IC*, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Mivel a hiperbolánál Apolloniosz *Koniká*-jának második könyv 10. propozíciója szerint *ICB* négyszög egyenlő *DEA* négyszöggel; ezért ha *IC*-t megszorozzuk *CB*-vel, azaz $a+c-\frac{cx}{b}-y$ kifejezést *y*-al, az így előálló *ICB* négyszög, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$ egyenlő lesz *DEA* négyszöggel, vagyis *ac*-vel, azaz azzal a négyszöggel, ami *DE*-nek vagy *GA*-nak az *EA*-val való szorzásából áll elő. Tehát rendezve az egyenletet, úgy csoportosítva, hogy *yy* legyen az egyik oldalon, $yy = cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$ egyenletre jutunk. Amely egyenlet ugyanaz, mint ami fentebb a *GL* vonalzó és a *CK* egyenes mozgásából állott elő. Így bebizonyítottuk az állításunkat, hogy a leírt *CE* vonal hiperbola, melynek aszimptotái *AF*, *FD*."[39]



3. ábra

Eljutottunk ahhoz a félmondathoz, amit SCHOOTEN hosszan kommentált: „amint hogy ez semmi egyéb, mint egy hiperbola". A kommentár azonban teljesen visszájára fordítja a mondat értelmét. SCHOOTEN bizonyításában a hiperbola aszimptotatulajdonságai a döntőek, s feleslegessé válik DESCARTES görbe-előállító mechaniz-

[38] DESCARTES, *OEuvres*, ADAM—TANNERY-féle kiadás, VI. kötet, 393—394.

[39] *Renati Des Cartes Geometria*... SCHOOTEN-féle kiadás, SCHOOTEN kommentárjai a II. könyvhöz. i. m. 171—172.

musa. DESCARTESnál ez az eszköz, ill. az általa megengedett *mozgás* biztosította a kapott görbe megfelelő, ahogy ő nevezte, „geometrikus" voltát. Ez az eszköz biztosította, hogy a kapott görbe algebrai egyenlettel legyen előállítható, s így természetes, hogy ez az algebrai mozgást létesítő eszköz szolgál az algebrai, DESCARTES által „geometrikusnak" nevezett görbék osztályozására. Ha ugyanis az eszközön a *CNK* egyenes helyére a most nyert hiperbolát, vagy bármely más, kettőnél nem magasabb fokú egyenlettel leírható, ún. első *genre*-beli görbét teszünk, akkor ennek a görbének és a *GL* vonalzónak a metszése az *ECA* hiperbola helyett egy ún. második *genre*-ba tartozó görbét ír le. Pl. ha *CNK* kör, melynek középpontja *L*, a görög geometria ún. második konhoidját kapjuk. Ha pedig a *CNK* egyenes helyén egy második *genre*-ba tartozó görbe van, akkor ennek és a forgó *GL* vonalzónak a metszése egy harmadik *genre*-ba tartozó görbét ír le. „És bármely más módon képzeljük is el egy görbe vonal leírását, feltéve, hogy ez a görbe azok közé tartozik, amelyeket geometrikusoknak neveztünk, mindig lehet találni ezzel a módszerrel egy egyenletet a meghatározására."[40]

Szerkesztés és algebrai egyenlet között ezáltal az eljárás által definiált „algebrai mozgás" létesít kapcsolatot. Az algebrai mozgás által definiált görbe egyetlen pontjának a meghatározásához sincs szükség infinitézimális processzusra, aproximációra. Ez az algebrai mozgás biztosítja, hogy a *Geometrie*-ben elkerülhető a végtelen aproximáció fogalmával dolgozó infinitézimális matematika, hogy megmaradhatunk a görbék leírásában az egyenletpolinomoknál, ahol még az érintőszerkesztés és a maximum-minimum feladatok, ezek a tipikusan infinitézimális módszereket kívánó problémák is megoldhatók aproximáció nélkül, limes fogalom nélkül, anélkül, amit közönségesen infinitézimális alatt értenek.

Ugyanis az algebrának „nem kell támaszkodnia a differenciálhányados analízisbeli fogalmára (amelynek értelmezése a határérték nem-algebrai fogalmának segítségével történik), mert tisztán algebrai úton is definiálni tudjuk a polinom deriváltját, s e fogalom számunkra szükséges tulajdonságait is bevezethetjük ilyen módon."[41]

Ezt végezték el DESCARTES és HUDDE: a polinom deriváltjának számukra szükséges tulajdonságait vezették le tisztán algebrai úton. Ezért központi jelentőségű az algebrai mozgás, amelyik az egyenletpolinom és a görbe közötti összefüggést létesíti. S ezért tesz olyan nagy lépést visszafelé SCHOOTEN, amikor kiküszöböli az antik módszerek segítségével ezt a mozgást. Hiába fordítja le SCHOOTEN az antik definíciókat az új betűszámtani nyelvre, ebből nála nem lesz a DESCARTES értelmében vett algebra. DESCARTES algebrája ugyanis nem betűszámtan. A *Geometrie* egy új, nagy jelentőségű fogalom, a deriválható egyenletpolinom és a vele való munka szabályainak a megteremtését tartalmazza. Az algebrai egyenletekkel leírható görbék világa ez, ahol általános szabály adható meg ezen görbék érintőjének a szerkesztésére és a görbéket előállító egyenletek szélső értékének a számítására. Ebből a szemszögből tekintve a *Geometrie* nem az első analitikus geometriai értekezés, hanem az *egész* újkori függvénykalkulus nélkülözhetetlen *előfeltétele.*

Semmit nem szóltunk még a *Geometrie* első könyvéről, amelyben DESCARTES bevezeti egy vonalszakasz és a mennyiség közötti megfelelkezést. Általában ezt szokták a *Geometrie* legnagyobb tettének és lényegének tartani. Azonban meg-

[40] Geometrie. *OEuvres*, ADAM—TANNERY-féle kiadás. VI. kötet, 395.
[41] SZELE Tibor: i. m. 216.

található ez már FERMAT-nál is, ezzel dolgozott HARRIOT, VIÈTE, ez húzódott meg BRADWARDINE és ORESME elképzelései mögött, ezt használta PAPPOSZ, APOLLONIOSZ, ezen alapul az euklidészi *Elemek* egész második könyve. Úgyszólván az egész görög geometria az általános mennyiség vonalszakaszként való interpretálásán alapul. DESCARTES itt csak alkalmasabb jelölést vezetett be, s a matematika végső soron nem jelöléseken múlik. A vonalszakaszt és a valósszámot DESCARTES sem veszi egyenlőnek. Ehhez ugyanis a határérték fogalma szükséges, legalább abban az intuitív formában, ahogyan NEWTON bevezette. NEWTON az első, aki, ha bizonyítani még nem is tudja, egyenlőséget tesz vonalszakasz és — intuitíve felfogott — valósszám közé. DESCARTES-nál talán éppen a mennyiség fogalma a legantikabb. De *ahogyan* ezzel az antik vonalszakasz-mennyiség fogalommal dolgozik, a vele elvégezhető öt algebrai művelettel és (implicite) az egyenlőségjellel definiálva azt, annak nincs párja előtte az antikvitásban és utána a modern algebráig. Ez az első könyv jelentősége: definiálja az algebra eredményeit és módszerét, mint ami „a matematika olyan tényein alapul, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók".[42]

Nem maga a mennyiség, hanem a vele való munka definiálása DESCARTES matematikájának a lényege. Ezért jut geometriájában olyan fontos szerep a mozgásnak. SCHOOTEN antik aszimptota-keretekbe szorított és DESCARTES szabad mozgásban leírt görbéje jól szemlélteti a két geometria közötti különbséget. A görög elmélet kész, statikus formákkal dolgozik, a cartesianus geometria a mozgást kihasználó kinematikus eljárás. A görög geometriában a görbék tulajdonságait mindig bizonyos egyenesek szabják meg, a görög geometria, amelyik nem ismeri még intuitíve sem a „folytonosság" fogalmát, nem képes magukhoz a görbékhez férkőzni, mindig egyenesek kereteibe kényszeríti őket. DESCARTES a mozgás zseniális használatával intuitíve biztosítja geometriája számára a „folytonosság" *követelményének* a teljesülését. Ezáltal közvetlen utat talál a görbék egy nagy csoportjához. Még számos görbét kirekeszt a geometriából és hosszú utat kell megtenni a matematikának, amíg ezek is általánosságban tárgyalhatók lesznek. Többek között explicite tisztázni kell, mit jelent a „folytonosság". De azokra a görbékre, amelyek egy speciális mozgásféleség segítségével algebrai egyenletekre vezethetők vissza, egységes matematikai módszerek adhatók meg. Ezek a módszerek egymással összefüggő, zárt egészet képeznek, jól definiált matematikai rendszert. Ez a felfogás és eljárásmód lett az újkori matematika mintaképe. Ahogyan J. E. HOFMANN írta, DESCARTES nyitotta meg az utat a modern matematikai gondolkozási mód felé.

(Beérkezett: 1964. XII. 10.)

[42] Uo. 9.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ÉS STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSEK (I)*

Írta: ULF GRENANDER

TARTALOMJEGYZÉK

* Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Matematik*, **1** (1950), 195—277. A magyar nyelvű fordítás itt közölt része az eredeti dolgozat 1—4. fejezetét, tartalomjegyzékét, és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza.

A fordító megjegyzése: Bár U. GRENANDER cikke még 1950-ben jelent meg, ma sem veszítette el aktualitását. Munkája úttörő jelentőségű ezért orosz nyelvre is lefordították és 1961-ben könyv alakban kiadták. Jelen fordításnál az orosz nyelvű szöveget is figyelembe vettük, ily módon bizonyos kisebb pontatlanságokat sikerült kijavítani. A. M. JAGLOM — az orosz nyelvű kiadáshoz írt — kiegészítésének magyar nyelvű fordítását jelen folyóirat egy későbbi számában közöljük.

Bevezetés

A jelen disszertáció célja egyrészt az, hogy megmutassa a statisztikai fogalmak és következtetési módszerek alkalmazhatóságát sztochasztikus folyamatokra, másrészt pedig az, hogy ilyen jellegű gyakorlatilag alkalmazható módszereket alakítson ki a következtetések speciális eseteinek a tanulmányozása útján.

Idősorozatok statisztikai feldolgozását már nagyon régóta végzik több-kevesebb rendszerességgel, de — ellentétben a véges minták esetével — nincsen egységes elmélet. A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó kiterjedt irodalom csak ritkán érintette a következtetések kérdéseit. Másrészt az idősorozatok adatainak feldolgozására irányuló kísérleteket látszólag nem nagyon befolyásolta a sztochasztikus folyamatok elmélete. Ez különösen érvényes a folytonos időparaméterek esetére, amellyel a következő fejezetekben elsősorban foglalkozni fogunk. A jelen disszertációban vizsgált problémák tárgyalása CRAMÉR „*Mathematical methods of statistics*" című munkájának általános elvén alapul: a statisztikai módszereket a valószínűségszámítás szigorú matematikai elméletére alapítjuk.

Az első két fejezetben rövid áttekintést adunk a sztochasztikus folyamatokkal és a statisztikai következtetéssel kapcsolatos néhány alapvető tényről. A harmadik és a negyedik fejezet a hipotézisvizsgálat kérdésével foglalkozik, az ötödik fejezet a becslés-elmélettel. Végül a hatodik fejezetben röviden megmutatjuk, hogy az idősorozatok előrejelzése és filtrálása közel áll a hipotézis-vizsgálat és a becsléselmélet feladataihoz, és hasonló módszerekkel kezelhető.

1. fejezet

SZEMELVÉNYEK A SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ELMÉLETÉBŐL

1. 1. Valószínűségi mérték. Tekintsük az alábbi tulajdonságokkal rendelkező Ω absztrakt teret, melynek pontjait ω-val jelöljük. Az Ω térben legyen megadva a halmazoknak egy olyan Borel-féle mezeje, amely Ω-t is tartalmazza. Ezen a Borel-mezőn legyen értelmezve egy teljesen additív, nem negatív P halmazfüggvény, amelyre $P(\Omega)=1$. Ekkor azt mondjuk, hogy P valószínűségi mérték az Ω térben. Néha célszerű a mérték teljessé tétele azáltal, hogy minden olyan halmazt, amely része egy nulla-mértékű (a Borel-mezőhöz tartozó) halmaznak, mérhetőnek tekintünk nulla mértékkel.

Ha $f(\omega)$ az Ω-térben definiált és P-re nézve mérhető valós függvény, akkor valószínűségi változónak nevezzük. Az $\mathbf{E}$ várható-érték-operátor definíciója

$$\mathbf{E}f(\omega)=\int_{\Omega} f(\omega)\,dP(\omega),$$

ha $f(\omega)$ integrálható P-re vonatkozóan. A komplex valószínűségi változók bevezetéséhez szükséges módosítások nyilvánvalóak.

Legyen $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega)$ az Ω térben definiált n valószínűségi változó. Ha fennáll a valós tengelyen választott bármely $E_1, E_2, \ldots, E_n$ Borel-halmazokra, hogy

$$P\{f_1(\omega)\in E_i;\ i=1,2,\ldots,n\}_{\omega}=\prod_{i=1}^{n} P\{f_i(\omega)\in E_i\}_{\omega},$$

akkor a valószínűségi változókat függetleneknek mondjuk.

Legyen A tetszőleges mérhető halmaz és legyen $x_1(\omega), x_2(\omega), \ldots, x_n(\omega)$ n számú valószínűségi változó. Ha M olyan hengerhalmaza Ω-nak, amelyet az jellemez, hogy $(x_1(\omega), x_2(\omega), \ldots, x_n(\omega))$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátájú $R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-dimenziós euklideszi tér valamilyen mérhető halmazához tartozik, akkor létezik egy — és ekvivalenciától eltekintve csakis egy — $P(A|x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény, amely kielégíti a

$$P(AM)=\int_{M} P(A|x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dP(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

egyenletet minden a fenti tulajdonságokkal rendelkező M halmaz esetében (lásd Kolmogorov [1], p. 42). A $P(A|x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mennyiséget A feltételes valószínűségének nevezik $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-re nézve. Hasonló módon definiálják a feltételes várható értéket (lásd Kolmogorov [1]. p. 47). Ki lehet mutatni, hogy a feltételes valószínűségnek rendszerint ugyanazok a tulajdonságai, mint az abszolút valószínűségeknek. Legyen A adott halmaz. Ekkor fennáll majdnem minden $x_1, \ldots, x_n$ értékre

$$0\leq P(A|x_1, \ldots, x_n)\leq 1,$$

és még egyéb ilyen jellegű analógiák is vannak. Általában kimutatható, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén $P(A|x_1, \ldots, x_n)$ úgy definiálható, hogy majdnem biztosan valószínűségi eloszlás.

1.2. Sztochasztikus folyamatok. Legyen T az egész valós tengely, vagy annak egy része. Tegyük fel, hogy a T időpont-halmaz minden időpontjában megfigyelünk egy az időtől függő és valamilyen véletlen összetevőt magában foglaló mennyiséget. Ha ezt a kísérletet sokszor ismételjük, akkor egy, a T halmazon definiált függvénysokaságot kapunk. Az ilyen sokaság alapján idealizált fogalmat és vele együtt egy valószínűségi mértéket — amelyet alább ugyanebben a szakaszban pontosabban fogunk definiálni —, sztochasztikus folyamatnak nevezzük. A függvénysokaság egyes elemeit realizációnak vagy mintafüggvénynek nevezik. Ha szigorúbb módon akarjuk definiálni, hogy mit értünk sztochasztikus folyamaton, akkor ennek legalább háromféle lehetséges hozzáállási módja van. Tekintsük az észlelt mennyiséget rögzített t_0 időpontban. Nagyon sok ilyen kísérlet eredményét a szokásos módon valószínűségi változóval fejezhetjük ki, amelyet $x(t_0)$-lal jelölünk, elhagyva az ω jelet, amint ezt ilyen vonatkozásban szokták. Később látni fogjuk, hogy a valószínűségi változót célszerű egy absztrakt tér pontjaként felfogni; ez a tér természetesen nem azonos az Ω minta-térrel, amelyen a valószínűségi változót definiáltuk. Ha t_0 minden értéket felvesz T-ben, akkor a valószínűségi változóknak egy egyparaméteres seregét kapjuk, azaz az új absztrakt terünknek egy görbéjét. Ezt a görbét nevezzük ebben az esetben sztochasztikus folyamatnak.

A második lehetőséghez úgy jutunk, hogy egy realizációt rögzítünk és azt t függvényének tekintjük. Jelöljük ezt a realizációt ω-val, és a T halmazon definiált minden valós függvény által alkotott függvényteret jelöljük Ω-val. Ekkor a sztochasztikus folyamatot a valós függvények $x_\omega(t)$ seregeként definiálhatjuk, ahol ω paraméterként szerepel.

Ez a kettősség nyilván annak a ténynek a következménye, hogy a folyamat értéke két változónak a függvénye: a t időnek és az ω realizációnak. A definíció harmadik lehetőségét innen úgy kapjuk, hogy a folyamatot mint $f(t, \omega)$ kétváltozós függvényt definiáljuk, ahol rögzített t esetén $f(t, \omega)$ mérhető függvénye ω-nak, azaz valószínűségi változó.

1. 3. Sztochasztikus folyamatok mint valószínűségi változók seregei. A folyamatokat az első szempont szerint tekintve rendszerint az első két momentumuk segítségével írják le. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}x(t)^2 < \infty$ minden $t \in T$ esetén, és vezessük be az

$$m(t) = \mathbf{E}x(t)$$

$$r(s, t) = \mathbf{E}[x(s) - m(s)][x(t) - m(t)]$$

mennyiségeket. $m(t)$ elnevezése: *várható-érték függvény*; $r(s, t)$ elnevezése pedig *kovariancia-függvény*. Ha az eredeti folyamat helyett az $x(t) - m(t)$ folyamatot tekintjük, feltételezhetjük, hogy $m(t) = 0$.

Képezzünk minden

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i)$$

lineáris kombinációt valós c_i együtthatókkal és $t_i \in T$ értékekkel, és zárjuk le ezt a halmazt átlagban való konvergencia szerint. Ilyen módon egy $L_2(X)$ Hilbert-teret kapunk, ha a belső szorzatot az

$$(f, g) = \mathbf{E}fg$$

előírással definiáljuk. Innen látható, hogy a sztochasztikus folyamatok elméletében alkalmazhatók a Hilbert-tér módszerei; az első ilyen rendszeres vizsgálat KARHUNEN-től származik[1]. Bizonyos tekintetben célszerű komplex-értékű folyamatokat bevezetni, és a belső szorzatot az alábbi definícióval megadni

$$(f, g) = \mathbf{E}f\bar{g}.$$

Ha minden $z \in L_2(X)$ számára igaz, hogy az $\mathbf{E}zx(t)$ valós függvény Lebesgue-mérhető, akkor a folyamatot (K)-mérhetőnek nevezik. Ha továbbá minden $z \in L_2(X)$

[1] KARHUNEN előtt KOLMOGOROV nagy sikerrel alkalmazta ezt a módszert [Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, *Бюлл. Моск. Гос. Ун-та*, 2, № 6, 3—40 (1941).]

esetén $\mathbf{E}zx(t)$ LEBESGUE szerint integrálható T-ben, és a

$$\sup_{z\in L_2(X)} \frac{1}{\|z\|}\left|\int_T \mathbf{E}zx(t)\,dt\right|$$

kifejezés véges, akkor létezik egyetlen $X\in L_2(X)$ elem, amely kielégíti az

$$\mathbf{E}zX = \int_T \mathbf{E}zx(t)\,dt$$

egyenletet. A folyamatot ekkor T-ben (K)-integrálhatónak nevezik; X az $x(t)$ T-beli (K)-integrálja (lásd KARHUNEN [3], 5. tétel).

Ha $\|x(t)-x(t_0)\|$ folytonos függvénye t-nek a $t=t_0$ pontban, akkor a folyamatot középben folytonosnak mondjuk a $t=t_0$ pontban. Ha ugyanez fennáll minden $t_0\in T$ esetén, akkor a folyamatot középben folytonosnak nevezik T-n.

Tegyük fel, hogy a folyamat középben folytonos a véges (a, b) intervallumon. Ha $a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b$ és $\operatorname{Max}_\nu (t_\nu^n - t_{\nu-1}^n) \to 0$, amikor n végtelenhez tart, ki lehet mutatni, hogy az

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} x(t_\nu^n)(t_\nu^n - t_{\nu-1}^n)$$

kifejezés átlagban egy I valószínűségi változóhoz konvergál, amikor n a végtelenhez tart, függetlenül a t_ν^n pontok megválasztásától. Az I valószínűségi változót $x(t)$ (C)-integráljának nevezik az (a, b) intervallumon:

$$I = \int_a^b x(t)\,dt.$$

(lásd CRAMÉR [2], lemma 3.)

Ha $x(t)$ középben folytonos az (a, b) intervallumon, akkor nyilvánvalóan (K)-mérhető, és a Schwarz-féle egyenlőtlenség alkalmazásával belátható, hogy

$$\sup_{z\in L_2(X)} \frac{1}{\|z\|}\left|\int_T \mathbf{E}zx(t)\,dt\right|$$

véges. Így tehát a folyamat (K)-integrálható az (a, b) intervallumon, egyértelműen meghatározott K-integrállal. Mivel S_n és az I határérték az $L_2(X)$ Hilbert-térhez tartoznak, és mivel az átlagban való konvergencia maga után vonja a gyenge konvergenciát,

$$\mathbf{E}zI = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{E}zx(t_\nu^n)(t_\nu^n - t_{\nu-1}^n).$$

Mivel $\mathbf{E}zx(t)$ folytonos, tehát RIEMANN szerint integrálható, és így

$$\mathbf{E}zI = \int_a^b \mathbf{E}zx(t)\,dt,$$

ebben az esetben tehát a kétféle integrál-definíció egybeesik.

Tegyük fel, hogy a $Z(\lambda)$ folyamat $(-\infty<\lambda<\infty)$ várható értéke nulla és szórásnégyzete véges. Ha minden diszjunkt (λ_1, λ_2) és (λ_3, λ_4) intervallumpár esetén fennáll, hogy

$$\mathbf{E}[Z(\lambda_2)-Z(\lambda_1)][Z(\lambda_4)-Z(\lambda_3)] = 0,$$

akkor a $Z(\lambda)$ folyamatot *ortogonálisnak* nevezik. Ebben az esetben

$$r(\lambda, \lambda) = \mathbf{E}Z(\lambda)^2 = F(\lambda)$$

λ-nak nem-csökkenő függvénye. Legyen $f(\lambda)$ valós függvény, amelyre fennáll, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)^2 \mathrm{d}F(\lambda) < \infty$. Ebben az esetben definiálni lehet az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mathrm{d}Z(\lambda)$ integrált a RIEMANN—STIELTJES részletösszegekkel. (Lásd KARHUNEN [3]·) Hasonló megállapítások érvényesek komplex értékű ortogonális folyamatok esetén.

KARHUNEN ([3] 10. tétel, kissé általánosabb megfogalmazásban) a sztochasztikus folyamatok reprezentációjára a következő fontos tételt adta meg. Legyen $x(t)$ olyan folyamat, amely komplex értékeket vehet fel és várható értéke nulla, és legyen

$$r(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s, \lambda) f(t, \lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

ahol σ valamilyen mérték a valós tengelyen. Ennek a mértéknek legyen meg az a tulajdonsága, hogy az egész valós tengely megszámlálható összege véges σ-mértékű halmazoknak. Legyen $f(s, \lambda)$ négyzetesen integrálható σ szerint s minden értékére. Ekkor létezik olyan $Z(\lambda)$ ortogonális folyamat, hogy

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda)\, dZ(\lambda).$$

Tekintsünk olyan folyamatot, amely középben folytonos és várható értéke zérus. Ha az $r(s, t)$ kovariancia-függvény csupán az $s-t$ különbségtől függ, akkor a folyamatot tágabb értelemben stacionáriusnak nevezik. HINCSIN [1] jól ismert tétele szerint létezik olyan korlátos, nem csökkenő $F(\lambda)$ függvény, hogy

$$r(s, t) = r(s-t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda}\, dF(\lambda).$$

Ekkor magának a folyamatnak is létezik a KARHUNEN-tétel értelmében a fentivel analóg reprezentációja:

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) \\ \mathbf{E}|Z(\lambda)|^2 = F(\lambda), \end{cases}$$

(lásd CRAMÉR [3]), ahol $Z(\lambda)$ egy komplex ortogonális folyamat. A statisztikus ergodtétel értelmében (lásd HOPF [1]) az $\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} x(t)dt$ kifejezés átlagban konvergál egy $\dot{x}$ valószínűségi változóhoz, amikor T a végtelenhez tart.

$$\mathbf{E}|\dot{x}|^2 = F(+0)-F(-0),$$

így tehát annak, hogy $\dot{x}$ 1-valószínűséggel azonosan zérus legyen, szükséges és elegendő feltétele, hogy $\lambda=0$-nál ne legyen diszkrét spektrális tömeg.

Legyen $x(t)$ valós és középben folytonos az (a, b) véges intervallumon, zérus átlaggal és $r(s, t)$ kovariancia-függvénnyel. A kovariancia-függvény pozitív szemidefinit, és a

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b r(t, s)\varphi(s)\,ds$$

integrálegyenlet alapján MERCER tétele szerint az alábbi reprezentációhoz jutunk:

$$r(s, t) = \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu},$$

ahol a jobb oldali sor egyenletesen konvergál. Itt a $\varphi_\nu(t)$ függvények az integrálegyenlet sajátfüggvényei és a λ_ν értékek a megfelelő sajátértékek. Ekkor KARHUNEN-nek a sztochasztikus folyamatok reprezentációjára vonatkozó általános tételéből következik, hogy

$$x(t) = \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu(t)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

átlagban való konvergenciával minden $t\in(a, b)$ értékre (lásd KARHUNEN [1]). A z valószínűségi változókra érvényesek az alábbi összefüggések

$$\begin{cases} \mathbf{E}z_\nu = 0 \\ \mathbf{E}z_\nu z_\mu = \delta_{\nu\mu}. \end{cases}$$

Ha nem állítjuk kifejezetten az ellenkezőjét, a következőkben mindig feltételezzük, hogy az $r(s, t)$ mag nem elfajult, vagyis $\lambda_\nu<\infty$ minden ν-re.

Más típusú reprezentációhoz jutunk a következő úton. Ha $Z(\lambda)$ korlátos szórású ortogonális folyamat

$$\mathbf{E}|Z(\lambda)|^2<k, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

(korlátos ortogonális folyamat), definiáljuk az $\mathbf{E}|Z(\lambda)|^2$ nem csökkenő függvénynek megfelelő σ mértéket a szokásos módon. Mindazoknak a függvényeknek a halmaza, amelyek σ szerint négyzetesen integrálhatók a $(-\infty, \infty)$ tartományban, Hilbert-teret alkot, ha a szokásos négyzetes metrikát alkalmazzuk. Ebben a térben válasszunk egy $\{\varphi_\nu(\lambda);\ \nu=1, 2, \ldots\}$ teljes ortonormált függvényrendszert. Jelentse $\varepsilon_{\lambda_0}(\lambda)$ azt a függvényt, amelynek értéke 1, ha $\lambda\leqq\lambda_0$ és 0, ha $\lambda>\lambda_0$. Ekkor a rendszer teljessége miatt és a Parseval-féle összefüggés szerint érvényes

$$\sum_1^\infty (\varphi_\nu;\ \varepsilon_{\lambda_0})(\varphi_\nu;\ \varepsilon_{\lambda_1}) = (\varepsilon_{\lambda_0};\ \varepsilon_{\lambda_1}),$$

így tehát

$$\sum_1^\infty \int_{-\infty}^{\lambda_0} \varphi_\nu(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \int_{-\infty}^{\lambda_1} \varphi_\nu(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\mathrm{Min}(\lambda_0,\lambda_1)} d\sigma(\lambda).$$

Azonban $\mathbf{E}|Z(\min \lambda_0, \lambda_1)|^2$ az ortogonális folyamat $r(\lambda_0, \lambda_1)$ kovariancia-függvénye, tehát KARHUNEN tétele szerint létezik valószínűségi változóknak olyan $\{z_\nu\}$ sorozata, amelyre érvényes

$$\begin{cases} \mathbf{E}z_\nu = 0 \\ \mathbf{E}z_\nu \bar{z}_\mu = \delta_{\nu\mu} \\ Z(\lambda) = \sum_1^\infty z_\nu \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_\nu(\lambda)\, d\sigma(\lambda). \end{cases}$$

Tekintsük azt a különleges esetet, amikor σ a $(0, 1)$ intervallumon a Lebesgue-féle mérték, ezen az intervallumon kívűl pedig nulla. A $(0, 1)$ intervallumon az $\{e^{2\pi i\nu\lambda};\ \nu=0, \pm 1, \ldots\}$ függvényrendszer teljes ortonormált rendszert alkot, így az alábbi reprezentációhoz jutunk

$$Z(\lambda) = z_0\lambda + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' z_\nu \frac{e^{2\pi i\nu\lambda}-1}{2\pi\nu i}; \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

ahol a vessző a szummáció-jel mellett azt jelenti, hogy az összegezésnél a $\nu=0$ értéket ki kell hagyni. Normális folyamat esetében ez a Wiener-féle véletlen függvény (lásd PALEY—WIENER [1]).

Sztochasztikus folyamatok deriváltját az $\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$ hányadosnak akár erős, akár gyenge határértékeként lehet definiálni, amikor h nullához tart. Általában az utóbbi definíció a célszerű, ha lineáris differenciálegyenletekkel van dolgunk. Ilyen módon pl. ki lehet mutatni, hogy a

$$\frac{dx(t)}{dt} + \beta x(t) = \frac{dB(t)}{dt}$$

Langevin-féle egyenletnek, amelyben β állandó és $B(t)$ az Einstein—Smoluchovsky folyamat, az alábbi megoldása van

$$x(t) = e^{-\beta t}x(0) + e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta\tau}\, dB(\tau).$$

A differenciálegyenlet más interpretációja alapján ugyanezt a megoldást adta meg DOOB [4]. Miként ismeretes, így a stacionárius normális Markov-folyamathoz jutunk.

Eddig azt feltételeztük, hogy a szórás véges. Ha csupán annyit teszünk fel, hogy $\mathbf{E}|x(t)|^p < \infty$, $p \geqq 1$, akkor még mindig lehet hasonló módszereket alkalmazni. Képezzük az összes lineáris kombinációkat ugyanúgy, mint előzőleg és zárjuk le ezt a halmazt az erős konvergencia értelmében az

$$\|x-y\| = \sqrt[p]{\mathbf{E}|x-y|^p}$$

metrikának megfelelően. Így az X Banach-teret kapjuk. X nyilvánvalóan benne van $L_p(\Omega)$-ban. Sztochasztikus folyamatok integrálját definiálhatjuk a Banach-téren való integrálás Pettis [1] által kifejlesztett elmélete szerint. A folyamatot mérhetőnek nevezzük, ha minden $F \in \bar{X}$ lineáris funkcionál esetében $F[x(t)]$ Lebesgue szerint mérhető függvénye t-nek ($\bar{X}$ az X-hez adjungált tér). Ha létezik egyetlen olyan $I \in X$ elem, hogy

$$F(I) = \int_T F[x(t)]\, dt$$

minden $F \in \bar{X}$ esetén, akkor a folyamatot *integrálhatónak* nevezik I integrállal. Ha a fenti funkcionálok általános alakját használjuk (lásd pl. Banach [1]), akkor olyan integrálási módszerhez jutunk, amely $p=2$ esetében nyilvánvalóan a (K)-integráláshoz vezet.

Mivel a gyakorlati alkalmazásokban legtöbbször véges szórású folyamatok szerepelnek, és mivel az X-térben érvényes elméletet legnagyobb részben a Hilbert-térre vonatkozó elmélettel analóg módon lehet felépíteni, ezzel a problémakörrel nem foglalkozunk tovább.

1. 4. Sztochasztikus folyamatok mint valós függvények seregei. Az előző pont módszere szerint a folyamatot absztrakt térben fekvő görbeként fogják fel. A folyamat vizsgálatainál rendszerint csupán ennek a görbének a metrikus tulajdonságait használják fel, és nincsenek tekintettel a görbe pontjainak konkrét jelentésére. A módszert nagy sikerrel alkalmazták sok problémára, főleg lineáris feladatokra, de egyes esetekben a módszer nem kielégítő. Ez különösen akkor áll fenn, ha az egyéni realizációk tulajdonságait — például a folytonosságot és a mérhetőséget — kell vizsgálni. Ha következtetés jellegű megállapításokat kívánunk tenni, nyilván mindent fel kell használnunk, amit a folyamatról tudunk, és nem csupán a lineáris tulajdonságait. Ezért fogjuk a sztochasztikus folyamatot a legtöbbször olyan értelemben felfogni, amint azt Doob teszi több dolgozatában (lásd Doob [1], [3], [4]).

Legyen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ véges számú időpont T-ben és legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számok. Ekkor az

$$\{a_i \leqq x(t_i) < b_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}_\omega \in \Omega'$$

halmazt véges dimenziójú intervallumnak nevezzük Ω'-ben. Itt Ω' a T-n definiált összes valós függvények tere. Tegyük most fel, hogy minden véges dimenziójú intervallumnak meg van adva a valószínűsége valamilyen kompatibilis módon. Ekkor Kolmogorov [1] egy tétele szerint a valószínűségi mértéket ki lehet terjeszteni az összes véges dimenziójú intervallumok által származtatott Borel-mezőre. A mértéket teljessé tesszük az 1. 1-ben említett módon és az így kapott mértéket P'-vel jelöljük.

Annak érdekében, hogy tekinthessük a valószínűségét olyan halmazoknak is, amelyek lényegében a folyamatnak egy nem-megszámlálható időpont-halmazon vett értékeitől függenek — például minden folytonos vagy korlátos realizáció valószínűségét —, Doob a következő módon jár el. Legyen Ω olyan részhalmaza Ω'-nek, hogy $P'(\Omega)=1$. Ha $\Lambda = \Lambda'\Omega$, ahol Λ' mérhető P' szerint, akkor legyen definíció szerint $P(\Lambda) = P'(\Lambda')$. Ki lehet mutatni, hogy ez a definíció egyértelműen meghatároz egy mértéket. Ez az áttérés a P mértékről a P' mértékre annyit jelent, hogy kisebb, megfelelő függvényekből álló mintatérre szorítkozhatunk.

Ha létezik olyan $\Omega \subset \Omega'$ részhalmaz, hogy $P'(\Omega)=1$ és az $x(t, \omega)$ függvények $(\omega \in \Omega)$ mérhetőek a szokásos módon definiált szorzatmérték szerint az $\Omega \times T$ téren, akkor a folyamatot (D)-mérhetőnek nevezzük. Csak olyan folyamatokkal fogunk foglalkozni, amelyek középben folytonosak. Ha T az (a, b) véges intervallum, akkor a Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\int_T \int_\Omega |x(t, \omega)|\, dP\, dt < \infty,$$

ehát FUBINI tétele szerint $x(t)$ 1-valószínűséggel Lebesgue-mérhető és integrálható. Továbbá $\int_T x(t)\,dt$ mérhető függvény Ω-n, vagyis valószínűségi változó. Ezt a változót definiáljuk a folyamat (D)-integráljaként az (a, b) intervallumon. Ha $z(\omega)$ tetszőleges négyzetesen integrálható függvény Ω-n, FUBINI tételének alkalmazásával kimutatható, hogy

$$\mathrm{E}\left\{z \int_T x(t)\,dt\right\} = \int_T \mathrm{E} z x(t)\,dt,$$

ami magában foglalja, hogy a (D)-integrál megegyezik a (C)-integrállal és a (K)-integrállal, ha a folyamat középben folytonos. Ezt az azonosságot bizonyítani lehet jóval általánosabb feltételek esetén is.

Létezik néhány kritérium arra vonatkozóan, hogy valamely folyamat (D)-mérhető-e vagy sem. Az alábbi kritérium KOLMOGOROVtól származik (lásd AMBROSE [1]). Ahhoz, hogy az $x(t)$ folyamat (D)-mérhető legyen, szükséges és elegendő, hogy minden $\varepsilon > 0$ és majdnem minden t esetén

$$P\{|x(t+h) - x(t)| > \varepsilon\} \to 0,$$

amikor h nullához tart olyan halmazon, amely függhet t-től, de nem függhet ε-tól, és amelynek metrikus sűrűsége 1 a $h=0$ helyen. Ez a feltétel teljesül például ha a folyamat középben folytonos.

Másik ilyen irányú eredmény — amelyet a későbbiekben alkalmazni fogunk — a következő. Ω'-ben definiálunk egy időben homogén és független növekményű folyamathoz tartozó P' normális mértéket a következő módon:

$$P'\{a < x(t-\delta) - x(t) < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\delta}}\,dx; \qquad \delta > 0.$$

Legyen Ω_c az összes folytonos függvények halmaza. Ekkor $P'(\Omega_c) = 1$ és Ω_c egy mérhető folyamat mintatere (lásd DOOB [1]).

Ha $x(t)$ normális folyamat zérus várható értékkel és $\sigma^2 e^{-\beta|t-s|}$ $(\beta > 0)$ kovariancia-függvénnyel (vagyis az 1.3.-ban a Langevin-egyenlettel kapcsolatosan vizsgált folyamat), akkor az alábbi transzformációt lehet végrehajtani (lásd DOOB [4]:

$$y(t) = \sqrt{t}\, x\left(\frac{1}{2\beta} \log t\right); \qquad t > 0.$$

Ez a folyamat az előző bekezdésben leírt típusú, tehát maga $x(t)$ mérhető folyamat Ω_c mintatérrel.

Bevezetjük a T_h eltolás operátorát, amely a mintatér egyes $x(t)$ függvényeire hat:

$$T_h x(t) = x(t+h).$$

Ha minden S halmazra igaz, hogy $P(S) = P(T_h S)$ minden h esetén, akkor a folyamatot *szűkebb értelemben stacionáriusnak* nevezzük. Legyen továbbá $x(t)$ (D)-mérhető. Ha $f(\omega)$ integrálható Ω-ban, akkor BIRKHOFF ergod-tétele szerint a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\omega_t)\, dt = \hat{f}(\omega)$$

határérték majdnem biztosan létezik. $\hat{f}(\omega)$ mérhető és integrálható Ω-ban (lásd pl. HOPF [1]).

Ha minden integrálható $f(\omega)$ esetében fennáll, hogy $\hat{f}(\omega)$ azonosan állandó 1-valószínűséggel, akkor a folyamatot *ergodikusnak* nevezik.

Az olyan mérhető halmazokat, amelyek minden h-ra kielégítik a $T_h A = A$ feltételt, az eltolás operátorra vonatkozóan *invariánsnak* nevezik. Ha a folyamatnak megvan az a tulajdonsága, hogy minden invariáns halmaz valószínűsége vagy 1 vagy 0, akkor a folyamatot *metrikusan tranzitívnek* nevezik. Ki lehet mutatni, hogy az ergodicitás és a metrikus tranzitivitás egyenértékű fogalmak a mintatér véges mértéke miatt (lásd HOPF [1]).

A harmadik szempontnak megfelelően a folyamatot $x(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ kétváltozós függvényként fogják fel, adott valószínűségi mértékkel valamely Ω téren. DOOB és AMBROSE kimutatták, hogy ez a felfogás lényegében egyenértékű a DOOB-féle módszerrel. Egyes esetekben az egyik módszer alkalmasabb lehet a másiknál, azonban mindenkor a célszerűség dönti el, hogy melyik módszer használata előnyösebb.

2. fejezet

A STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSELMÉLET ALAPFOGALMAI

2. 1. A próbák hatékonysági tulajdonságai. Ebben a fejezetben néhány alapvető tényt ismertetünk a statisztikai következtetésekről véges dimenziójú minták esetére. Tekintsük az észlelt $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékeket olyan X sokaság reprezentánsainak, amelynek P_0 valószínűség-eloszlását a H_0 hipotézis teljesen meghatározza. Az ilyen hipotézist, amely a valószínűségeloszlást teljesen meghatározza, **egyszerű hipotézisnek** nevezik.

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek észlelése után ki akarunk jelenteni valamit a H_0 hipotézis igaz vagy hamis voltáról. Az ilyen célra alkalmazott módszerektől azt kívánjuk, hogy az esetek többségében végül is helyes eredményt adjanak. Tegyük fel, hogy kiválasztottunk egy mérhető W tartományt, amelynek valószínűsége $P_0(W) = \varepsilon$. Ha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$, akkor a hipotézist elvetjük, az ellenkező esetben pedig elfogadjuk. A W tartományt ε nagyságú kritikus tartománynak nevezik. Világos, hogy abban az esetben, amikor a H_0 hipotézis igaz, ε valószínűséggel vetjük el. Ilyen módon az ε nagyságú különféle kritikus tartományoknak megfelelően végtelen sok próbát képezhetünk. Annak érdekében, hogy ezek közül egyet ki lehessen választani, NEYMAN és PEARSON egy alternatív H_1 hipotézis felállítását javasolják. A fent bevezetett ε számot nevezik az elsőfajú hiba valószínűségének. A hibaelkövetésnek egy másik módja az, ha elfogadjuk a H_0 hipotézist, amikor a H_1 hipotézis igaz. Ennek a hibának a $P_1(W^*)^2$ valószínűségét nevezik a másodfajú hiba valószínűségének. Ha rögzítettük az ε számot, akkor most már azt az ε nagyságú W tartományt keressük, amelyre $P_1(W^*)$ minimális. Ilyen módon nyilván egy optimális jellegű próbához jutunk.

Rendszerint olyan esetekkel foglalkoznak, amikor a P_0 és P_1 valószínűségeloszlásokat az $f_0(x_1, ..., x_n)$, illetőleg az $f_1(x_1, ..., x_n)$ sűrűségfüggvényekkel adják meg. Fontos szerepet játszik az alábbi módon definiált likelihood hányados („valószerűség" hányados):

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, n_n)}{f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Az a halmaz, amelyen mind a számláló, mind a nevező zérus, mindkét hipotézis szerint nulla-valószínűségű, így tehát ezen a halmazon a likelihood hányadost nyugodtan választhatjuk pl. 1-nek. Ezek után ki lehet mutatni, hogy a fent kifejtett értelemben a legjobb kritikus tartományt

$$W = \{l(x_1, \dots, x_n) \geqq c\}_{x_1, \dots, x_n}$$

adja, ahol a c állandót úgy kell megválasztani, hogy $P_0(W) = \varepsilon$ legyen. Arra a triviális nehézségre vonatkozóan, amikor ennek az egyenletnek nincsen megoldása, hivatkozunk CRAMÉR [4] könyvére. Azt az esetet, amikor a valószínűségeloszlások diszkrét típusúak, ugyanilyen módon lehet tárgyalni.

Az alternatív hipotézis rendszerint nem egyszerű, hanem függhet pl. egy valós α paramétertől, amikor is maga H_0 az $\alpha = \alpha_0$ értéknek felel meg. Ekkor minden rögzített α értékhez kapunk egy legjobb kritikus tartományt a H_0 és H_α hipotézisekre vonatkozóan. Ha mindezek a kritikus tartományok egybeesnek, akkor az illető próbát egyenletesen leghatékonyabbnak nevezik. Sajnos, ez az eset majdnem sohasem fordul elő, ha $\alpha - \alpha_0$ mind pozitív, mind negatív lehet (lásd KENDALL [1]).

Ekkor rendszerint az összes lehetséges próbáknak csupán egy részét veszik tekintetbe, mégpedig az eléggé nyilvánvaló $P(W; \alpha) \geqq P(W; \alpha_0) = \varepsilon$ feltételeknek megfelelő próbákat. Az ilyen próbát torzítatlannak nevezik. Az összes torzítatlan próbák osztályában keresünk olyan ε-szinthez tartozó W tartományt, amelyre, rögzített α esetén $P(W^*, \alpha)$ minimális. Ki lehet mutatni, hogy bizonyos regularitási feltételek teljesülése esetén a

$$W = \{f(x_1, \dots, x_n; \alpha) \geqq cf(x_1, \dots, x_n; \alpha_0) + c_1 f_1(x_1, \dots, x_n; \alpha_0)\}_{x_1, \dots, x_n}$$

próbának, ahol

$$f_1(x_1, \dots, x_n; \alpha) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n; \alpha)}{\partial \alpha},$$

megvan a kívánt tulajdonsága.

Megtörténhetik, hogy minden α esetében ugyanazt a W tartományt kapjuk. Ekkor a megfelelő próbát egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbának nevezik.

[2] *-gal a kiegészítő tartományt jelöljük.

Bonyolultabb szituációk esetén — például ha egy összetett hipotézist egy másik összetett hipotézissel hasonlítunk össze —, utalunk KENDALL [1] könyvére, amelyben részletes irodalomjegyzék is található. A következő fejezetekben meg fogjuk mutatni a fenti módszereknek a sztochasztikus folyamatokra való alkalmazási lehetőségeit.

Ha ezeknek a fogalmaknak a végtelen-dimenziós esetre való átvitelével kapcsolatos nehézségeket megoldottuk, akkor — legalábbis elvben — könnyű az eredmények kiterjesztése az összetett hipotézisekre ugyanolyan módon, mint a véges dimenziójú minták esetén.

2. 2. A becslések néhány kívánatos tulajdonsága. Tegyük most fel, hogy a H_α hipotéziseket teljesen jellemzik a hozzájuk tartozó P_α valószínűségeloszlások, ha α ismeretes. Az α valós paraméter értékei valamilyen A intervallumba esnek. A mintának olyan $\alpha^*(x_1, \ldots, x_n)$ függvényét akarjuk előállítani, amelyet α becslésére lehet alkalmazni. Az α^* kívánt tulajdonságainak a jellemzésére többféle út kínálkozik.

Tartson a minta n dimenziója a végtelenhez. Ezzel növekszik a sokaságról szerzett információnk, és ha az $\alpha_n^*(x_1, \ldots, x_n)$ sorozat sztochasztikusan konvergál (P_α szerint) α-hoz minden $\alpha \in A$ esetén, akkor a becslést (vagy helyesebben a becslés-sorozatot) konzisztensnek nevezik.

Tekintet nélkül erre az aszimptotikus viselkedésre, valamely $\alpha^*(x_1, \ldots, x_n)$ becslés jóságát rögzített n esetén jellemezhetjük első két momentumának segítségével. Ha minden $\alpha \in A$ esetén

$$\mathbf{E}_\alpha \alpha^* = \alpha,$$

akkor azt mondjuk, hogy α^* torzítatlan becslése α-nak. Ez kétségtelenül kívánatos tulajdonság.

Valamely becslés ingadozását a valódi érték körül az $\mathbf{E}_\alpha(\alpha^* - \alpha)^2$ kifejezéssel mérhetjük. Legyen

$$\mathbf{E}_\alpha \alpha^* = \alpha + b(\alpha),$$

ahol a $b(\alpha)$ értékét α^* torzításának nevezik. Ekkor bizonyos regularitási feltételek teljesülése esetén ki lehet mutatni, hogy (lásd CRAMÉR [4]),

$$\mathbf{E}_\alpha(\alpha^* - \alpha)^2 \geqq \frac{\left(1 + \dfrac{db}{d\alpha}\right)^2}{\mathbf{E}_\alpha\left(\dfrac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Ha α^* torzítatlan, akkor az α^* becslés efficienciáját (hatékonyságát) az alábbi módon definiáljuk:

$$e(\alpha^*) = \frac{1}{\mathbf{D}^2(\alpha^*)\mathbf{E}_\alpha\left(\dfrac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2};$$

ekkor

$$0 \leqq e(\alpha^*) \leqq 1.$$

Ha $e(\alpha^*) = 1$, akkor a becslést *efficiensnek* nevezzük. Be lehet bizonyítani, hogy ha két α_1^* és α_2^* becslés mindegyike efficiens, akkor majdnem biztosan $\alpha_1^* = \alpha_2^*$.

Ha a becslések valamely α_n^* sorozatát tekintjük, megtörténhetik, hogy kedvezők a tulajdonságai, noha az első két momentum nem létezik. A következő definíció (WALD [1]) számol ezzel a lehetőséggel. A becslést *aszimptotikusan efficiensnek* nevezik, ha létezik valószínűségi változóknak olyan u_n sorozata, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\alpha u_n = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\alpha u_n^2 = 1$$

és

$$\sqrt{\mathbf{E}\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2}(\alpha_n^* - \alpha) - u_n \to 0, \qquad n \to \infty,$$

P_α szerinti sztochasztikus konvergencia értelmében, minden $\alpha \in A$ esetén.

A becslések előállításának legfontosabb módszere a *„maximum likelihood”* módszer. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független valószínűségi változók, amelyek mindegyikének $f(x; \alpha)$ a sűrűségfüggvénye, akkor képezzük az

$$f(x_1, \ldots, x_n; \alpha) = f(x_1; \alpha) f(x_2; \alpha) \ldots f(x_n; \alpha)$$

együttes sűrűségfüggvényt. Válasszuk α becsléseként a

$$\frac{\partial \log f(x_1, \ldots, x_n; \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

egyenletnek egy nem azonosan állandó $\alpha^*(x_1, \ldots, x_n)$ megoldását. Bizonyos regularitási feltételek teljesülése esetén ki lehet mutatni, hogy ennek az egyenletnek van megoldása, amely P_α szerint sztochasztikusan konvergál α-hoz minden $\alpha \in A$ esetében, ha n a végtelenhez tart. Ez a becslés aszimptotikusan normális és aszimptotikusan efficiens. Hasonló eredmény érvényes diszkrét típusú eloszlások esetében is.

2. 3. Konfidencia-tartományok. Az előző szakasz pont-becslésekkel foglalkozik. Sok esetben azonban nem kívánunk az ismeretlen paraméterhez egyetlen értéket hozzárendelni, hanem valamely intervallumot vagy még általánosabb tartományt, amely adott ε esetén a paraméter valódi értékét $1-\varepsilon$ valószínűséggel magában foglalja minden $\alpha \in A$ esetében. Ezt az alábbi módon lehet végrehajtani (lásd CRAMÉR [4]).

α minden rögzített értékéhez választunk egy olyan $S(\alpha) \in X$ halmazt, hogy $P_\alpha[S(\alpha)] = 1-\varepsilon$ legyen. Minden $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ minta esetében

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \subset A$$

jelölje az összes olyan α által alkotott halmazt, amelyekre az $A \times X$ szorzattér $(\alpha; x_1, \ldots, x_n)$ elemére érvényes az

$$(\alpha; x_1, \ldots, x_n) \in D$$

kapcsolat, ahol a $D \subset A \times X$ halmazt mindazon $(\alpha; x_1, \ldots, x_n)$ elemek halmazaként definiáljuk, amelyek számára $(x_1, \ldots, x_n) \in S(\alpha)$. Ekkor minden α esetén fennáll

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in S(\alpha)\} = \{\alpha \in \Sigma(x_1, \ldots, x_n)\},$$

tehát

$$P_\alpha[\alpha \in \Sigma(x_1, \ldots, x_n)] = 1-\varepsilon.$$

A $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ tartományt az α $1-\varepsilon$ megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia-tartományának nevezik. Abban az esetben, ha ez a tartomány intervallum A-ban, a paraméter konfidencia-intervallumának nevezik.

3. fejezet

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMAT MEGFIGYELHETŐ KOORDINÁTÁI

3. 1. A következőkben megkíséreljük a statisztikai következtetések klasszikus módszereit átvinni a sztochasztikus folyamatokra. Tekintsük elsősorban azt az esetet, amikor egyetlen α paramétert kell megbecsülni. Az előző fejezetek alapján ennek nyilván az a természetes módja, hogy a megfigyelt realizációnak egy függvényét vesszük és ezt a függvényt úgy igyekszünk megválasztani, hogy az α paraméternek bizonyos értelemben jó becslését képezze. Mint függvény függvénye, a becslés a mintatéren definiált funkcionál. A funkcionálok elméletét azonban főleg a lineáris és egyes nagyon speciális típusú funkcionálokra dolgozták ki. Néhány később tárgyalandó kivételtől eltekintve a mi problémánknak nincsen semmi olyan sajátsága, amely arra késztetne, hogy ezekre a különleges típusú funkcionálokra szorítkozzunk. Ezért egészen általános funkcionál-típusokat fogunk tekinteni és csupán néhány természetes regularitási feltételt szabunk.

Az információt a sztochasztikus folyamatnak egy vagy több valós függvény alakjában való megfigyelése útján szerezzük. A mi céljainkra előnyös lesz ezt az információt lehetőség szerint valós számok valamilyen $(c_1, c_2, \ldots)$ sorozatává átalakítani, ami maga után vonja, hogy az összes valós függvények Ω' terénél kisebb számosságú mintatérrel dolgozhatunk. Ez lesz az eset azoknál a problémáknál, amelyekkel foglalkozni fogunk. Ennek a sorozatnak a megválasztása csak részben matematikai kérdés. Tekintetbe kell ugyanis venni, hogy a szóban forgó gyakorlati alkalmazásnál ténylegesen a realizációknak milyen tulajdonságait kell megfigyelni. A c_i számokat a folyamat megfigyelhető koordinátáinak nevezik. Látni fogjuk, hogy nagyon fontos ezeket a koordinátákat olyan módon megválasztani, hogy megkönnyítsük a becslések, próbafüggvények stb. felépítését.

Tekintsük a következő fontos esetet. Legyen $x(t)$ normális folyamat, amelyet a véges $T=(a, b)$ időintervallumban figyelünk meg. A folyamat középben folytonos $m(t)$ várható értékkel és $r(s, t)$ kovariancia-függvénnyel. Amint ezt az 1. 3. szakaszban láttuk,

$$x(t) = m(t) + \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu(t)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

átlagban való konvergenciával minden $t \in T$-re. λ_ν és $\varphi_\nu(t)$ a

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b r(s, t)\varphi(t)\, dt$$

integrálegyenlet sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátfüggvények, továbbá

$$\begin{cases} \mathbf{E} z_\nu = 0 \\ \mathbf{E} z_\nu z_\mu = \delta_{\nu\mu}. \end{cases}$$

Ebben az esetben a z_ν valószínűségi változók nyilvánvalóan normális eloszlásúak. mert a T-hez tartozó időpontokban vett $x(t)$ értékek véges lineáris kombinációi, A folyamatot most a következő véletlen függvénnyel reprezentáljuk

$$x(t,\omega) = x(t, z_1, z_2, \dots) = m(t) + \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu(t)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

ahol a jobb oldalon szereplő mennyiségeknek ugyanazok a tulajdonságai, mint az előzőkben. KAC és SIEGERT [1] kimutatták, hogy a sor majdnem minden $(t,\omega)\in\in T\times\Omega$ esetén konvergens. Bebizonyították továbbá, hogy a kifejezés a T intervallumon vett Lebesgue-mérték szerint átlagban konvergál majdnem biztosan. Ha most vesszük a négyzetesen integrálható $f(t)\in L_2(T)$ függvényt, akkor képezhetjük az $\int_T f(t)x(t)\,dt$ integrált, amely mérhető függvény Ω-ban, mert a véletlen függvény mérhető $T\times\Omega$-ban.

Most az adott realizációban foglalt információt célszerű módon akarjuk reprezentálni. Ennek nyilván természetszerű módja a realizációnak valamilyen teljes ortonormált függvényrendszer szerinti $(c_1, c_2, \dots)$ Fourier-együtthatóit képezni. Különösen előnyös a $\{\varphi_\nu(t)\}$ rendszert választani ilyen rendszerként, amennyiben az teljes. Ellenkező esetben teljessé tesszük egy másik ortonormált rendszernek a szokásos módon való hozzácsatolásával. Ezeknek a c_i együtthatóknak az eloszlását könnyen meg lehet határozni, ha csupán véges számú együtthatót tekintünk. Ezután a szokásos eljárással kiterjesztjük a mértéket egy Borel-mezőre. A $(c_1, c_2, \dots)$ ismeretében teljesen ismerjük a realizációt, amennyiben két, legfeljebb nulla-mértékű ponthalmazon eltérő függvényt azonosnak tekintünk. Gyakorlati szempontból ez teljesen elegendő.

Olyan esetekben, amikor a kovariancia-függvény egyszerű alakú, célszerű lehet a koordináták egy más rendszerének az alkalmazása. Tekintsük a normális stacionárius Markov-folyamatot. Az 1. 4. szakaszban láttuk, hogy a folyamat mintateréül az összes T-n értelmezett folytonos valós függvények halmazát lehet választani. Legyen $\{t_n\}$ egy T-ben mindenütt sűrű, megszámlálható ponthalmaz. Ekkor 1-valószínűséggel teljesen meg van határozva a realizáció, ha ismerjük az $x(t_n)=c_n$ értékeket minden n esetén. Látni fogjuk, hogy a megfigyelhető koordináták rendszerének ilyen megválasztása előnyös a folyamat vizsgálata számára.

A folyamatok fontos típusa a hozzárendelt valószínűségi változókkal megadott pont-folyamatok osztálya. Mivel az ilyen folyamatok természetes mintatere a lépcsős függvények sokasága, az alábbi koordinátarendszer látszik megfelelőnek. Ha a realizáció alakja:

$$\begin{cases} x(t) = x_0, & \text{ha} \quad a \leqq t \leqq t_1, \\ x(t) = x_i, & \text{ha} \quad t_i < t \leqq t_{i+1}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ x(t) = x_n, & \text{ha} \quad t_n < t \leqq b, \end{cases}$$

ahol $n, t_1, \dots, t_n, x_0, \dots, x_n$ valószínűségi változók, akkor az $\{n; x_0, t_1, x_1, \dots, t_n, x_n\}$ sorozatot választjuk kordinátákul. Ha azt kívánjuk, hogy a koordináták alakjukban ne különbözzenek az előzőkben használtaktól, hozzájuk csatolhatjuk valós számok egy végtelen sorozatát. Ezeknek valamilyen egyszerű valószínűségeloszlást tulajdonítunk, például úgy, hogy mind függetlenek legyenek egymástól és az összes előző koordinátáktól (kivéve természetesen az n számtól), és hogy mindegyik normális eloszlású legyen (0,1) paraméterekkel. Ez csupán formális egyszerűsítés. A továbbiakban csupán azzal az esettel foglalkozunk, amikor $P(n<\infty)=1$.

Amikor más típusú folyamatokat vizsgálunk, nyilván előfordulhat, hogy valamilyen másfajta koordinátákat lesz célszerű bevezetnünk. A továbbiakban feltételezzük, hogy a realizációból kapott információt ki lehet fejezni valós számok megszámlálható sorozatával. Némelykor a koordinátákra az $(x_1, x_2, \ldots) = \omega \in \Omega$ jelölést fogjuk alkalmazni, ahol az ω szimbólum a realizációból nyert egész információt képviseli. Ekkor az Ω teret koordináta-térnek nevezzük.

4. fejezet

A STATISZTIKAI HIPOTÉZISEK ELLENŐRZÉSÉNEK KÉRDÉSE

4. 1. Leghatékonyabb próba létezése. A következőkben elkezdjük vizsgálni a sztochasztikus folyamattal kapcsolatos statisztikai hipotézisek ellenőrzésének a kérdését. Ebben a fejezetben meg fogjuk mutatni, hogy a NEYMAN—PEARSON-elmélet alapgondolatát és módszereit át lehet vinni erre az esetre. Egyszerű hipotézisnek fogjuk nevezni az Ω koordináta-téren a valószínűségi mértéket teljesen meghatározó hipotézist.

Vizsgáljunk egy P_0 valószínűségi mértéknek megfelelő egyszerű H_0 hipotézist, szembeállítva egy alternatív egyszerű H_1 hipotézissel, amely a P_1 valószínűségi mértéknek felel meg. A klasszikus elmélethez hasonlóan olyan ε-szintű kritikus tartományt akarunk szerkeszteni, amelyre a másodfajú $P_1(W^*)$ hiba a lehető legkisebb. Véges dimenziójú próbák esetében ezt olyan tartomány kiválasztásával értük el, amelyben a likelihood-függvény a lehető legnagyobb volt. A jelen esetben nem rendelkezünk sűrűségfüggvényekkel az Ω térben, de olyan hasonló fogalmat fogunk bevezetni, amely céljainknak ugyanúgy megfelel. A klasszikus esetben rendszerint csak olyan problémákkal foglalkoznak, amelyeknél a valószínűség-eloszlások vagy folytonos, vagy diszkrét típusúak. A következőkben látni fogjuk, hogy ez a korlátozás lényegtelen.

Analitikai eszközként az additív halmazfüggvények LEBESGUE-féle felbontását és a RADON—NIKODYM tételt fogjuk céljainkra alkalmazni (lásd SAKS [1]). A mi problémánkra alkalmazva ezek a következő állításnak felelnek meg: létezik olyan nulla P_0-mértékű H halmaz és olyan Ω-ban P_0-ra nézve integrálható $f(\omega)$ nemnegatív függvény, hogy minden mérhető $E \subset \Omega$ halmaz esetében

$$P_1(E) = \int_E f(\omega)\, dP_0(\omega) + P_1(EH).$$

Az $f(\omega)$ függvény itt nyilvánvalóan ugyanazt a szerepet játssza, mint a klasszikus esetben a likelihood-függvény. Képezzük az

$$S_k = \{f(\omega) \geqq k\}_\omega + H$$

halmazt, és határozzuk meg a k állandót úgy, hogy $P_0(S_k) = \varepsilon$ legyen. Azt a triviális nehézséget, amely akkor merül fel, ha ennek az egyenletnek nincs megoldása, ugyanolyan módon lehet elhárítani, mint a klasszikus esetben (lásd CRAMÉR [4]), ezért tételezzük fel, hogy létezik megoldás. Ekkor érvényes a következő

TÉTEL: *Az S_k kritikus tartománynak megfelelő próba a H_0 hipotézis leghatékonyabb ε-szintű próbája a H_1 hipotézis ellenében.*

A tétel bizonyítására válasszunk egy másik E halmazt, amely eleget tesz a $P_0(E)=\varepsilon$ feltételnek, és képezzük a következő halmazokat:

$$EH^*=A,\quad EH=B,\quad H^*\{f(\omega)\geqq k\}=F.$$

Ekkor

$$P_1(F) = P_1(F-FA)+P_1(FA) \geqq kP_0(F)-kP_0(FA)+P_1(FA) =$$
$$= kP_0(A)-kp_0(FA)+P_1(FA) \geqq P_1(A-AF)+P_1(FA) = P_1(A)$$

és

$$P_1(S_k) = P_1(F)+P_1(H) \geqq P_1(A)+P_1(B) = P_1(E),$$

ami tételünket bizonyítja.

4. 2. A leghatékonyabb próba szerkesztése. A fenti tétel egzisztencia-tétel jellegű. Most meg akarjuk mutatni, hogyan található meg H és $f(\omega)$. Hogy a bizonyítást ne bonyolítsuk, tegyük fel, hogy a véges koordináták terében a valószínűségeloszlások mind folytonos típusúak, és így a két hipotézisnek megfelelően a $g_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, illetőleg a $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sűrűségfüggvény határozza meg őket. Ugyanazokat az eredményeket be lehet bizonyítani akkor is, ha a koordináták diszkrét eloszlásúak, vagy ha e két egyszerű eset kombinációjával van dolgunk. Vizsgáljuk meg a felmerülő három lehetőséget.

A: Tegyük fel, hogy $P_1(H)=0$. *Ezt nevezzük a reguláris esetnek.* Válasszunk tetszőleges $C_n\subset\Omega$ hengerhalmazt $B_n\subset R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bázissal, azaz úgy, hogy az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pont az adott $B_n\subset R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ halmazhoz tartozzék. Legyen

$$l_n(\omega) = \frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{g_0(x_1, \dots, x_n)}.$$

Ha ebben a kifejezésben mind a számláló, mind a nevező eltűnik, legyen $l_n(\omega)=1$. Ekkor

$$\int_{C_n} f(\omega)\, dP_0(\omega) = P_1(C_n) = \int_{B_n} l_n(x_1, \dots, x_n) g_0(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

A feltételes várható érték definíciója szerint (lásd az 1. 1. szakaszt) fennáll

$$l_n(x_1, \dots, x_n)=\mathbf{E}_0[f(\omega)|x_1, \dots, x_n]$$

P_0-ra nézve majdnem biztosan. LÉVY egy tétele szerint, melyet DOOB általánosított (lásd DOOB [3]), fennáll

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{g_0(x_1, \dots, x_n)}$$

P_0-ra nézve majdnem biztosan, tehát P_1-re nézve is majdnem biztosan, mert $P_1(H)=0$.

B: Tegyük fel, hogy $0<P_1(H)<1$. Mivel $P_0(H)=0$ mindig fennáll, a H halmazt be lehet fedni a koordinátatér diszjunkt, véges dimenziójú I_ν intervallumainak megszámlálható összegével úgy, hogy $P_0\left\{\sum_1^\infty I_\nu\right\}<\varepsilon$. Mivel $\sum_1^\infty P_1(I_\nu)\leqq 1$, választhatunk olyan N egész számot, hogy $\sum_{N+1}^\infty P_1(I_\nu)<\varepsilon$. Ilyen módon

$$P_1\{H;\, l_n(\omega)\leqq k\}\leqq P_1\left\{\sum_1^\infty I_\nu;\, l_n(\omega)\leqq k\right\}\leqq$$

$$\leqq P_1\left\{\sum_1^N I_\nu;\, l_n(\omega)\leqq k\right\}+\varepsilon.$$

Válasszuk az n számot nagyobbra, mint az $I_1, I_2, \dots, I_n$ intervallumok meghatározásánál használt legnagyobb index. Ekkor

$$C=\left\{\sum_1^N I_\nu;\, l_n(\omega)\leqq k\right\}\subset\Omega$$

olyan hengerhalmaz, amelynek C' bázisa benne van $R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$-ben, és így

$$P_1\{H;\, l_n(\omega)\leqq k\}\leqq\varepsilon+\int_{C'} l_n(x_1,\dots,x_n)g_0(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n\leqq$$

$$\leqq\varepsilon+kP_0\left\{\sum_1^N I_\nu\right\}\leqq\varepsilon(1+k).$$

Mivel adott k esetén ezt az értéket tetszőlegesen kicsivé lehet tenni, bebizonyítottuk, hogy $l_n(\omega)$ P_1-re nézve sztochasztikusan konvergál $+\infty$-hez H-ban, amikor n végtelenhez tart.

Tekintsük az

$$F(S)=\frac{P_1(SH^*)}{P_1(H^*)}=\int_S\frac{f(\omega)}{P_1(H^*)}dP_0(\omega)$$

valószínűségi mértéket, ami megengedett, mert $P_1(H^*)>0$. Ekkor $F(S)=P_1(S|H^*)$, és $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontban az F mérték sűrűségfüggvénye

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{g_1(x_1,\dots,x_n)P_1(H^*|x_1,\dots,x_n)}{P_1(H^*)},$$

mert

$$\int_B\frac{P_1(H^*|x_1,\dots,x_n)}{P_1(H^*)}g_1(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=\frac{P_1(H^*B)}{P_1(H^*)}=F(B),$$

ami a feltételes valószínűség definíciója szerint minden $B\subset R_n(x_1,\dots,x_n)$ halmazra érvényes. Mivel a P_0 hipotézisnek az alternatív F hipotézis ellenében végzett ellenőrzése már reguláris, alkalmazhatjuk a fenti eredményt, tehát majdnem biztosan

$$\frac{f(\omega)}{P_1(H^*)}=\lim_{n\to\infty}\frac{g_1(x_1,\dots,x_n)}{g_0(x_1,\dots,x_n)}\,\frac{P_1(H^*|x_1,\dots,x_n)}{P_1(H^*)}.$$

De ha $\omega \in H^*$, akkor P_1-re nézve majdnem biztosan

$$\lim_{n\to\infty} P_1(H^*|x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

(lásd Doob [1]), vagyis bebizonyítottuk, hogy H^*-ban P_1-re nézve majdnem biztosan

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_1(x_1, \ldots, x_n)}{g_0(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Ha van olyan $E \subset H^*$ halmaz, amelyre ez nem érvényes, akkor erre, mint most láttuk, $P_1(E)=0$. De ha $P_0(E)=0$, akkor alkalmazhatjuk a fentebbi eredményünket P_1 és P_0-ra (felcserélt sorrendben), amiből következik, hogy P_0-ra nézve E-ben sztochasztikus konvergenciával

$$\frac{g_0(x_1, \ldots, x_n)}{g_1(x_1, \ldots, x_n)} \to +\infty,$$

vagyis

$$\frac{g_1(x_1, \ldots, x_n)}{g_0(x_1, \ldots, x_n)} \to 0,$$

(P_0-ra nézve E-ben sztochasztikus konvergenciával). Azonban E-ben szükségszerűen P_0-ra nézve majdnem biztosan $f(\omega)=0$, tehát E-ben P_0-ra nézve sztochasztikus konvergenciával

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_1(x_1, \ldots, x_n)}{g_0(x_1, \ldots, x_n)}.$$

C: Tegyük fel végül, hogy $P_1(H)=1$. Erre az esetre kimutattuk, hogy $l_n(\omega)$ P_1-re nézve sztochasztikusan $+\infty$-hez konvergál. Könnyen belátható, hogy $l_n(\omega)$ P_0-ra nézve sztochasztikusan $f(\omega)$-hoz tart.

Az eredményeket összefoglalva:

P_0-ra nézve: $l_n(\omega)$ sztochasztikusan $f(\omega)$-hoz tart;
P_1-re nézve: $l_n(\omega)$ sztochasztikusan $f(\omega)$-hoz tart H^*-ban;
P_1-re nézve: $l_n(\omega)$ sztochasztikusan $+\infty$-hez tart H-ban.

Most a szokásos módon kiválaszthatunk egy $l_{n_\nu}(\omega)$ részsorozatot, amely mindkét mértékre nézve majdnem biztosan $f(\omega)$-hoz tart H^*-ban, illetőleg $+\infty$-hez tart H-ban. Így tehát

$$S_k = \{\lim_{\nu\to\infty} l_{n_\nu}(\omega) \geqq k\}_\omega.$$

Az alkalmazások esetén több okból csupán ritkán lesz szükség ilyen részsorozatok kiválasztására. Az alkalmazások egyik típusánál a koordinátákat úgy lehet megválasztani, hogy független valószínűségi változók legyenek, és ekkor a „0 vagy 1" törvény alapján az $l_n(\omega)$ konvergenciájának a valószínűsége 0 vagy 1 lesz. Így tehát vagy a reguláris esettel, vagy az egészen szinguláris esettel van dolgunk. Másik fontos esetet képeznek a pontfolyamatok; ezeknél $l_\nu(\omega)$ független ν-től, mihelyt ν nagyobb mint n, a folyamat első koordinátája; a sorozat konvergenciájával tehát itt sem merül fel semmi nehézség. A továbbiakban csaknem minden esetben a reguláris típussal fogunk foglalkozni.

4. 3. Próbák összetett alternatívák esetére. Az előző szakaszokban megmutattuk, hogyan kell a leghatékonyabb tartományt kiválasztani, ha egyszerű hipotézist akarunk ellenőrizni másik egyszerű hipotézis ellenében. A gyakorlatban azonban bonyolultabb feladatok merülnek fel. Ezeknek a feladatoknak a megoldására különféle típusú kritikus tartományokat javasoltak. Bármilyen nehezek is ezek a kérdések, *világos, hogy a legkedvezőbb kritikus tartományok fogalmának a sztochasztikus folyamatok esetére való átvitelével kapcsolatos fő nehézséget a* 4. 1—4. 2. *szakaszokban megoldottuk.* Ezért csupán két esettel akarunk még foglalkozni.

Tegyük fel, hogy megint egy egyszerű H_0 hipotézist akarunk ellenőrizni, de most már az egyszerű H_α alternatív hipotézisek egész seregével szemben. Itt α egy valós paraméter, amelyet úgy lehet normálni, hogy $\alpha=0$ megfeleljen H_0-nak.

Rögzítsük az α paramétert és keressük meg a legjobb $S_\alpha \subset \Omega$ kritikus tartományát H_0-nak H_α-val szemben, megadott ε-szinten. Ha a tekintetbe vehető minden α értékre ugyanazt az S tartományt kapjuk, a próbát *egyenletesen leghatékonyabbnak* nevezzük. Sajnos, ez ritkán fordul elő, kivéve néhány „egyoldalú alternatíva" esetét, amikor α értékeinek az előjele csak egyféle lehet.

A klasszikus esetben ilyenkor néha találni lehet egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbát. Nem nehéz belátni, hogyan lehet ezt az eljárást a mi esetünkre alkalmazni a 4. 1.—4. 2. szakaszok eredményeinek a felhasználásával. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a H szinguláris rész hiányzik. Ha ekkor a $\frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}$ derivált majdnem biztosan létezik és egyenletesen korlátos,

$$\left|\frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}\right| < F(\omega)$$

minden α-ra (ahol $F(\omega)$ P_0-ra nézve integrálható), akkor kritikus tartományként az

$$S=\left\{f(\omega,\alpha)\geqq c+c_1\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\right\}_\omega$$

halmazt választhatjuk. Feltesszük, hogy ez a halmaz független α-tól, és hogy a c és c_1 állandókat úgy lehet megválasztani, hogy a

$$\begin{cases} P_0(S)=\varepsilon \\ \left(\dfrac{\partial P_\alpha(S)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}=0 \end{cases}$$

egyenletek kielégüljenek.

Ha ez esetben E ugyanolyan szintű torzítatlan tartomány, akkor

$$P_\alpha(S-ES)=\int\limits_{S-ES} f(\omega,\alpha)\,\mathrm{d}P_0(\omega)\geqq cP_0(S-ES)+$$

$$+c_1\left(\frac{\partial P_\alpha(S-ES)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}=cP_0(E-ES)+c_1\left(\frac{\partial P_\alpha(E-ES)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\geqq P_\alpha(E-ES)$$

és

$$P_\alpha(S)\geqq P_\alpha(E).$$

Így tehát S csakugyan az egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan tartomány.

4. 4. Próbák a normális folyamat átlagára vonatkozó hipotézisek ellenőrzésére. A kapott eredményeket most az alábbi feladatra alkalmazzuk. Legyen $x(t)$ az a megadott $r(s, t)$ kovariancia-függvénnyel rendelkező normális folyamat, amellyel a 3. 1. szakaszban foglalkoztunk. Ellenőrizni akarjuk a

$$H_0:\ \mathbf{E}_0 x(t) = m_0(t)$$

hipotézist a

$$H_1:\ \mathbf{E}_1 x(t) = m_1(t)$$

alternatív hipotézissel szemben.

A 3. 1. szakaszban ismertetett eljárásnak megfelelően a folyamat megfigyelhető koordinátáiként a következő mennyiségeket választjuk:

$$x_\nu = \int_a^b x(t)\varphi_\nu(t)\,dt; \quad y_\nu = \int_a^b x(t)\psi_\nu(t)\,dt; \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Itt $\varphi_\nu(t)$ a folyamathoz tartozó, $r(s, t)$ maggal bíró integrálegyenlet sajátfüggvényeiből alkotott ortonormált rendszer. A legtöbb gyakorlati esetben az $r(s, t)$ mag pozitív definit, tehát a $\{\varphi_\nu(t)\}$ rendszer teljes. Megtörténhetik azonban, hogy a rendszer nem teljes; ekkor egy másik $\{\psi_\nu(t)\}$ ortonormált rendszert csatolunk hozzá, amely reá ortogonális és vele együtt teljes ortonormált rendszert alkot. Közvetlenül belátható, hogy az y_ν mennyiségek normális eloszlásúak az alábbi paraméterekkel:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i y_\nu = \displaystyle\int_a^b m_i(t)\psi_\nu(t)\,dt; & (i=0,1). \\ \mathbf{D}_i y_\nu = 0; \quad (i=0,1). \end{cases}$$

Ha létezik olyan ν egész szám, amelyre $\mathbf{E}_0 y_\nu \neq \mathbf{E}_1 y_\nu$, akkor kritikus tartományként az

$$S = \left\{\int_a^b x(t)\psi_\nu(t)\,dt = \mathbf{E}_1 y_\nu\right\}$$

halmazt választhatjuk, és ekkor $P_0(S) = 0$ és $P_1(S) = 1$. *Ez tehát a teljesen szinguláris eset, és itt egyetlen realizáció alapján* 1*-valószínűséggel el tudjuk dönteni, hogy melyik hipotézis az igaz.*

A következőkben ezt az esetet kizárjuk és feltételezzük, hogy minden ν-re $E_0 y_\nu = E_1 y_\nu$. Ekkor csak az x_ν mennyiségeket kell tekintetbe venni. Ezek eloszlásai független normális eloszlások az alábbi paraméterekkel:

$$H_0: \begin{cases} \mathbf{E}_0 x_\nu = a_\nu^0 \\ \mathbf{D}_0^2 x_\nu = \dfrac{1}{\lambda_\nu} \end{cases} \qquad H_1: \begin{cases} \mathbf{E}_1 x_\nu = a_\nu^1 \\ \mathbf{D}_1^2 x_\nu = \dfrac{1}{\lambda_\nu}, \end{cases}$$

ahol $a_\nu^i = \int_a^b m_i(t)\varphi_\nu(t)dt$. A megfelelő sűrűségfüggvények R_n-ben:

$$g_0(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_1^n \lambda_\nu (x_\nu - a_\nu^0)^2}$$

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_1^n \lambda_\nu (x_\nu - a_\nu^1)^2},$$

tehát

$$l_n(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n \lambda_\nu[(a_\nu^1)^2-(a_\nu^0)^2] - \sum_1^n x_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)\lambda_\nu}.$$

Tegyük fel először, hogy

$$\sum_1^\infty \lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2 < \infty.$$

Legyen

$$z_\nu = -\frac{1}{2}\lambda_\nu[(a_\nu^1)^2-(a_\nu^0)^2]-\lambda_\nu x_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1),$$

ekkor

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 z_\nu = -\frac{1}{2}\lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2 \\ \mathbf{D}_0^2 z_\nu = \lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_1 z_\nu = \frac{1}{2}\lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2 \\ \mathbf{D}_1^2 z_\nu = \lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2. \end{cases}$$

KOLMOGOROV ismert tétele alapján ebből következik, hogy $\sum_1^\infty z_\nu$ majdnem biztosan konvergál mind P_0-ra nézve, mind pedig P_1-re nézve. *Így tehát ez a reguláris eset,* és majdnem biztosan

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_1^n z_\nu}.$$

Célszerű ezt más alakban kifejezni. Legyen

$$f_n(t) = \sum_1^n (a_\nu^0-a_\nu^1)\lambda_\nu\varphi_\nu(t),$$

akkor

$$l_n(\omega) = e^{-\int_a^b f_n(t)\left[x(t)-\frac{m_0(t)+m_1(t)}{2}\right]dt},$$

és így a 4. 1. szakasz eredménye alapján *a H_0 hipotézis ellenőrzésére az alternatív H_1 hipotézissel szemben az alábbi leghatékonyabb kritikus tartományt kapjuk:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\left[x(t)-\frac{m_0(t)+m_1(t)}{2}\right]dt \leqq k.$$

Tegyük most fel, hogy $\sum_1^\infty \lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2=\infty$. Vezessük be a

$$t_n(\omega) = \int_a^b f_n(t)\left[x(t)-\frac{m_0(t)+m_1(t)}{2}\right]dt$$

jelölést. A Csebisev-féle egyenlőtlenségből, és abból, hogy $\mathbf{E}_0 t_n = \frac{1}{2}\Sigma\lambda_\nu(a_\nu^0-a_\nu^1)^2\to\infty$, következik, hogy nagy n-ek esetén

$$P_0(t_n \leqq a) = P_0(t_n - \mathbf{E}_0 t_n \leqq a - \mathbf{E}_0 t_n) \leqq P_0(|t_n - \mathbf{E}_0 t_n| \geqq |a - \mathbf{E}_0 t_n|) \leqq$$

$$\leqq \frac{\sum_1^n \lambda_\nu (a_\nu^0 - a_\nu^1)^2}{\left[a - \frac{1}{2}\sum_1^n \lambda_\nu (a_\nu^0 - a_\nu^1)^2\right]^2}.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala itt $n \to \infty$ esetén minden a-ra nullához tart. Így tehát $n \to \infty$ esetén $l_n(\omega) = e^{-t_n(\omega)}$ P_0-ra nézve sztochasztikusan 0-hoz tart. Hasonlóképpen

$$P_1(t_n \geqq a) = P_1(t_n - \mathbf{E}_1 t_n \geqq a - \mathbf{E}_1 t_n) \leqq P_1(|t_n - \mathbf{E}_1 t_n| \geqq |a - \mathbf{E}_1 t_n|) \leqq$$

$$\leqq \frac{\sum_1^n \lambda_\nu (a_\nu^0 - a_\nu^1)^2}{\left[a + \frac{1}{2}\sum_1^n \lambda_\nu (a_\nu^0 - a_\nu^1)^2\right]^2}.$$

A jobb oldal itt is $n \to \infty$ esetén minden a-ra nullához tart. Így tehát $n \to \infty$ esetén $l_n(\omega)$ P_1-re nézve sztochasztikusan $+\infty$-hez tart. A 4. 2. szakasz eredménye alapján ebből közvetlenül belátható, hogy $P_0(H) = 0$ és $P_1(H) = 1$, *tehát megint a teljesen szinguláris esetet kaptuk.*

A becsléselméletet tárgyaló 5. fejezetben folytatni fogjuk ennek a példának a vizsgálatát és explicit kifejezést fogunk megadni. Érdemes megjegyezni, hogy a szinguláris eset két eltérő alakban mutatkozott. Az első esetben már véges számú koordináta vizsgálatakor adódott. A második eset viszont lényegesen függött egy végtelen sok koordinátát tartalmazó sorozat konvergenciájának a kérdésétől.

4. 5. Folytatás: összetett alternatívák. Az összetett hipotézisek vizsgálatára áttérve csupán a reguláris esetre fogunk szorítkozni. Hasonlítsuk össze az alábbi hipotéziseket:

$$\begin{cases} H_0\colon \ \mathbf{E}_0 x(t) = 0, \\ H_1\colon \ \mathbf{E}_\alpha x(t) = m_\alpha(t). \end{cases}$$

Mivel $\sum_1^\infty \lambda_\nu a_\nu^2(\alpha) < \infty$, az α egyes értékeinek megfelelő legjobb kritikus tartományok alakja a fentiek szerint

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n x_\nu \lambda_\nu a_\nu(\alpha) \geqq c(\alpha).$$

Könnyen belátható, hogy egyenletesen leghatékonyabb tartományt csak úgy kaphatunk, ha

$$a_\nu(\alpha) = k(\alpha) \cdot a_\nu,$$

ahol a $k(\alpha)$ függvény állandó előjelű. Ha ez fennáll, a

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) x(t)\, dt \geqq c$$

kritériumot kapjuk, ahol $f_n(t)=\sum_1^n a_\nu\lambda_\nu\varphi_\nu(t)$, és feltesszük, hogy $k(\alpha)>0$ (a $k(\alpha)<0$ esetben $\geqq$ jel helyett $\leqq$ jelet kell használni). Ennek a próbának tehát egyoldalú a jellege, és a próba egyenletesen leghatékonyabb az olyan alternatívákkal szemben, amelyekre $k(\alpha)>0$ (vagy a másik esetben $k(\alpha)<0$).

Most egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbát akarunk keresni az alábbi feltételekkel

$$\begin{cases} H_0: \ \mathbf{E}_0 x(t) = 0, \\ H_1: \ \mathbf{E}_\alpha x(t) = \alpha\cdot a(t). \end{cases}$$

Itt nyilvánvalóan

$$\frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha} = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\sum_1^\infty \lambda_\nu a_\nu^2+\alpha\sum_1^\infty x_\nu\lambda_\nu a_\nu}\left\{-\alpha\sum_1^\infty \lambda_\nu a_\nu^2+\sum_1^\infty x_\nu\lambda_\nu a_\nu\right\}.$$

Vezessük be az $X=\sum_1^\infty x_\nu\lambda_\nu a_\nu$ valószínűségi változót, amely normális eloszlású. Ekkor egy $|\alpha|<1$ esetén érvényes felső korlátot kapunk:

$$\left|\frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}\right| < ke^{|X|}\left\{\sum_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu+|X|\right\}.$$

Mivel a jobb oldalnak létezik várható értéke, a 4. 3. szakasz feltételei teljesülnek. Az ott leírt módszer alkalmazásával az

$$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2+\alpha X} \geqq C+c_1X$$

kritikus tartományt kapjuk. Ugyanúgy, mint a megfelelő klasszikus esetben, ez megadja az egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbát:

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)x(t)\,dt\right| \geqq k.$$

4. 6. A próbafüggvény létezése és meghatározása. Mivel $x(t)$ majdnem biztosan négyzetesen integrálható, azért majdnem biztosan

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)x(t)\,dt = \int_a^b f(t)x(t)\,dt,$$

feltéve, hogy $f_n(t)$ négyzetes átlagban egy $f(t)\in L_2(T)$ függvényhez konvergál. Ilyen módon igen célszerű alakú próbát kapnánk. Sajnos ez az eset nem mindig következik be. $f_n(t)$ négyzetes átlagban való konvergálásának szükséges és elegendő feltétele a RIESZ—FISCHER-tétel szerint $\sum_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu^2<\infty$. Ha ez a feltétel teljesül, akkor az $r(s,t)$ kovariancia-függvény bilineáris előállításának alkalmazásával az alábbi összefüggést kapjuk

$$\int_a^b r(s,t)f(s)\,ds = \sum_1^\infty a_\nu\varphi_\nu(t),$$

ahol a jobb oldali sor egyenletesen konvergál minden $t \in T$ esetén. Azonban nyilvánvalóan

$$\int_a^b \varphi_\nu(t)\left[\sum_1^\infty a_\nu \varphi_\nu(t) - a(t)\right] dt = 0$$

minden ν esetén. Ha a $\{\varphi_\nu(t)\}$ függvényrendszer nem volna teljes, akkor — mint az előzőkben — kiegészíthetjük egy $\{\psi_\nu\}$ ortonormált rendszer hozzácsatolásával. Ha valamilyen ν esetén

$$\int_a^b \psi_\nu(t)\left(\sum_1^\infty a_\nu \varphi_\nu(t) - a(t)\right] dt = -\int_a^b \psi_\nu(t) a(t)\, dt \neq 0,$$

akkor tekintsük az

$$S_\alpha = \left\{\int_a^b \psi_\nu(t) x(t)\, dt = \alpha \int_a^b \psi_\nu(t) a(t)\, dt\right\}_\omega$$

tartományt. Közvetlenül belátható, hogy $P_\beta(S_\alpha) = 0$, ha $\alpha \neq \beta$ és hogy $P_\alpha(S_\alpha) = 1$. Mivel a szinguláris esetet kizártuk, és a reguláris esetben majdnem minden $t \in T$ esetén

$$a(t) = \sum_1^\infty a_\nu \varphi_\nu(t),$$

következik, hogy

$$\int_a^b r(t, s) f(s)\, ds = a(t)$$

majdnem minden $t \in T$ esetén. A kovariancia-függvény tulajdonságainak következményeképpen a bal oldal t-nek folytonos függvénye, és $a(t)$ szintén folytonos függvény, mert középben folytonos folyamatnak a várható-érték függvénye. Az egyenlőség tehát érvényes minden $t \in T$ esetén.

Ha ennek az integrálegyenletnek van négyzetesen integrálható $f(t)$ megoldása, akkor közvetlenül belátható, hogy

$$\int_a^b f(t) \varphi_\nu(t)\, dt = a_\nu \lambda_\nu, \quad f(t) = \sum_1^\infty a_\nu \lambda_\nu \varphi_\nu(t).$$

Innen a Riesz—Fischer tétel értelmében $\sum_1^\infty a_\nu^2 \lambda_\nu^2 < \infty$. Így tehát *a négyzetesen integrálható legjobb $f(t)$ próbafüggvény létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy az*

$$\int_a^b r(t, s) f(s)\, ds = a(t)$$

integrálegyenletnek legyen négyzetesen integrálható megoldása. Próba-függvényként a megoldásnak a $\{\varphi_\nu\}$ függvényrendszer által kifeszített altérre való projekcióját vesszük. *A vizsgált kérdést tehát visszavezettük arra a feladatra, hogy a várható-érték függvénynek megtaláljuk egy „forrásszerű" előállítását a kovariancia-függvény segítségével.*

A legérdekesebb eset természetesen az $a(t)=1$ eset, különösen, ha a folyamat stacionárius. Tekintsük az $x(t)$ stacionárius folyamatot; ekkor intuitive nyilvánvaló, hogy ha a folyamat „nagyon regulárisan" viselkedik, például t szerint analitikus (ami azt jelenti, hogy $r(t)$ analitikus a $t=0$ pont környezetében), akkor rendszerint nem létezik a fenti értelemben egyszerű típusú legjobb próba. A kovariancia-függvény spektrális előállítása,

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF(\lambda)$$

útján, az abszolút integrálhatóság figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b r(t-s)f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda)\,dF(\lambda),$$

ahol

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b e^{-it\lambda}f(t)\,dt.$$

Mivel $r(z)$ analitikus $|z|<r$ esetén valamilyen pozitív r értékre, tudjuk, hogy analitikus az $|I(z)|<r$ sávban (lásd LÉVY [1]). Ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda)\,dF(\lambda) = 1$$

minden valós t esetén. Mivel $\varphi(0)=\int_a^b f(t)dt=\sum_1^{\infty} a_\nu^2\lambda_\nu>0$, ezért minden valós t-re érvényes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda)\,dF_1(\lambda) = 0,$$

ahol

$$F_1(\lambda) = F(\lambda)-\frac{\varepsilon(\lambda)}{\varphi(0)}.$$

Most ugyanannak az approximációs módszernek a felhasználásával, amelyet KARHUNEN alkalmazott ([3], 64—65 o.), kimutatható, hogy $F(\lambda)$-ra nézve majdnem mindenütt $\varphi(\lambda)=0$, kivéve esetleg a $\lambda=0$ pontban. De mivel $\varphi(\lambda)$ egy nem-azonosan eltűnő egész függvény (mert olyan függvény Fourier-integrálja, amely csupán véges intervallumon különbözik nullától), azért zérushelyei csak diszkrét halmazt alkothatnak, tehát $F(\lambda)$ csak lépcsős függvény lehet:

$$F(\lambda) = \sum_{\lambda_\nu<\lambda} F_\nu,$$

ahol $\lambda_0=0$ írható (az itt szereplő λ_ν értékek természetesen nem azonosak az integrál-egyenlet sajátértékeivel). Ha tehát a folyamat spektruma bármilyen abszolút folytonos vagy szinguláris komponenst tartalmaz, akkor nem létezik a fenti típusnak megfelelő legjobb próba. Ha azonban tiszta pontspektrum, akkor képezzük az (a, b)-n négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terének azt a Λ_2 alterét, amelyet az

$$\{e^{it\lambda_\nu}, a \leqq t \leqq b, \nu \neq 0\}$$

elemek feszítenek ki. A λ_ν frekvenciák nem helyezkedhetnek el olyan sűrűn, hogy Λ_2 a konstans 1 függvényt tartalmazza, mert különben

$$1 = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_1^n c_\nu^n e^{it\lambda_\nu}$$

és

$$0 < \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n c_\nu^n \int_a^b e^{-it\lambda_\nu} f(t)\,dt = 0$$

volna.

Ha $1 \notin \Lambda_2$, akkor felírható

$$1 = \xi(t) + \eta(t),$$

ahol $\xi(t) \in \Lambda_2, \eta(t) \perp \Lambda_2$, és $\eta(t) \not\equiv 0$. Legyen most $f(t) = \eta(t)$. Akkor

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \overline{[\xi(t) + \eta(t)]}\eta(t)\,dt = \int_a^b |\eta(t)|^2\,dt > 0$$

és

$$\int_a^b r(t-s) f(s)\,ds = \sum_0^\infty F_\nu e^{it\lambda_\nu} \int_a^b e^{-it\lambda_\nu}\eta(t)\,dt = F_0 \int_a^b |\eta(t)|^2\,dt \equiv \text{const.}$$

A továbbiakban még vissza fogunk térni hasonló kérdésekre, a becsléselmélettel kapcsolatban.

4. 7. Próba a kovariancia-függvény szorzó tényezőjére normális folyamat esetén. Normális folyamatok esetén még egy más típusú hipotézis a következő. Tegyük fel, hogy ismeretes a kovariancia-függvény egy multiplikatív állandó erejéig. Legyen

$$\begin{cases} H_0\colon \mathbf{E}_0 x(t) = 0; \ \mathbf{E}_0 x(s)\cdot x(t) = r(s, t). \\ H\ \colon \mathbf{E}_\sigma x(t) = 0; \ \mathbf{E}_\sigma x(s)\cdot x(t) = \sigma^2 r(s, t); \ \sigma^2 \neq 1. \end{cases}$$

Ugyanazokkal a koordinátákkal mint az előbb, a következő sűrűségfüggvényeket kapjuk $R_n(x_1, \ldots, x_n)$-ben:

$$\begin{cases} g_0(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n x_\nu^2 \lambda_\nu} \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n \lambda_\nu \frac{x_\nu^2}{\sigma^2}}, \end{cases}$$

továbbá

$$l_n(\omega) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n x_\nu^2 \lambda_\nu \left[\frac{1}{\sigma^2}-1\right]}.$$

Ha a H_0 hipotézis igaz, akkor annak felhasználásával, hogy $\frac{1}{n}\sum_1^n \lambda_\nu x_\nu^2$ majdnem biztosan 1-hez tart (amit alább fogunk bizonyítani), a következőket kapjuk:

$$\frac{1}{n}\log l_n(\omega) = -\frac{1}{2n}\sum_1^n x_\nu^2 \lambda_\nu \left[\frac{1}{\sigma^2}-1\right] - \log\sigma \to \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} - \log\sigma < 0$$

(mert a jobb oldalnak maximuma van $\sigma = 1$-nél).
Így tehát $l_n(\omega)$ 1-valószínűséggel 0-hoz tart. Ha viszont H_σ igaz, akkor hasonló módon azt kapjuk, hogy $l_n(\omega)$ P_σ-ra nézve majdnem biztosan $+\infty$-hez tart. Az az érdekes helyzet áll elő, hogy a vizsgált típusú hipotézisek esetében mindig a teljesen szinguláris eset következik be. Annak 1-valószínűséggel való eldöntésére, hogy melyik hipotézis igaz, explicit kifejezést tudunk megadni. Tekintsük az

$$\frac{1}{N}\sum_1^N \lambda_\nu x_\nu^2 = \frac{1}{N}\sum_1^N z_\nu^2$$

kifejezést, ahol

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 z_\nu^2 = 1 \\ \mathbf{D}_0^2 z_\nu^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_\sigma z_\nu^2 = \sigma^2 \\ \mathbf{D}_\sigma^2 z_\nu^2 = 2\sigma^4. \end{cases}$$

Mivel a z_ν értékek független valószínűségi változók, alkalmazhatjuk KOLMOGOROV konvergencia-tételét; így azt kapjuk, hogy a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N \lambda_\nu \left\{\int_a^b x(t)\varphi_\nu(t)\,dt\right\}^2$$

határérték majdnem biztosan létezik mindkét hipotézis esetében, és értéke 1 vagy σ^2, aszerint, hogy a H_0 vagy pedig a H_σ hipotézis igaz.

Tekintsük a T_λ transzformációt, amely az alábbi módon hat a mintatér elemeire:

$$T_\lambda x(t) = \lambda x(t),$$

ahol λ egytől különböző valós állandó. Akkor az olyan $E \subset \Omega$ halmaznak, amelyre

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N \lambda_\nu \left\{\int_a^b x(t)\varphi_\nu(t)\,dt\right\}^2 = 1,$$

a P_0-mértéke 1. A $T_\lambda E$ halmaznak nyilvánvalóan nincs közös eleme az E halmazzal, és P_0-mértéke 0. Abban a speciális esetben, amikor $a = 0$, $b = 1$ és $r(s, t) = \min(s, t)$, a Wiener-folyamatot kapjuk, azaz normális és stacionárius, független növekményű folyamatot. Erre az esetre már CAMERON és MARTIN [1] kimutatták az E-halmazra vonatkozó fenti meglepő eredményt; kiindulási pontjuk azonban nem a statisztikai hipotézisek ellenőrzése volt.

4. 8. Több megfigyelés esete. Most természetszerűen át lehetne térni más típusú hipotézisek esetén leghatékonyabb próbák felállítására, például két eltérő kovarianciafüggvény összehasonlítására ismert várható-érték függvény esetén, vagy pedig összetett null-hipotézis esetén a leghatékonyabb kritikus tartomány keresésére. A gyakorlatban néha többet tudunk a realizáció típusáról, és ennek a többletinformációnak a felhasználásával gyakran egyszerűbb próbákat találhatunk. Hangsúlyozni kívánjuk az alkalmas mintatér megválasztásának a fontosságát, és a következőkben ennek látni fogjuk az előnyeit. Előfordul, hogy a folyamat $r(s, t)$ magú integrálegyenletének a megoldása feleslegessé válik. Ami a 4.4.—4.7. szakaszokban ismertetett módszereket illeti, azoknak az alkalmazása már eléggé világos, ezért csupán egy egyszerű általánosításra fogunk szorítkozni, mielőtt más tárgykörre térnénk át.

Tegyük fel, hogy ugyanazokat a

$$\begin{cases} H_0\colon \ \mathrm{E}_0 x(t) = 0, \\ H_1\colon \ \mathrm{E}_1 x(t) = a(t) \end{cases}$$

hipotéziseket akarjuk összehasonlítani ismert $r(s, t)$ kovariancia-függvény esetén, mint fentebb, most azonban N független $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$ realizációt figyeltünk meg. Ezt a mintát természetes módon az alábbi koordinátákkal írhatjuk le:

$$x_{\nu,\mu} = \int_a^b x_\nu(t)\varphi_\mu(t)\,dt; \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N; \ \mu = 1, 2, \ldots .$$

A likelihood-függvény szokásos approximációját képezve és a reguláris esetet feltételezve azt kapjuk, hogy

$$l_n(\omega) = e^{-\frac{1}{2}N\sum\limits_1^n \lambda_\mu a_\mu^2 + \sum\limits_{\mu=1}^n \sum\limits_{\nu=1}^N \lambda_\mu x_{\nu\mu} a_\mu}.$$

Így tehát a leghatékonyabb próbát azzal a kritikus tartománnyal kapjuk, amelyet a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [x_1(t) + \ldots + x_N(t)] f_n(t)\,dt \geqq k$$

halmaz ad meg, ahol $f_n(t)$ ugyanúgy van definiálva, mint az előzőkben. Hasonló módon találhatunk egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbákat.

4. 9. Pontfolyamat hozzárendelt valószínűségi változókkal. Az előző szakaszban leírt módszer olyan integrálegyenletekre vezet, amelyeknek a gyakorlatban csak különleges esetekben létezik explicit megoldásuk, de az 5. 3.—5. 5. szakaszokban látni fogjuk, hogy a legfontosabb esetekben mégis van módja a probléma megoldásának. Bár léteznek közelítő numerikus módszerek is, azonban kívánatos egyszerűbb jellegű próbák alkalmazása. Amint már röviden említettük, ez lehetségessé, válik ha a realizációk tulajdonságaira vonatkozó ismereteink alapján az $L_2(T)$-nél szűkebb függvénytérre szorítkozhatunk.

Tekintsük a következő folyamatot, amelyet a becsléselméletről szóló fejezetben is vizsgálni fogunk. Megfigyelünk a $(0, T)$ időintervallumban egy β intenzitású

[3] A Poisson-folyamat intenzitását — vagy paraméterét — a folyamat egységnyi időszakban bekövetkező ugrásainak átlagos számával definiáljuk.

Poisson-folyamatot.[3] A megfigyelés a $0<t_1<t_2<\ldots<t_n<T$ pontsorozatot adja. Minden $t_i<t\leqq t_{i+1}$ intervallumhoz legyen hozzárendelve egy x_i valószínűségi változó, amelynek létezzen (ismeretlen) m várható értéke és 1-gyel egyenlő szórása. Feltesszük továbbá, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek egymástól. Ilyen folyamat előfordul pl. a sztochasztikus folyamatok elméletének a szervomechanizmusokra való alkalmazásában (lásd JAMES, NICHOLS, PHILLIPS [1]). A realizációknak ugyanolyan az alakja, mint amit a 3. 1. szakasz végén vizsgáltunk, és célszerű ugyanazokat a koordinátákat is választani. Vizsgálni akarjuk az $m=0$ hipotézist az alternatív m érték ellenében. Az n koordinátának a jelen esetben diszkrét az eloszlása, de amint ezt a 4. 2. szakaszban említettük, ez nem vezet bonyodalmakra a próba felállításánál. Könnyen belátható, hogy az alábbi likelihood-függvényt kapjuk:

$$f(\omega)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_0^n (x_\nu-m)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_0^n x_\nu^2}}=e^{m\sum\limits_0^n x_\nu-\frac{n+1}{2}m^2}.$$

A leghatékonyabb kritikus tartományt tehát az

$$m\sum_0^n x_\nu-\frac{n+1}{2}m^2\geqq k$$

egyszerű egyenlőtlenség határozza meg. Ez a halmaz ugyanolyan alakú, mint a normális eloszlású, egységnyi szórású valószínűségi változó értékének n független megfigyelés alapján való ellenőrzésénél alkalmazott tartomány. Megjegyezzük azonban, hogy a próbát nem lehet közvetlenül a független valószínűségi változók esetére visszavezetni, mert a mi esetünkben n nem rögzített szám, hanem maga is valószínűségi változó. A hipotézis feltételes leghatékonyabb próbáját (rögzített n feltételezésével) viszont ezen a klasszikus módon meg lehetett volna kapni.

Később szükségünk lesz az itt vizsgált folyamat kovariancia-függvényére; ennek a kiszámítására rögzítjük a $t>s$ értéket és az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[x(s)-m][x(t)-m]=\\&=P\{(s,t)\text{ nem tartalmaz egyetlen } t_i \text{ pontot sem}\}\cdot\\&\cdot\mathbf{E}[x(s)-m]^2+\\&+P\{(s,t)\text{ legalább egy } t_i \text{ pontot tartalmaz}\}.\end{aligned}$$

Mivel valós folyamat kovariancia-függvénye szimmetrikus a két argumentumára nézve, az alábbi eredményt kapjuk:

$$r(s,t)=e^{-\beta|t-s|}.$$

Meg kell jegyezni, hogy ez nem normális folyamat, ami közvetlenül belátható, ha az $x(s)$ és $x(t)$ mennyiségek együttes eloszlását tekintjük.

4. 10. Pontfolyamatok próbái. A gyakorlatban sokszor találkozunk sztochasztikus pontfolyamatokkal. Vizsgálni fogjuk az ilyen folyamatok néhány típusát a hipotézis ellenőrzés kérdéseivel kapcsolatban. Legyen $x(t)$ egy nem-stacionárius általánosított Poisson-folyamat, amelynek intenzitása legyen $\lambda(t)$ vagy $\mu(t)$, aszerint, hogy a H_0 vagy a H_1 hipotézis igaz. A folyamatot a $(0, T)$ időintervallumban figyeljük meg. Koordinátákul az $(n, t_1, \ldots, t_n)$ rendszert alkalmazva könnyen jutunk az alábbi likelihood-függvényhez:

$$f(\omega) = \frac{\mu(t_1)\ldots\mu(t_n)}{\lambda(t_1)\ldots\lambda(t_n)} e^{-\int\limits_0^T [\mu(t)-\lambda(t)]\,dt}.$$

Ilyen módon az

$$S = \left\{ \prod_1^n \frac{\mu(t_\nu)}{\lambda(t_\nu)} \geqq k \right\}$$

kritikus tartományt kapjuk. Itt feltételeztük, hogy azon a halmazon, ahol $\mu(t) \neq 0$, majdnem mindenütt $\lambda(t)$ is különbözik nullától. Ellenkező esetben volna egy H szinguláris rész, amely azonban itt nem fordulhat elő, mert konvergenciakérdések fel sem merülnek (ugyanis $P\{n<\infty\} = 1$).

Az alternatív hipotézisek alakját korlátozzuk most az alábbi esetre:

$$\begin{cases} H_0: & \text{a valószínűségi intenzitás } \lambda(t) \\ H_\mu: & \text{a valószínűségi intenzitás } \mu.\,\lambda(t). \end{cases}$$

Ekkor az

$$S = \{\mu^n \geqq k\}$$

kritikus tartományt kapjuk, és ha a $\mu>1$ esetre (vagy ellenkezőleg a $\mu<1$ esetre) szorítkozunk, akkor az

$$S = \{n \geqq n_0\} \qquad (\text{vagy pedig az } S = \{n \leqq n_0\})$$

egyoldalú egyenletesen leghatékonyabb próbákhoz jutunk.

Mivel n diszkrét eloszlású, előfordulhat, hogy tetszőlegesen megadott ε értékekre a

$$P_0(S) = \varepsilon$$

egyenletnek nincs pontos megoldása. Világos, hogy a gyakorlatban ez a nehézség könnyen elhárítható, ezért itt nem foglalkozunk tovább vele.

Egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbát úgy kapunk, ha a 4. 3. szakasznak megfelelően a

$$\mu^n \geqq c + c_1 n$$

egyenlőtlenségből indulunk ki. Az exponenciális függvény konvex jellege miatt ekkor a kritikus tartomány az alábbi alakú

$$S = \{n < n_1\} + \{n > n_2\}.$$

Itt is előfordulhat, hogy az n_1 és n_2 értékét meghatározó egyenletnek nincs pontos megoldása, azonban a fentihez hasonló megokolással itt sem foglalkozunk tovább ezzel a kérdéssel.

Tekintsük most a következő hipotéziseket:

$$\begin{cases} H_0: & \lambda(t) = e^{\alpha t} \\ H_\mu: & \mu(t) = e^{(\alpha+\mu)t}. \end{cases}$$

Könnyű kimutatni, hogy a leghatékonyabb kritikus tartomány ebben az esetben

$$S = \left\{ e^{\mu \sum\limits_1^n t_i} \geqq k \right\}.$$

Az egyoldalú $\mu > 0$ alternatívára így az

$$S = \left\{ \sum_1^n t_i \geqq k' \right\}$$

egyenletesen leghatékonyabb próbát kapjuk. Itt $\sum_1^n t_i$ folytonos eloszlású, tehát minden nehézség nélkül meg lehet határozni k' pontos értékét tetszőleges ε-szint esetén.

Legyen most $x(t)$ egy a $(0, T)$ intervallumon definiált β paraméterű Pólya-folyamat (lásd LUNDBERG [1]).[4] Ekkor a folyamat „feltételes intenzitása" azzal a feltétellel, hogy a t időpontig n esemény következett be,

$$P_n(t) = \frac{1+\beta n}{1+\beta t}.$$

Azt a hipotézist akarjuk ellenőrizni, hogy $\beta = 0$, szemben azzal az egyszerű alternatív hipotézissel, hogy $\beta > 0$ meghatározott érték. E célra képezzük először az $(n, t_1, \ldots, t_n)$ koordinátáknak megfelelő „sűrűségfüggvényt" $n > 0$ esetére.

$$g_\beta(\omega) = \prod_0^{n-1} \frac{1+\beta\nu}{1+\beta t_{\nu+1}} e^{-\int_0^{t_1} \frac{dt}{1+\beta t} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+\beta}{1+\beta t} dt - \ldots - \int_{t_n}^{T} \frac{1+n\beta}{1+\beta t} dt}.$$

Ekkor

$$\log g_\beta(\omega) = -\frac{1}{\beta} \log(1+\beta t_1) - \frac{1+\beta}{\beta} \log \frac{1+\beta t_2}{1+\beta t_1} - \ldots - \frac{1+n\beta}{\beta} \log \frac{1+\beta T}{1+\beta t_n} +$$

$$+ \sum_0^{n-1} \log \frac{1+\beta\nu}{1+\beta t_{\nu+1}} = -\frac{1}{\beta} \log(1+\beta T) - \sum_1^n \nu \log \frac{1+\beta t_{\nu+1}}{1+\beta t_\nu} + \sum_0^{n-1} \log \frac{1+\beta\nu}{1+\beta t_{\nu+1}},$$

ahol $T = t_{n+1}$. Az egyenlet jobb oldalának második tagját átalakítva, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\log g_\beta(\omega) = -\frac{1}{\beta} \log(1+\beta T) + \sum_1^n \log(1+\beta t_\nu) - n \log(1+\beta T) +$$

$$+ \sum_0^{n-1} \log \frac{1+\beta\nu}{1+\beta t_{\nu+1}} = -\frac{1}{\beta} \log(1+\beta T) + \sum_0^{n-1} \log(1+\beta\nu) - n \log(1+\beta T).$$

Ez az előállítás $n > 0$ esetére érvényes; közvetlenül belátható, hogy $n = 0$ esetére

$$\log g_\beta(\omega) = -\frac{1}{\beta} \log(1+\beta T).$$

Ha viszont a $\beta = 0$ hipotézis igaz, akkor

$$g_0(\omega) = e^{-T},$$

[4] A Gólya-folyamat definícióját lásd a függelékben.

tehát

$$f(\omega) = \frac{g_\beta(\omega)}{g_0(\omega)} = \frac{c(\beta)}{(1+\beta T)^n} \prod_0^{n-1} (1+\beta v),$$

ahol $n=0$ esetében a jobb oldali szorzat értékét 1-nek kell venni. A leghatékonyabb kritikus tartomány

$$S = \{f(\omega) \geqq k\}$$

alakú, és mivel $\log \prod_0^{n-1} (1+\beta v)$ konvex függvénye n-nek, míg $n \log(1+\beta T)$ lineárisan függ n-től, azért a leghatékonyabb tartomány alakja

$$S = \{n < n_1\} + \{n > n_2\},$$

ahol $n_1 < n_2$. Így tehát a H_0 hipotézist el kell vetni, ha n nagyon kicsi vagy nagyon nagy értéket vesz fel. Ez természetesnek tűnik, mert megfelel annak a ténynek, hogy

$$\mathbf{D}_\beta^2 n = T(1+\beta T) > T = \mathbf{D}_0^2 n.$$

Érdekes körülmény, hogy a kapott leghatékonyabb próba nem használja fel az események időpontjainak a helyzetét, hanem csupán az események számát. Ebből következik, hogy egyedül az n szám megfigyelése alapján ugyanolyan jól megalapozott következtetéshez jutunk, mint amikor a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontokat is megfigyeljük.

4. 11. Stacionárius Markov-folyamat. A 4. 4—4. 7. szakaszokban láttuk, hogyan kell a normális folyamatok várható értékére a leghatékonyabb próbákat felépíteni. Sajnos, a próbát meghatározó függvények csak kivételes esetekben állíthatók elő egyszerű $\int_a^b f(t)x(t)dt$ alakú integrálként, de néha lehet találni egyszerűbb alakú kritériumot a mintatér megfelelő specializálása útján. Ez a lehetőség megvan a normális folyamatok talán legfontosabb típusa, a stacionárius Markov-folyamat esetében.

Legyen $x(t)$ ilyen folyamat, amelynek várható értéke m és kovariancia-függvénye

$$r(s, t) = e^{-\beta|t-s|}.$$

Vizsgáljuk a H_0: $m=0$ hipotézist, azzal az egyszerű alternatív hipotézissel szemben, hogy m nullától különböző meghatározott értékű. Ki fogjuk mutatni, hogy a megfelelő $f_n(t)$ próbafüggvények sorozata ebben az esetben nem konvergál semmilyen $L_2(T)$-be tartozó függvényhez. Legyen $T=(0, 1)$. Az $r(s, t)$ mag pozitív definit, amit hasonló módon lehet belátni, mint ahogy alább az $\{f_n(t)\}$ sorozat divergenciáját fogjuk kimutatni. Tegyük fel ugyanis, hogy $f_n(t)$ négyzetes átlagban valamilyen $f(t) \in L_2(t)$ függvényhez konvergál, akkor minden $s \in T$ esetén érvényes az

$$\int_0^1 e^{-\beta|t-s|} f(t)\,dt = \int_0^s e^{\beta(t-s)} f(t)\,dt + \int_s^1 e^{\beta(s-t)} f(t)\,dt \equiv 1$$

egyenlet, amelyet differenciálva az alábbi majdnem minden s-re érvényes

$$0 = -\beta e^{-\beta s}\int_0^s e^{\beta t} f(t)\,dt + \beta e^{\beta s}\int_s^1 f(t)e^{-\beta t}\,dt$$

egyenletet kapjuk. Ez utóbbit β-val elosztva és az előző egyenletből kivonva az

$$1 = 2e^{-\beta s}\int_0^s f(t)e^{\beta t}\,dt$$

összefüggést kapjuk. Mivel ennek mindkét oldala folytonos függvény, érvényesnek kell lennie minden $s \in T$ esetén, tehát

$$f(s) = \frac{\beta}{2}$$

majdnem minden $s \in T$-re. Ez a függvény azonban nem elégíti ki az integrálegyenletünket, amiből következik, hogy az általunk keresett $f(t)$ függvény nem létezik. Most ki fogjuk mutatni, hogy mégis lehet leghatékonyabb próbát egyszerű módon előállítani. E célra a $(0, T)$-ben folytonos függvények halmazát választjuk mintatérnek, ami az 1. 4. szakasz szerint megengedett. Koordinátákul az $x(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ értékeket vesszük, ahol $\{t_n\}$ a $(0, T)$ intervallumban mindenütt sűrű pontok egy megszámlálható sorozata. Célszerű például a t_n pontok alábbi megválasztása: $t_1 = 0$, $t_2 = T$, és a következő pontok sorra $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{4}T$, $\frac{3}{4}T$, és így tovább ismételt felezéssel. Ki akarjuk számítani az $x(t_1)$, $x(t_2), \ldots, x(t_n)$ értékek valószínűségi sűrűségfüggvényeit a H_m hipotézis esetére. E célra átrendezzük a t_i értékeket az időtengelyen elfoglalt helyzetük sorrendjében, és az így átszámozott indexekkel bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\begin{cases} x(t_i) = x_i \\ e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)} = \varrho_i, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ekkor

$$g_m^{(n)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_1^{n-1}(1-\varrho_i^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1-m)^2-\frac{1}{2}\sum\limits_1^{n-1}\frac{[x_{i+1}-\varrho_i x_i - m(1-\varrho_i)]^2}{1-\varrho_i^2}},$$

tehát

$$\log\frac{g_m^{(n)}(\omega)}{g_0^{(n)}(\omega)} = mx_1 - \frac{m^2}{2} + m\sum_1^{n-1}\frac{x_{i+1}-\varrho_i x_i}{1+\varrho_i} - \frac{m^2}{2}\sum_1^{n-1}\frac{1-\varrho_i}{1+\varrho_i} =$$

$$= mx_1 - \frac{m^2}{2} + m\sum_2^{n-1}\frac{x_i}{1+\varrho_{i-1}} - m\sum_2^{n-1}\frac{\varrho_i x_i}{1+\varrho_i} +$$

$$+ m\frac{x_n}{1+\varrho_{n-1}} - m\frac{\varrho_1 x_1}{1+\varrho_1} - \frac{m^2}{2}\sum_1^{n-1}\frac{1-\varrho_i}{1+\varrho_i}.$$

Ha n nagy, akkor $\Delta_n = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ kicsi, így tehát

$$\log l_n(\omega) = mx(0) - \frac{m^2}{2} + m\frac{x(T)}{1+\varrho_{n-1}} - m\frac{\varrho_1 x(0)}{1+\varrho_1} +$$

$$+\frac{m}{2}\sum_{2}^{n-1} x_i \left\{\frac{\beta}{2}(t_i - t_{i-1}) + \frac{\beta}{2}(t_{i+1} - t_i) + O(\Delta^2)\right\} - \frac{m^2}{2}\sum_{2}^{n-1}\beta\frac{t_{i+1} - t_i + O(\Delta^2)}{2}.$$

Mivel $\Delta_n \to 0$, és folyamatunk realizációi folytonosak, majdnem biztosan érvényes

$$\log f(\omega) = \lim_{n\to\infty} l_n(\omega) = m\frac{x(0)}{2} + m\frac{x(T)}{2} - \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}\beta\int_0^T x(t)\,dt - \frac{m^2}{4}\beta T.$$

Így tehát a vizsgált eset reguláris, következésképpen ugyanúgy, mint előzőleg, *az alábbi egyszerű alakú egyenletesen leghatékonyabb próbát kapjuk a H_0 hipotézisnek az egyoldalú $m > 0$ hipotézissel szemben való ellenőrzésére:*

$$x(0) + x(T) + \beta\int_0^T x(t)\,dt \geqq k.$$

Hasonló módon kaphatunk egyenletesen leghatékonyabb torzítatlan próbát is. Az itt vizsgált folyamatra vissza fogunk térni a becslésekre vonatkozó fejezetben.

4. 12. Próbák approximációja. Amint már láttuk, megtörténhetik, hogy a leghatékonyabb próbafüggvény alakja túl bonyolult a gyakorlati alkalmazás számára. Ilyenkor egyszerűbb, de kevésbé hatékony próbát kell alkalmazni, vagy pedig approximálni lehet a leghatékonyabb próbafüggvényt valamilyen megfelelő módon. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a reguláris esettel van dolgunk. Ekkor

$$l_n(\omega) = \frac{g_1(x_1, \ldots, x_n)}{g_0(x_1, \ldots, x_n)}$$

sztochasztikusan konvergál az $f(\omega)$ likelihood-függvényhez. A leghatékonyabb kritikus tartomány

$$S = \{f(\omega) \geqq k\}_\omega,$$

amelynek approximációjaként az

$$S_n = \{l_n(\omega) \geqq k\}_\omega$$

tartományt lehet használni.

Világos, hogy ezekre a tartományokra

$$P_i(S_n) \to P_i(S); \qquad i = 0, 1;$$

ami azt jelenti, hogy az S_n tartomány használatakor keletkező első- és másodfajú hibák nagysága tetszőleges pontossággal megközelítheti a leghatékonyabb S tartománynak megfelelő hibákat, hacsak n értékét eléggé nagyra választjuk. Így tehát olyan próbához jutottunk, amely gyakorlati szempontból alig különbözik a leghatékonyabbtól.

Ezzel befejeztük a sztochasztikus folyamatokra vonatkozó statisztikai hipotézisvizsgálat tanulmányozását. A gyakorlat számára fontos további példák esetében célszerű a próbákat az illető alkalmazás jellegének figyelembevételével felépíteni.

IRODALOMJEGYZÉK

W. AMBROSE: [1] On measurable stochastic processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1940.
S. BANACH: [1] *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw 1933.
R. C. CAMERON and W. T. MARTIN: [1] The behaviour of measure and measurability under change of scale in Wiener space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947.
H. CRAMÉR: [1] *Random variables and probability distributions*, Cambridge 1937.
[2] On the theory of stationary random processes. *Ann. of Math.*, 1940.
[3] On harmonic analysis in certain functional spaces, *Arkiv f. Mat. Astr. Fys.* 1942.
[4] *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton 1946.
J. L. DOOB: [1] Stochastic processes depending on a continuous parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1937.
[2] Stochastic processes with an integral-valued parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1938.
[3] The law of large numbers for continuous stochastic processes, *Duke Math. Jour.*, 1940.
[4] The Brownian movement and stochastic equations, *Ann. of Math.*, 1942.
[5] The elementary Gaussian processes, *Ann. of Math. Stat.*, 1944.
J. L. DOOB and W. AMBROSE: [1] On the two formulations of the theory of stochastic processes depending upon a continuous parameter, *Ann. of Math.*, 1940.
H. A. EINSTEIN: [1] *Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem.* Dissert. Zürich 1937.
U. GRENANDER: [1] Stochastic processes and integral equations. *Arkiv för Mat.*, 1949.
O. HANNER: [1] Deterministic and non-deterministic stationary stochastic processes, *Arkiv för Mat.*, 1949.
E. HOPF: [1] *Ergodentheorie*, Berlin 1937.
K. ITO: [1] On the ergodicity of a certain stationary process, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, Vol. XX (1944).
JAMES, NICHOLS, PHILLIPS: [1] *Theory of servomechanisms*, New York 1947.
M. KAC and A. J. F. SIEGERT: [1] An explicit representation of stationary Gaussian process, *Ann. of Math. Stat.*, 1947.
K. KARHUNEN: [1] Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse, *Ann. Ac. Sci. Fennicae*, A. I. 34, Helsinki 1946.
[2] Lineare Transformationen stationärer stochastischer Prozesse, *X. Skand. Mat. Kongr.* Kobenhavn 1946.
[3] Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Ac. Sci. Fennicae*, A I. 37, Helsinki 1947.
[4] Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen. *Arkiv. för Mat.*, 1949.
M. G. KENDALL: [1] *The advanced theory of statistics*, I—II. London 1943, 1946.
A. KHINTSCHINE: [1] Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, *Math. Ann.*, 1934.
A. KOLMOGOROFF: [1] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.
P. LÉVY: [1] *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937.
O. LUNDBERG: [1] *On random processes and their application to sickness and accident statistics*, Thesis, Stockholm 1940.
R. PALEY and N. WIENER: [1] *Fourier transforms in the complex domain*, New York 1934.
B. J. PETTIS: [1] On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1938.
S. SAKS: [1] *Theory of the integral*, Warsaw 1937.
A. WALD: [1] Asymptotic properties of the maximum likelihood estimate of an unknown parameter of a discrete stochastic process, *Ann. of Math. Stat.* 1948.
N. WIENER: [1] *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*, New York 1949.
J. WOLFOWITZ: [1] The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential processes, *Ann. of Math. Stat.*, 1947.

Fordította: dr. Korodi Albert
a műszaki tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. december 28 — Terjedelem: 7,50 (A/5) ív, 5 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 64-1211

Ára 17,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XV. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XV. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

EGY GRÁFELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

Írta: CORRÁDI KERESZTÉLY

1. §. Bevezetés

E dolgozatban gráfon véges, többszörös élet és hurkot nem tartalmazó gráfot értünk. A **G** gráf szögpontjainak számát $\mathcal{V}(\mathbf{G})$-vel, éleinek számát $\mathcal{E}(\mathbf{G})$-vel jelöljük. Ha $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ a **G** gráf egy részgráfja, $\mathcal{E}(\mathbf{G}; \mathbf{H})$ jelöli **G** azon élei számát, amelyek **H**-beli szögpontokból indulnak ki. Jegyezzük meg, hogy e jelölésben a **H**-beli szögpontokat összekötő élek kétszer számítandóak. Szükségünk lesz a továbbiakban az alábbi jelölésmódra is: ha $P \in \mathbf{G}$ a **G** gráf egy tetszőleges szögpontja, akkor az $\mathcal{E}(\mathbf{G}; P)$ kifejezés a P szögpontból kiinduló **G**-beli élek számát jelenti. Világos, hogy tetszőleges $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ **G**-beli részgráf esetén

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}; \mathbf{H}) = \sum_{P \in \mathbf{H}} \mathcal{E}(\mathbf{G}; P)$$

igaz az előbbiekben mondottak alapján. Állapodjunk meg végül abban, hogy a **G** gráf részgráfjainak egy rendszerét függetlennek fogjuk mondani, ha bármely két e rendszerhez tartozó részgráf közös szögpont nélküli.

Bebizonyítjuk, hogy a fenti jelölések használata mellett áll az alábbi

TÉTEL: *Legyen* **G** *véges gráf, s legyenek n és k adott természetes számok. Tegyük fel, hogy* $\mathcal{V}(\mathbf{G}) = kn$, *továbbá, hogy minden* $P \in \mathbf{G}$ *szögpont esetén*

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}; P) < n.$$

Ekkor létezik egy S természetes szám, valamint **G**-*beli* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_s$ *részgráfok egy független rendszere azzal a tulajdonsággal, hogy*

$$\mathcal{V}(\mathbf{A}_i) = k, \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

továbbá az $\mathbf{A}_i$ *részgráfok bármelyikében tetszőleges két szögpont között* **G**-*ben nem halad él. Az S természetes szám választható az*

$$S \geqq \max\left(\frac{1}{2}\, n,\ \frac{k}{2(k-1)}\, n - \frac{1}{2}\right)$$

egyenlőtlenséget kielégítőnek.

Az S maximális választása esetén a tétel feltételeit kielégítő részgráfok rendszerét a 3. és 4. §-ban rövidség kedvéért megengedett rendszernek fogjuk nevezni.

A tétel $k = 2$ esetén azt jelenti, hogy minden $2n$ szögpontú **G** gráfot, amelyben minden szögpont foka n-nél kisebb, szét lehet bontani szögpont-párokra oly módon, hogy az egy párhoz tartozó szögpontok között nem halad **G**-ben él. Ez DIRAC[1] tétele.

[1] DIRAC, G.: Some theorems on abstract graphs. *Proc. London math. Soc.* III. Ser., 2, 69–81 (1952).

A tétel az alábbi problémával kapcsolatban merül fel. KÖNIG DÉNES „*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*" c. könyvében szerepel az alábbi állítás: Ha **G** véges gráf, minden szögpontjának foka kisebb mint n, akkor létezik **G**-ben legfeljebb n részgráfból álló független rendszer, amely **G** minden szögpontját tartalmazza, s azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy e rendszer egyetlen részgráfja sem tartalmaz **G**-beli élet.

Kérdés, lehet-e valamit mondani e független részgráfrendszer részgráfjainak szögpont-számáról? Talán igaz az itt következő sejtés:

Ha **G** véges gráf és

$$\mathcal{V}(\mathbf{G}) = kn + r, \qquad 0 \leqq r < n,$$

k, n természetes számok, r nem negatív egész, s minden $P \in \mathbf{G}$-re igaz az

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}; P) < n$$

egyenlőtlenség, akkor létezik az $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ részgráfok egy független rendszere **G**-ben azzal a tulajdonsággal, hogy **G** minden szögpontja hozzátartozik e részgráfok valamelyikéhez,

$$\mathcal{V}(\mathbf{A}_i) = \begin{cases} k+1, & \text{ha} \quad 1 \leqq i \leqq r, \\ k, & \text{ha} \quad r+1 \leqq i \leqq n, \end{cases}$$

s végül az $\mathbf{A}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ részgráfok egyike sem tartalmaz **G**-beli élet. E sejtést ERDŐS PÁL mondotta ki.[2]

Megmutatjuk, hogy elég lenne a sejtést az $r=0$ és $k>n$ esetre igazolni.

Tegyük fel tehát, hogy **G** véges gráf, amelyre a

$$\mathcal{V}(\mathbf{G}) = kn, \qquad k > n$$

egyenlőség és az

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}; P) < n,$$

egyenlőtlenség minden $P \in \mathbf{G}$ szögpontra igaz. Erre a **G** gráfra igaznak tételezzük fel a sejtés konklúzióját.

Legyen most **H** tetszőleges véges gráf, amelyre a sejtés feltételei igazak, megmutatjuk hogy konklúziója is igaz.

Evégből legyen

$$\mathcal{V}(\mathbf{H}) = ln + r, \qquad 0 \leqq r < n.$$

Válasszuk meg a k természetes számot úgy, hogy $k > \max(l+1, n)$ teljesüljön. Jelöljön $\mathbf{S}_n$ egy n-szögpontú teljes gráfot. ($\mathbf{S}_n$ bármely két pontja éllel van összekötve.) Csatoljunk az $\mathbf{S}_n$ gráfból $k-l-1$ példányt, s az $\mathbf{S}_{n-r}$ gráfból egy példányt a **H** gráfhoz. A kapott **G** gráfra

$$\mathcal{V}(\mathbf{G}) = \mathcal{V}(\mathbf{H}) + (k-l-1)n + n - r = kn, \qquad k > n.$$

Ha a **H** szögpontjaiból az új szögpontokhoz nem rajzolunk be éleket, akkor teljesül a

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}; P) < n$$

feltétel is minden **G**-beli P szögpont esetén.

[2] Szóbeli közlés.

G-re a sejtés konklúziója igaz. Van tehát G-ben egy $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ független rendszer a kívánt tulajdonságokkal. Minden $\mathbf{B}_i$ az $\mathbf{S}_n$ minden példányából pontosan egy szögpontot tartalmaz, s a $\mathbf{B}_i$-k közül $n-r$ darab tartalmazza $\mathbf{S}_{n-r}$-nek egy szögpontját. Nevezetesen a $\mathbf{B}_i$ részgráfok egyike sem tartalmaz G-beli élet, s így $\mathbf{S}_n$-ből nem tartalmazhat legalább két szögpontot. Ha a $\mathbf{B}_i$, $(1 \leqq i \leqq n)$ részgráfokból elhagyjuk azokat a szögpontokat, amelyek nem H-hoz tartoznak, s a megmaradó H-beli részgráfokat $\mathbf{A}_i$-vel $(1 \leqq i \leqq n)$ jelöljük, akkor a

$$\mathcal{V}(\mathbf{B}_i) = k, \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

feltétel teljesülése folytán az indexezés megfelelő választásával

$$\mathcal{V}(\mathbf{A}_i) = \begin{cases} l+1, & \text{ha} \quad 1 \leqq i \leqq r, \\ l, & \text{ha} \quad r+1 \leqq i \leqq n, \end{cases}$$

adódik, s így a sejtés konklúziója a **H** gráfra is igaz. Ezt akartuk megmutatni.

Az $r=0$ esetben a sejtés azt mondja, hogy G-ben $\mathcal{V}(\mathbf{G}) = kn$ esetén létezik a sejtés konklúzióját kielégítő n-darab független k szögpontú részgráf. A dolgozat tétele azt mondja, hogy legalább $\frac{1}{2}n$ darab van.

A tétel bizonyítására két lemmára lesz szükség. Előbb ezeket fogalmazzuk meg és bizonyítjuk be.

2. §. Lemmák

1. Lemma:[3] *Legyen* **G** *véges gráf,* **A**, **B** *és* **C** *független részgráfjai* **G**-*nek. Tegyük fel, hogy* **G** *minden szögpontja hozzátartozik* **A**, **B** *és* **C** *valamelyikéhez. Legyen*

$$\mathcal{V}(\mathbf{A}) = a, \quad \mathcal{V}(\mathbf{B}) = b, \quad \textit{és} \quad \mathcal{V}(\mathbf{C}) = c,$$

s tegyük fel, hogy a

$$c \geqq a \geqq b$$

egyenlőtlenség teljesül. Ha **A**, **B** *és* **C** *egyike sem tartalmazza* **G**-*nek élét és*

$$\sum_{P \in \mathbf{C}} \mathcal{E}(\mathbf{G}; P) < 2b$$

igaz, akkor léteznek olyan **D** *és* **E** *független részgráfok* **G**-*ben, hogy* **D** *és* **E** *egyike sem tartalmaz* **G**-*beli élet, továbbá*

$$\mathcal{V}(\mathbf{D}) = c, \quad \mathcal{V}(\mathbf{E}) \geqq a+1.$$

Bizonyítás: Nevezzük az **A** részgráf egy szögpontját első osztályúnak, ha belőle nem halad C-beli szögponthoz él. Nevezzünk egy A-beli szögpontot másodosztályúnak, ha belőle egyetlen C-beli szögponthoz halad él. Az **A** gráf azon szögpontjait, amelyek a vizsgált két osztály egyikébe sem tartoznak bele, nevezzük harmadosztályú szögpontoknak. Végezzük el ugyanezen osztályozást a **B** gráf szögpontjaira is. Jelölje x_A az **A** gráf első osztályú, y_A a másodosztályú szögpontjainak számát. Legyen x_B és y_B jelentése analóg a **B** gráfra vonatkozólag.

[3] E lemma bizonyítással együtt megtalálható a szerző „A note on finite graphs" (*Acta Sci. Math.* **24** (1964) 169—171) c. dolgozatában, ahol a lemma nem javíthatósága is vizsgálva van.

A lemma feltétele szerint

$$\sum_{P \in C} \mathscr{E}(\mathbf{G}; P) < 2b$$

igaz. Az osztályozás alapján

$$2(a - x_A - y_A) + 2(b - x_B - y_B) + y_A + y_B \leqq \sum_{P \in C} \mathscr{E}(\mathbf{G}; P).$$

E két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$2(x_A + x_B) + y_A + y_B > 2a$$

igaz kell hogy legyen. Ekkor viszont az

$$x_A + x_B + y_A \geqq a + 1,$$

és

$$x_A + x_B + y_B \geqq a + 1$$

egyenlőtlenségek legalább egyike igaz kell hogy legyen. Tegyük fel, hogy az első áll.

Ezen egyenlőtlenség segítségével megkonstruáljuk a lemma feltételeit kielégítő **G**-beli **D** és **E** részgráfokat.

Álljon **D** az **A** gráf első- és másodosztályú pontjaiból, továbbá a **C** gráf

$$c - x_A - y_A \geqq c - a \geqq 0$$

számú olyan szögpontjából, amelyek egyike sincsen **A** másodosztályú szögpontjával összekötve. Mivel az **A** második osztályú szögpontjainak száma y_A, s ezen szögpontok mindegyike pontosan egy **C**-beli szögponttal van összekötve, legfeljebb y_A számú **C**-beli szögpont kivételével minden **C**-beli szögpont számításba jöhet, s

$$c - x_A - y_A \leqq c - y_A$$

folytán lesz elegendő **C**-beli szögpont **D** konstrukciójához. Az így konstruált **D** gráfra

$$\mathscr{V}(\mathbf{D}) = C$$

s **D** nem tartalmaz **G**-beli élet.

Álljon az **E** gráf a **B** gráf első osztályú szögpontjaiból, valamint a **D** konstrukciójánál fel nem használt

$$x_A + y_A$$

számú **C**-beli szögpontból. Az így konstruált **E** gráfra

$$\mathscr{V}(\mathbf{E}) = x_A + x_B + y_A \geqq a + 1,$$

az **E** és **D** függetlenek, s végül **E** nem tartalmaz *G*-beli élet az osztályozás definíciója folytán. Ezzel a lemma állítását igazoltuk.

Definíció: Azt mondjuk, hogy a **H** **G**-beli részgráf valamely $\mathbf{K} \subseteqq \mathbf{H}$ részgráfja maximális tulajdonságú **H**-ban, ha **K** nem tartalmazza **G**-nek élét, de bármely $\mathbf{L} \subseteqq \mathbf{G}$ részgráf, amelyre $\mathbf{L} \subseteqq \mathbf{H}$ igaz és

$$\mathscr{V}(\mathbf{L}) > \mathscr{V}(\mathbf{K})$$

teljesül, biztosan tartalmazza **G**-nek legalább egy élét, ha $\mathbf{K} \subseteqq \mathbf{L}$ igaz.

A továbbiakban *m. T.*-vel fogjuk jelölni azt, hogy egy **G**-beli részgráf rendelkezik a maximális tulajdonsággal valamely más **G**-beli részgráfra vonatkozóan.

2. LEMMA: *Legyen* **G** *véges gráf, k és n természetes számok. Tegyük fel, hogy* $\mathcal{V}(\mathbf{G})=kn$, *továbbá hogy minden* $P\in\mathbf{G}$ *szögpont esetén*

$$\mathcal{E}(\mathbf{G};P)<n \tag{1}$$

igaz. Legyenek $\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_2,\dots,\mathbf{L}_s$ *a* **G** *gráf egy független rendszert alkotó részgráfjai, amelyekre*

$$\sum_{Q\in\mathbf{L}_i}\mathcal{E}(\mathbf{L}_i;Q)=0,\qquad (1\leqq i\leqq s),$$

és

$$\mathcal{V}(\mathbf{L}_i)=k,\qquad (1\leqq i\leqq s)$$

teljesül.

Legyen **A** *m. T. részgráf* $\mathbf{G}_1$*-ben,* **B** *m. T. részgráf* $\mathbf{G}_2$*-ben*

$$\mathbf{G}_1\overset{\text{def}}{=}\mathbf{G}-\bigcup_{i=1}^{s}\mathbf{L}_i,\qquad \mathbf{G}_2\overset{\text{def}}{=}\mathbf{G}_1-\mathbf{A}.$$

Tegyük fel, hogy

$$\mathcal{V}(\mathbf{A})=a<k,$$

és

$$\mathcal{V}(\mathbf{B})=b\leqq a$$

teljesül. Végezetül tegyük fel még, hogy

$$\sum_{P\in\mathbf{L}_i}\mathcal{E}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{L}_i;P)\geqq 2b,\qquad (1\leqq i\leqq s) \tag{2}$$

igaz. E feltételek mellett igaz a

$$s\geqq\frac{2k-a-b}{2(k-b)}n-\frac{a-b}{2(k-b)}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: (1) következtében

$$\sum_{P\in\mathbf{B}\cup\mathbf{A}}\mathcal{E}(\mathbf{G};P)\leqq(n-1).\quad \mathcal{V}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})=(a+b)(n-1).$$

Másrészről (2), valamint **A** és **B** definíciójának következtében

$$\sum_{P\in\mathbf{B}\cup\mathbf{A}}\mathcal{E}(\mathbf{G};P)=2\mathcal{E}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})+\sum_{1\leqq i\leqq s}\sum_{P\in\mathbf{L}_i}\mathcal{E}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{L}_i;P)+\Sigma'\geqq 2b+2bs+\Sigma',$$

ahol Σ' jelöli az $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ szögpontjaiból a $\mathbf{G}_2-\mathbf{B}$ részgráf szögpontjaiba haladó élek számát. Az **A** és **B** gráfok *m. T.* folytán

$$\Sigma'\geqq 2\mathcal{V}(\mathbf{G}_2-\mathbf{B})=2\big(k(n-s)-(a+b)\big).$$

Ha az eddigi eredményeket összevetjük, nyerjük az

$$s\geqq\frac{2k-a-b}{2(k-b)}n-\frac{a-b}{2(k-b)}$$

egyenlőtlenséget.

KÖVETKEZMÉNY: *A 2. lemma feltételei teljesülése esetében igaz az*

$$s \geqq \max\left(\frac{1}{2}n, \frac{k}{2(k-1)}n-\frac{1}{2}\right)$$

egyenlőtlenség.

Ehhez elegendő megjegyezni egyrészről, hogy

$$s \geqq \frac{1}{2}n+\frac{k-a}{2(k-b)}n-\frac{a-b}{2(k-b)} \geqq \frac{1}{2}n+\frac{1}{2(k-1)}n-\frac{1}{2} = \frac{k}{2(k-1)}n-\frac{1}{2},$$

felhasználva az $1 \leqq b \leqq a < k$ egyenlőtlenséget, másrészről azt, hogy a 2. lemma bizonyításánál adódó

$$(2k-a-b)n-2(k-b)s-(a-b) \leqq 0$$

egyenlőtlenség folyománya a

$$0 \geqq (k-a)(n+1)+(k-b)\big(n-(2s+1)\big) > (k-b)\big(n-(2s+1)\big)$$

egyenlőtlenség, ahonnan $k>b$ folytán

$$\begin{aligned} 0 &> n-2s-1, \\ 2s &> n-1, \\ 2s &\geqq n, \\ s &\geqq \tfrac{1}{2}n. \end{aligned}$$

3. §. Az osztályozás

Legyen $\mathbf{G}$ a tétel feltételeit kielégítő gráf, s jelentése pedig a tételben mondott[4]. Feltesszük, hogy $s<n$.

Jelölje $\mathfrak{A}$ a $\mathbf{G}$ gráf $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_s$ megengedett részgráfjainak rendszerét. $\mathfrak{A}$ az s definíciója folytán létezik. Legyen $\mathbf{A}$ a

$$\mathbf{G}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{G}-\bigcup_{i=1}^{s}\mathbf{L}_i$$

gráf egy olyan *m. T.* részgráfja, hogy $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ a lehető legnagyobbnak van választva, $\mathbf{B}$ pedig a

$$\mathbf{G}_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{G}_1-\mathbf{A}$$

gráf *m. T.* részgráfja.

Rendeljük hozzá az $\mathfrak{A}$ rendszerhez az

$$(a_{\mathfrak{A}}, b_{\mathfrak{A}})$$

rendezett párt, ahol

$$a_{\mathfrak{A}} = \mathcal{V}(\mathbf{A}),$$

és

$$b_{\mathfrak{A}} = \mathcal{V}(\mathbf{B}).$$

[4] Az $s \geqq 1$ egyenlőtlenség könnyen bizonyítható.

Ezen a módon a **G** gráf minden oly $\mathfrak{A}^*$ rendszeréhez, amelyet **G** s számú $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_s$ megengedett részgráfjának együttese alkot, egy rendezett pár van hozzárendelve.

Osztályozás: Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{B}$ rendszer magasabb rangú az $\mathfrak{A}$ rendszernél, ha

$$a_{\mathfrak{B}} > a_{\mathfrak{A}}$$

vagy

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathfrak{B}} &= a_{\mathfrak{A}} \\ b_{\mathfrak{B}} &> b_{\mathfrak{A}} \end{aligned}\right\}$$

és

teljesül.

Nem rangsoroljuk, s egy osztályba esőnek tekintjük az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ rendszereket, ha

$$a_{\mathfrak{A}} = a_{\mathfrak{B}}$$

és

$$b_{\mathfrak{A}} = b_{\mathfrak{B}}$$

egyszerre áll fenn.

Megjegyzés: Világos, hogy ezen osztályozás **G** vizsgált rendszereit legfeljebb $(k-1)^2$ számú osztályba sorolja. Ez a rendezett pár elemei és s definíciójának közvetlen folyománya.

Ezen osztályozás segítségével most be fogjuk bizonyítani a bevezetésben kimondott tételt.

4. §. A tétel bizonyítása

Indirekt bizonyítjuk a tételt. Tegyük fel, hogy

$$s < \max\left(\frac{1}{2}n, \frac{k}{2(k-1)}n - \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

igaz a tétel feltételeit kielégítő **G** véges gráf esetében.

Végezzük el **G** s darab megengedett részgráfból álló rendszereire a 3. §-ban definiált osztályozást. Legyen $\mathfrak{A}$ a legmagasabb rangú rendszerek alkotta osztály egy reprezentánsa. Legyen (a, b) az $\mathfrak{A}$ osztályhoz rendelt rendezett pár. Alkossák végül az $\mathfrak{A}$ rendszert az $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_s$ **G**-beli megengedett részgráfok, s legyen az **A** és **B** gráf jelentése a 3. §-beli.

A 2. lemma alapján kell olyan i $(1 \leqq i \leqq s)$ indexnek léteznie, amelyre

$$\sum_{P \in \mathbf{L}_i} \mathscr{E}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{L}_i;\, P) < 2b$$

áll. Ellenkező esetben (3) nem lehet igaz a 2. lemma alapján.

Ekkor **A**, **B** és $\mathbf{L}_i$ kielégítik az 1. lemma feltételeit. Létezik tehát olyan $\mathbf{A}^*$ és $\mathbf{L}_i^*$ független részgráfokból álló pár $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{L}_i$-ben, amely az 1. lemma követelményeinek eleget tesz, és

$$\mathscr{V}(\mathbf{A}^*) \geqq \mathscr{V}(\mathbf{A}) + 1 = a + 1,$$

$$\mathscr{V}(\mathbf{L}_i^*) = \mathscr{V}(\mathbf{L}_i) = k.$$

Ekkor azonban a **G** gráf azon $\mathfrak{A}^*$ rendszere, amelyet az $\mathbf{M}_j$ $(1 \leqq j \leqq s)$ **G**-beli megengedett részgráfok alkotnak,

$$\mathbf{M}_j \equiv \begin{cases} \mathbf{L}_j, & \text{ha } j \neq i \\ \mathbf{L}_i^*, & \text{ha } j = i, \end{cases}$$

olyan, hogy

$$\mathbf{A}^* \subseteqq \mathbf{G} - \bigcup_{j=1}^{s} \mathbf{M}_j$$

folytán az $\mathfrak{A}^*$-hoz rendelt $(a_{\mathfrak{A}^*}, b_{\mathfrak{A}^*})$ rendezett párra

$$a_{\mathfrak{A}^*} \geqq a+1$$

teljesül, ami az $\mathfrak{A}$ rendszer, s vele az a szám választása folytán lehetetlen.

Ellentmondásra jutottunk az s-re vonatkozó feltételt hamisnak téve fel. Kell tehát, hogy az s-re vonatkozó feltétel s vele a tétel állítása helyes legyen. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

E dolgozat a szerző *„Kombinatorikus gráfelméleti vizsgálatok”* c. disszertációjának egy részét képezi.

(Beérkezett: 1964. XII. 10.)

A KOLMOGOROV–SZMIRNOV ÉS MÁS NEMPARAMÉTERES PRÓBÁK ERŐFÜGGVÉNYÉRŐL[1]

Írta: VINCZE ISTVÁN

Bevezetés

Próbák hatásosságának, különböző ellenhipotézisekkel szemben mutatott viselkedésének vizsgálata, ugyanezen tulajdonságoknak két próbára vonatkozó összehasonlítása az erőfüggvény segítségével történhet. Míg számos paraméteres próba erőfüggvénye egyszerűen előállítható, addig nemparaméteres próbák esetén ez az előállítás sok esetben nem egyszerű. Az alábbiakban explicite megadjuk a kétmintás *Szmirnov*-próba erőfüggvényét egyenlő mintadarabszámok esetén, vagyis a *Gnyegyenko—Koroljuk* esetben éspedig, ha nullhipotézisként mindkét változóra a [0, 1] intervallumban az egyenletes eloszlást választjuk, míg ellenhipotézisként ugyanezen intervallumban az egyik eloszlásfüggvény az egyenletes, a másik pedig szakaszonként lineáris, folytonos[2] eloszlásfüggvény.

A próbák tulajdonságainak vizsgálata szempontjából a [0, 1] intervallumra való szorítkozás nem lényeges. Ugyanakkor meggondolásainkból kitűnik, hogy módszerünk alkalmazható más nemparaméteres próbák esetén is és az erőfüggvény explicit, számolásra alkalmas felírhatóságának feltétele lényegében az, hogy a próbánál alkalmazott statisztika eloszlása nullhipotézisre explicite felírható legyen. Esetünkben a *Gnyegyenko—Koroljuk* eloszlások, illetve azok bizonyos módosított alakjai kerülnek alkalmazásra, amely eloszlásokat a szerző REIMANN JÓZSEFfel közös cikkében [6] használt.

A kétmintás *Szmirnov*-próba erőfüggvényének explicit előállítását HOEFFDING [3] adta meg azáltal, hogy a két minta elemei minden lehető sorrendjének valószínűségét felírta adott folytonos ellenhipotézisre. E valószínűségeket kell összegezni a kritikus tartományra, amely előállítás azonban igen bonyolult, aszimptotikus vizsgálatra nem alkalmas. LEHMANN [4] alkalmazta e formulát egyszerű ellenhipotézisekre és kisszámú mintadarabokra ($m=n=4,6$) kiszámította az erőfüggvényt.

Mind az egymintás *Kolmogorov*-próba esetén, mind a kétmintás *Kolmogorov—Szmirnov* esetben MASSEY [5] a következőképpen járt el: Tekintette a változónak olyan értékét, amelyre a nullhipotézist és az alternatívát adó két eloszlásfüggvény (illetve kétmintás esetben az alternatívát adó két eloszlásfüggvény) eltérése maximális. Annak valószínűsége már most, hogy az empirikus és az elméleti eloszlásfüggvény, illetve a két empirikus eloszlásfüggvény eltérése *e kiválasztott helyen* nagyobb, mint egy adott érték, kisebb, minthogy a megfelelő szuprémum, tehát a különbség *valahol* nagyobb, mint az illető érték. Ez utóbbi esemény azonban — az állandó kellő megválasztásával — a kritikus tartományt adja és ily módon

[1] A szerző e cikkben foglalt eredményeit először az *Oberwolfach*ban 1964 aug. 2—7-ig tartott *valószínűségszámítás és matematikai statisztika* tárgyú kollokviumon adta elő.

[2] Megjegyezzük, hogy ami tételünk bizonyításánál is kitűnik, a folytonosság nem lényeges kikötés, véges sok szakadáspont megengedhető volna.

az erőfüggvényt alulról becsültük egyetlen pontbeli esemény valószínűségével, amely valószínűség binomiális kifejezések összege. E szellemes módszert azóta is sokszor alkalmazták. Legutóbb J. ROSENBLATT [7] mutatott rá, hogy MASSEY, aki a binomiális eloszlást normálissal közelítette, jelentősen eltért a pontos értéktől és — igen bonyolult iterációval — javította is a módszert.

Lényegében e két módszerben fellelhető gondolatokat alkalmazták az erőfüggvény vizsgálatánál más szerzők is, mint Z. W. BIRNBAUM [1], I. R. SAVAGE [8], D. G. CHAPMAN [2]. E szerzők vizsgáltak szakaszonként lineáris alternativákat is elsősorban bizonyos, az alternatívák terében értelmezett távolságokhoz tartozó extrém helyzeteknek megfelelő maximum és minimum alternatívákat. Érdekessége van azonban más típusú, szakaszonként lineáris függvényekből előállítható alternatívák vizsgálatának is és erre irányulnak szerző jelen és további vizsgálatai.

A következőkben az általános esetre érvényes formula felírása után, „igen közeli" alternatívákat vizsgálunk, majd bizonyos alternatívákra — kis minták esetén — első- és másodfajú hibákat adunk meg. Tekintettel arra, hogy a 20—50-es mintadarabszám a gyakorlatban eléggé sokszor kerül alkalmazásra, e számított értékek tájékoztatást nyújtanak, hogy milyen ellenhipotézisekre van értelme ilyen nagyságú minták esetén a próbát egyáltalán alkalmazni. Szerző e kérdések további vizsgálatára vissza kíván térni.

1. §. Az erőfüggvény a Gnyegyenko—Koroljuk esetben lineáris szakaszokból álló ellenhipotézis esetén

Legyenek ξ és η valószínűségi változók $F(x)$, ill. $G(x)$ folytonos eloszlásfüggvényekkel és vizsgáljuk a

$$H_0: G(x) \equiv F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0 \\ x, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 \leqq x \end{cases}$$

nullhipotézist a

$$H_1^{(r)}: \begin{cases} F(x) \text{ a } H_0 \text{ alatti egyenletes eloszlás} \\ G'_{(x)} = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0 \\ g_i, & \text{ha } z_{i-1} \leqq x < z_i. \qquad i = 1, 2, \dots r \\ 0, & \text{ha } 1 \leqq x \end{cases} \end{cases}$$

alternatívával szemben, ahol $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_r = 1$. A g_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ értékekre természetesen az

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{r} g_i(z_i - z_{i-1}) = 1$$

összefüggés teljesül.

Tekintsük ξ-re és η-ra a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ill. $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ független elemekből álló két mintát, jelöljék az ezekhez tartozó empirikus eloszlásfüggvényeket $F_n(x)$, ill. $G_n(x)$. A statisztikai probléma eldöntésére a *Szmirnov*-féle

$$D_{n,n} = \frac{1}{n} \max |F_n(x) - G_n(x)|$$

próbafüggvényt választjuk.

Ha az alkalmazott próba terjedelme α $(0<\alpha<1)$ és $\mathbf{P}(D_{n,n}<d_\alpha|H_0) = 1-\alpha$, akkor a kritikus tartományt ama minták összessége adja, amelyekre a

$$\{D_{n,n} \geqq d_\alpha\}$$

esemény teljesül.

A próba erőfüggvénye,

$$K_n(H_1, \alpha) = \mathbf{P}(D_{n,n} \geqq d_\alpha|H_1).$$

Tételünk megfogalmazásához még egy további esemény valószínűségére vezetünk be jelölést. Tekintsük a két minta rendezett alakját:

$$\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_n^*,$$

$$\eta_1^* < \eta_2^* < \ldots < \eta_n^*$$

és ezeknek egyetlen rendezett sorozatba való egyesítését:

$$\zeta_1^* < \zeta_2^* < \ldots < \zeta_{2n}^*.$$

Vezessük be a ϑ_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$ valószínűségi változókat a szokásos módon:

$$\vartheta_i = \begin{cases} +1, & \text{ha } \zeta_i^* = \xi_j^* \\ -1, & \text{ha } \zeta_i^* = \eta_l^* \end{cases}$$

teljesül valamely j, illetve l indexre.

Ha most s_j jelöli a ϑ_i sorozat j-edik részletösszegét, vagyis $s_0=0$,

$$s_j = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_j, \qquad j=1, 2, \ldots, 2n,$$

$s_{2n}=0$, akkor mint ismeretes és egyszerűen belátható:

$$D_{n,n} = \frac{\max\limits_{(i)} |s_i|}{n}.$$

Ugyancsak jól ismert és egyszerű tény, hogy H_0 fennállása esetén a $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{2n})$ valószínűségi változókból álló sorozatban az n számú $+1$ és n számú -1 minden lehetséges sorrendje egyenlően valószínű, vagyis minden sorrend valószínűsége $\binom{2n}{n}^{-1}$. Tekintsük most a sík (i, s_i) koordinátájú pontjait $i=0, 1, \ldots, 2n$-re, vagyis a két mintához rendelt bolyongás egy útját. Rögzítsük ezen út $0 = i_0 \leqq i_1 \leqq \ldots \leqq i_r = 2n$ abszcisszájú pontjaihoz tartozó ordinátákat az $s_{i_0}=0$, $s_{i_1}=a_{i_1}, \ldots, s_{i_j}=a_{i_j}, \ldots, s_{i_r}=0$ értékekben, ahol feltesszük, hogy a megadott értékek egy lehetséges úthoz tartoznak, vagyis a

$$(1.1) \qquad -(i_m-i_{m-1}) \leqq a_{i_m}-a_{i_{m-1}} \leqq i_m-i_{m-1} \qquad m=1, 2, \ldots, r$$

feltételek teljesülnek. Legyen végül

$$\mathbf{p}_n(k; a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) = \mathbf{P}\Big(\max_{i_{m-1}<j<i_m} |s_j|<k \,|\, s_{i_{m-1}} = a_{i_{m-1}}, s_{i_m} = a_{i_m}\Big),$$

ahol e valószínűségek a H_0 hipotézis mellett értendők. A következő tételünkben az (i_m-i_{m-1}) szám azt adja meg, hogy összesen hány mintaelem esik a (z_{m-1}, z_m)

intervallumba, amit $\nu_m + \mu_m$ fog jelölni, ti. ν_m a ξ_i-k, μ_m az η_j-k számát fogja adni a megjelölt intervallumban; vagyis $i_m = \sum_{j=1}^{m} (\mu_j + \nu_j)$. A $p_n(k; a_{i_{m-1}}, a_{i_m})$ valószínűség értéke természetesen 0, ha $|a_{i_{m-1}}|$ vagy $|a_{i_m}|$ valamelyike $\geqq k$.

Bevezetett jelöléseinkkel érvényes a következő

TÉTEL: *Az α terjedelmű kétmintás Kolmogorov—Szmirnov-próba ereje a fent definiált $H_1^{(r)}$ alternatíva esetén,*

$$K_n(H_1^{(r)}, \alpha) = 1 - (n!)^2 \sum_{\{\nu\}}{}^{*} \sum_{\{\mu\}}{}^{*} \prod_{m=1}^{r} \frac{g_m^{\mu_m}(z_m - z_{m-1})^{\nu_m + \mu_m}}{\nu_m!\, \mu_m!} \cdot$$

$$\cdot p_n\left(d_\alpha;\ s_{i_{m-1}} = \sum_{j=1}^{m-1} (\nu_j - \mu_j),\ s_{i_m} = \sum_{j=1}^{m} (\nu_j - \mu_j)\right),$$

ahol Σ^* r-szeres összegezést jelent minden olyan $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$, ill. $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ értékrendszerre, amelyre a $0 \leqq \nu_m, \mu_m \leqq n$, $m = 1, 2, \ldots, r$, továbbá a $\sum_{m=1}^{r} \mu_m = \sum_{m=1}^{r} \nu_m = n$ feltétel teljesül.

Megjegyzés: E formula egyszerű szerkezetű, nem túl nagy r esetén számolásra alkalmas és kezelhetőbb, mint a többszörös integrálokon alapuló kifejezések; természetesen meghatározásának feltétele a H_0 érvényességét feltételező p_n valószínűségek ismerete. A bizonyításban, mint látni fogjuk, nem használjuk ki lényegesen, hogy éppen a *Kolmogorov—Szmirnov*-próbáról van szó, vagyis más rendezett mintás próbára is hasonló jellegű az erőfüggvény. A p_n valószínűségeket, melyek egyszerűen meghatározhatók, itt nem adjuk meg, csak a 2. §-ban tárgyalt speciális esetekben.

A bizonyításhoz néhány jól ismert egyszerű lemmát használunk fel. Nem szorul bizonyításra a következő

1. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye állandó az (a, b) $(0 \leqq a < b \leqq 1)$ intervallumban. Ekkor ama feltétel mellett, hogy ξ az (a, b) intervallumba esik, ott egyenletes eloszlású.*

E segédtétel egyszerű következménye az

1. 2. SEGÉDTÉTEL: *Legyenek a ξ és η folytonos valószínűségi változók sűrűségfüggvényei a* $(0, 1)$ *intervallum* (a, b) *részintervallumában (nem szükségképpen azonos értékű) állandók. Essenek a ξ-re vonatkozó $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(\nu)}$, valamint az η-ra vonatkozó $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(\mu)}$ független mintaelemek az (a, b) intervallumba. E feltétel mellett az (a, b) intervallumba eső ezen $\nu + \mu$ számú mintaelem minden sorrendje egyenlő valószínűségű.*

Tekintsük most a tételben szereplő ξ-re és η-ra vonatkozó egyenként n elemű mintákat és jelöljük azt az eseményt, hogy az első minta elemei közül ν_m számú esik a (z_{m-1}, z_m), $(m = 1, 2, \ldots, r)$ intervallumba $\{\nu\}$-vel; hasonló jelentést tulajdonítunk a második mintára vonatkozóan a $\{\mu\}$ jelölésnek. Ekkor érvényes a következő reláció:

$$\mathbf{P}(D_{n,n} < d_\alpha | H_1) = \sum_{(\nu)}{}^{*} \sum_{(\mu)}{}^{*} \mathbf{P}(D_{n,n} < d_\alpha | \{\nu\}, \{\mu\}, H_1)\, \mathbf{P}(\{\nu\}, \{\mu\}, H_1).$$

A ν_m-ek együttes eloszlása polinomiális, ugyanez áll a μ_m-ekre is, tehát

$$\mathbf{P}(\nu_1 = n_1, \nu_2 = n_2, \dots \nu_r = n_r | H_1) = n! \prod_{m=1}^{r} \frac{(z_m - z_{m-1})^{n_m}}{n_m!},$$

tekintettel arra, hogy a ξ_j-k $(z_m - z_{m-1})$ valószínűséggel esnek a (z_{m-1}, z_m) intervallumba; ugyanez a valószínűség az η_l-ekre $(z_m - z_{m-1})g_m$, és így

$$\mathbf{P}(\mu_1 = n_1, \mu_2 = n_2, \dots \mu_r = n_r | H_1) = n! \prod_{m=1}^{r} \frac{[(z_m - z_{m-1})g_m]^{n_m}}{n_m!}.$$

Továbbá a $\{\nu\}$ és $\{\mu\}$ események függetlensége miatt

$$\mathbf{P}(\{\nu\}, \{\mu\} | H_1) = \mathbf{P}(\{\nu\} | H_1), \mathbf{P}(\{\mu\} | H_1).$$

Határozzuk most meg a $\mathbf{P}(D_{n,n} < d_\alpha | \{\nu\}, \{\mu\}, H_1)$ valószínűségeket. Tekintsük evégből a

$$D_{n,n}(x) = F_n(x) - G_n(x), \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

folyamatot. Nyilvánvaló a

$$\{D_{n,n} < d_\alpha, \{\nu\}, \{\mu\}\} = \bigcap_{m=1}^{r} \{|D_{n,n}(x)| < d_\alpha, z_{m-1} \leqq x < z_m, \{\nu\}, \{\mu\}\}$$

összefüggés. *A jobb oldalon álló események rögzített $\{\nu\}$, $\{\mu\}$ értékrendszerek mellett függetlenek.* Ezt beláthatjuk a bolyongási modell segítségével. Ugyanis a (0, 0)-ból induló és $2n$ lépés után a $(2n, 0)$-ba visszatérő bolyongás r részre tagozódik, minden rész elején és végén a lépésszám, valamint a bolyongó pont helyzete adott; éspedig az m-edik $(m = 1, 2, \dots, r)$ intervallum utolsó mintaelemének a $\sum_{j=1}^{m} (\nu_j + \mu_j)$ lépésszám és a $\sum_{j=1}^{m} (\nu_j - \mu_j)$ helyzet (origótól való eltávolodás) felel meg. Márpedig 1. 2 segédtételünk szerint két ilyen lépés között minden lehetséges út (sorrend) egyenlő — $\binom{\nu_m + \mu_m}{\nu_m}^{-1}$ — valószínűségű, függetlenül az előző és következő intervallumban fellépő eseményektől. Eszerint felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{P}(D_{n,n} < d_\alpha | \{\nu\}, \{\mu\}) = \prod_{m=1}^{r} \mathbf{P}\{|D_{n,n}(x)| < d_\alpha, z_{m-1} \leqq x < z_m, \{\nu\}, \{\mu\}\}.$$

Megjegyzésünk szerint azonban ez a valószínűség megegyezik az

$$\prod_{m=1}^{r} p_n(d_\alpha, s_{i_{m-1}} = \sum_{j=1}^{m-1} (\nu_j - \mu_j), \; s_{i_m} = \sum_{j=1}^{m} (\nu_j - \mu_j))$$

kifejezéssel és így tételünket bebizonyítottuk.

2. §. Két lineáris szakaszból álló alternatívák vizsgálata

1. Legyen $r=2$ és $z_0=0, z_1=z, z_2=1$ $(0<z<1)$, továbbá $g_1=g$ $(0\leqq g<1)$, amiből $g_2=\frac{1-gz}{1-z}$ adódik; ebben az esetben a mintaelemek megoszlására a két intervallumban a $\nu_1=\nu$, $\nu_2=n-\nu$, $\mu_1=\mu$, $\mu_2=n-\mu$ jelöléseket alkalmazhatjuk. Minthogy most $G(x)<F(x)$, egyoldali ellenhipotézisről van szó, ennélfogva egyoldali próbát alkalmazhatunk, amikor is a $d_\alpha=\frac{k}{n}$ jelöléssel a

$$p_n(k;\, s_{i_0}=0,\, s_{i_1}=\nu-\mu)=1-\frac{\binom{\nu+\mu}{\nu-k}}{\binom{\nu+\mu}{\nu}},$$

$$p_n(k;\, s_{i_1}=\nu-\mu,\, s_{i_2}=0)=1-\frac{\binom{2n-\nu-\mu}{n-\nu+k}}{\binom{2n-\nu-\mu}{n-\nu}}$$

kifejezések adják a megfelelő — k magasságot el nem érő — utak valószínűségét az első, ill. második intervallumban a $\{\nu, n-\nu\}$, $\{\mu, n-\mu\}$ feltételek mellett. Ha a

$$C_{\nu,\mu}^{n,k}=\left(1-\frac{\binom{\nu+\mu}{\nu-k}}{\binom{\nu+\mu}{\nu}}\right)\left(1-\frac{\binom{2n-\nu-\mu}{n-\nu+k}}{\binom{2n-\nu-\mu}{n-\nu}}\right)$$

jelölést bevezetjük, akkor az erőfüggvény a következő:

$$1-\sum_{\nu}{}^{*}\sum_{\mu}{}^{*}\binom{n}{\nu}z^{\nu}(1-z)^{n-\nu}\binom{n}{\mu}(gz)^{\mu}(1-gz)^{n-\mu}C_{\nu,\mu}^{n,k}, \tag{2.1}$$

ahol az összegezés a $0\leqq\nu\leqq n$, $0\leqq\mu\leqq n$, $\nu-\mu<k$ feltételeknek eleget tevő ν, μ indexekre veendő.

E formulából máris érdekes következtetést vonhatunk le: ha $n\to\infty$, akkor egyrészt $k\sim y\sqrt{2n}$, másrészt $\nu\sim nz+\lambda\sqrt{nz(1-z)}$, $\mu\sim nzg+\lambda'\sqrt{ngz(1-gz)}$, vagyis a

$$\nu-\mu\sim nz(1-g)+\lambda\sqrt{nz(1-z)}-\lambda'\sqrt{nzg(1-zg)}<y\sqrt{2n} \tag{2.2}$$

követelmény csak végtelen felé tartó λ-kra teljesíthető, amikor is a megfelelő valószínűségek (valószínűség-sűrűségek) már összességükben 0-hoz tartanak. Ily módon ν az n nagyságrendet el sem érheti és így a binomiális valószínűségek nem közelíthetők — ν esetében — normális eloszlással. Ezt a megjegyzést, mint említettük — MASSEY eljárásával szemben — már J. ROSENBLATT kifejezésre juttatta.

Ha a $\max\big(F(x)-G(x)\big) = \Delta$ jelölést vezetjük be, akkor $\Delta = z-zg = z(1-g)$ és az erőfüggvény a következő alakban írható:

$$1-\sum_{\nu}{}^{*}\sum_{\mu}{}^{*}\binom{n}{\nu}\binom{n}{\mu}C_{\nu,\mu}^{n,k}z^{\nu+\mu}(1-z)^{2n-\nu-\mu}\left(1-\frac{\Delta}{z}\right)^{\mu}\left(1+\frac{\Delta}{1-z}\right)^{n-\mu}. \tag{2. 3}$$

Minthogy $\Delta=0$-ra $F(x)\equiv G(x)$, ennélfogva z-ben a következő azonosságot kapjuk:

$$1-\sum_{\substack{\nu \\ \nu-\mu<k}}{}^{*}\sum_{\mu}{}^{*}\binom{n}{\nu}\binom{n}{\mu}C_{\nu,\mu}^{(n,k)}z^{\nu+\mu}(1-z)^{2n-\nu-\mu}\equiv 1-\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}.$$

2. Tekintsünk most igen közeli alternatívát, pontosabban legyen $\Delta\sim c/n$. Minthogy ebben az esetben (2. 2)-ből

$$\nu-\mu\sim c+\lambda\sqrt{nz(1-z)}-\lambda'\sqrt{nz(1-z)\left(1-\frac{c}{nz}\right)\left(1+\frac{c'}{n(1-z)}\right)},$$

a binomiális valószínűségek kivételesen normális eloszlással közelíthetők. Ahelyett, hogy e kissé bonyolult, de egyszerűen keresztülvihető számításba bocsátkoznánk, megjegyezzük, hogy a ν-re és μ-re (2. 2)-ben alkalmazott közelítéssel az

$$\left(1-\frac{\Delta}{z}\right)^{\mu}\left(1+\frac{\Delta}{1-z}\right)^{n-\mu}\sim 1$$

reláció adódik és így az erőfüggvény értéke $n\to\infty$ esetén $-c$-től függetlenül, α-hoz tart. A *Kolmogorov—Szmirnov*-próba tehát ebben az esetben is torzítatlan, ami egyoldali próbánál általánosabb tételből is adódik (l. CHAPMAN [2]).

3. Legyen most $g=0$, amikor is $\max\big(F(x)-G(x)\big) = F(z)-G(z) = z$. Ebben az esetben $\mathbf{P}(\mu=0|H_1) = 1$ és így az erőfüggvény a következő egyszerű alakú

$$1-\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{n}{\nu}z^{\nu}(1-z)^{n-\nu}\left(1-\frac{\binom{2n-\nu}{n-\nu+k}}{\binom{2n-\nu}{n-\nu}}\right). \tag{2. 4}$$

A $z=\Delta\sim c/n$ közeli alternativa ismét az előbbi eredményre vezet. Ekkor ugyanis a binomiális eloszlás *Poisson*-közelítését alkalmazhatjuk:

$$\binom{n}{\nu}z^{\nu}(1-z)^{n-\nu}\sim\frac{c^{\nu}}{\nu!}e^{-c},$$

továbbá minden véges ν-re és $k\sim y\sqrt{2n}$ esetén

$$\frac{\binom{2n-\nu}{n-\nu+k}}{\binom{2n-\nu}{n-\nu}}\sim e^{-2y^2}.$$

Ezekből az erőfüggvény határértéke $n \to \infty$ esetén

$$1-\left(1-e^{-2y^2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c^\nu}{\nu!}e^{-c}=e^{-2y^2}=\alpha.$$

4. Térjünk a $g=0$, tehát $\Delta=z$ esetben numerikus értékekre. Ez az alternatíva a Δ-hoz tartozó maximum és minimum alternatívák között helyezkedik el és így tájékoztatást kapunk egy „közbeeső" alternatíva esetében a *Szmirnov*-próba erejéről. Az erőfüggvény (2. 4) kifejezése az

$$\binom{n}{\nu}\frac{\binom{2n-\nu}{n-\nu+k}}{\binom{2n-\nu}{n-\nu}}=\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}\binom{n+k}{\nu}=\alpha\binom{n+k}{\nu}$$

összefüggés alapján a következőképpen írható:

$$1-\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{n}{\nu}z^\nu(1-z)^{n-\nu}+\frac{\alpha}{(1-z)^k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{n+k}{\nu}z^\nu\cdot(1-z)^{n+k-\nu}= \tag{4. 1}$$

$$=1-B(1-z;\, n-k+1, k)+\frac{\alpha}{(1-z)^k}B(1-z;\, n+1,\, k),$$

ahol

$$B(z;\, p, q)=\frac{\int_0^z t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}$$

a nem teljes Beta-függvényt jelenti. A (4. 1) formulával a számolás könnyűszerrel keresztülvihető a binomiális együtthatók és a nem teljes Beta-függvény táblázatának használatával. Tekintettel az $n \sim 20-50$ nem nagy értékeire az elsőfajú hiba nem volt eleve tetszőlegesen megadható és oly módon választottuk, hogy értéke a 10% közelében legyen; ehhez számítottuk azután a $\Delta=z=0{,}05$; $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ távolságoknak megfelelő másodfajú hibákat. Az eredményeket az alábbi táblázat tünteti fel.

A másodfajú hiba nagysága, ha $\Delta=z$ ($n=50$-re extrapoláció útján nyert értékek)

n	k	α	0,05	0,1	0,2	0,3
20	6	0,1684		0,6842	0,4332	0,1837
20	7	0,0873		0,8177	0,6163	0,3363
25	7	0,1428		0,7026	0,4154	0,1446
30	8	0,1197		0,7230	0,4039	0,1164
35	9	0,0996		0,7438	0,3961	0,0950
40	9	0,1331		0,6587	0,2640	0,0377
45	10	0,1091	0,8178	0,6890	0,2670	0,0319
50	11	0,0893	0,8430	0,7190	0,2700	0,0265

IRODALOM

[1] BIRNBAUM, Z. W.: On the power of a one-sided test of fit for continuous distribution functions, *Ann. Math. Stat.*, **24** (1953) 284–289.

[2] CHAPMAN, D. G.: A comparative study of several one- sided goodness-of-fit tests, *Ann. Math. Stat.* **29** (1958) 655–674.

[3] HOEFFDING, W.: Optimum nonparametric tests, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley* (1951) 83–92.

[4] LEHMANN, E. L.: The power of rank tests, *Ann. Math. Stat.* **24** (1953) 23–42.

[5] MASSEY, F. J.: A note on the power of a nonparametric test, *Ann. Math. Stat.* **21** (1950) 440–443.

[6] REIMANN J.—VINCZE I.: On the comparison of two samples with slightly different sizes, *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* (sajtó alatt).

[7] ROSENBLATT, J.: Some modified Kolmogorov—Smirnov tests of approximate hypotheses and their properties, *Ann. Math. Stat.* **33** (1962) 513–524.

[8] SAVAGE, I. R.: Contributions to the theory of rank order statistics — the two sample case, *Ann. Math. Stat.* **27** (1956) 590–615.

(Beérkezett: 1965. II. 25.)

FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, IV.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

Bevezetés

Ebben a dolgozatban azoknak az eredményeknek az ismertetésére kerül sor, melyek az n-dimenziós — időben diszkrét — stacionárius, *Gauss—Markov*-folyamatok paramétereinek becslésével s azok eloszlásaival kapcsolatosak. A kézikönyvekben (vö. pl. GRENANDER—ROSENBLATT [8]) az A matrix (lásd alább az (1. 2) összefüggést) sajátértékeire tett kikötésekkel történnek a paraméterbecslések és azok eloszlásainak meghatározása. Ez bizonyos előismeretet követel meg a folyamatról magáról s elsősorban az ismeretlen A matrixról, a gyakorlatban azonban ez a legtöbbször hiányzik. A dolgozatban egy olyan lehetséges tárgyalási módot mutatok be, melynek segítségével az általános feladat bizonyos speciális esetei könnyen visszavezethetők az egydimenziós valós és komplex esetre (egyszeres sajátértékek esetén), másrészt az általános feladat megoldása is könnyebben kezelhetővé válik. Az A matrix (vagy differenciálegyenletek esetén a Q-matrix) *Jordan*-féle alakban történő felírása azonban nem a probléma statisztikai, hanem előzetes nem-sztochasztikus vizsgálatát teszi szükségessé. Amennyiben ez nem lehetséges, az egyes feladatok megoldása igen bonyolult s igen hosszú megfigyeléssorozatra van szükség az egyes paraméterek megbízható becsléséhez (emlékeztetni kell arra, hogy matrixok sajátértékei meghatározása komoly numerikus nehézségeket jelent). Megmutatom, hogy mely paraméterek becsülhetők jól (azaz kevesebb megfigyelés alapján is nagyobb pontossággal). Ismertetem a tárgyalt folyamatok elégséges statisztikáira vonatkozó korábbi eredményeket [5] is. A többdimenziós stacionárius folyamatok elméletére vonatkozó eredmények megtalálhatók ROZANOV [11] nemrég megjelent könyvében, melyre gyakran utalás nélkül is hivatkozom. A dolgozat alapvető eredményei disszertációmban [4] szerepeltek, azonban nyomtatásban nem jelentek meg.

A dolgozatban sehol nem történik hivatkozás konkrét gyakorlati feladatokra, megemlítem elsősorban a híradástechnikai és közgazdasági alkalmazások jelentőségét (l. pl. QUENOUILLE [10] könyvecskéjében szereplő példákat).

AZ IDŐBEN DISZKRÉT n-DIMENZIÓS STACIONÁRIUS, NORMÁLIS ESET

1. §. Konstans együtthatós sztochasztikus differenciál- és differenciaegyenletrendszer

Ha a $\xi_k(t)=\{\xi_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ n-dimenziós reguláris folyamat stacionárius, *Gauss—Markov* típusú, akkor — éppen úgy, mint az egy- és kétdimenziós esetben — kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet

$$d\xi(t) = Q\cdot\xi(t)dt + d\zeta(t), \tag{1. 1}$$

ahol $Q=\{q_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ egy négyzetes matrix, melynek λ_i sajátértékeire fennáll, hogy $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0$, és $\zeta(t)=\{\zeta_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ egy n-dimenziós *Wiener*-folyamat; $\mathbf{M}\Delta\zeta_k(t)=0$, $\mathbf{M}\Delta\zeta_i(t)\Delta\zeta_j(t)=\Delta t\cdot s_{ij}$, $\{s_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ pozitív definit. A Q matrix egyértelműen meg van határozva. (Lásd Doob [6]).

A $\xi(k\varepsilon)$ $(\varepsilon>0, k=0, \pm 1, \dots)$ folyamat diszkrét stacionárius *Gauss—Markov* típusú és így kielégíti a (legyen az egyszerűség kedvéért $\varepsilon=1$)

$$\xi(k+1) = A\xi(k)+\zeta(k+1) \tag{1.2}$$

egyenletet, ahol $\zeta(k)$ egy független *Gauss* sorozat. Az A matrix ϱ_i és a Q matrix λ_i sajátértékei között a következő összefüggés áll fenn: $\varrho_i=e^{\lambda_i}$.

Az R^n térben az S nemszinguláris matrix segítségével végrehajtott lineáris leképezéssel a Q és A matrixok $Q'=SQS^{-1}$, ill. $A'=SAS^{-1}$ matrixokba mennek át és a $\xi'=S\xi$ valószínűségi változókra vonatkozó differenciál-, ill. differencia-egyenlet

$$d\xi'(t) = Q'\xi'(t)dt+d\zeta'(t), \tag{1.1'}$$

illetve

$$\xi'(k+1) = A'\xi'(k)+\zeta'(k+1) \tag{1.2'}$$

alakú lesz, ahol $\zeta'=S\zeta$. Az S matrix megfelelő választásával elérhető, hogy $Q'(A')$ a lehető legegyszerűbb alakú legyen. Általában egy tetszőleges matrix nem hozható diagonális alakra, azonban az ún. *Jordan*-féle alakra hozás minden matrixra elvégezhető.

Az m-edrendű matrixot *Jordan*-féle elemi matrixnak nevezzük, ha

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \lambda \end{pmatrix},$$

alakú. Egy B matrixról akkor mondjuk, hogy *Jordan*-típusú, ha egy vagy több elemi *Jordan*-féle matrixból áll, melyek a főátlója mentén helyezkednek el, míg a matrix összes többi eleme nullával egyenlő.

Az R^n tér $h_1, \dots, h_m$ vektorsorozatát a B matrix λ sajátértékéhez tartozó *szériának* nevezzük ha teljesül, hogy $h_1\neq 0$, $Bh_1=\lambda h_1$, $Bh_2 = \lambda h_2+h_1, \dots, Bh_m = \lambda h_m+h_{m-1}$. Igaz a következő tétel, mely azt mutatja, hogy tetszőleges matrix *Jordan*-típusú alakra hozható. (Lásd pl. Pontrjagin [9] 34. §).

Tétel. Az R^n térnek létezik olyan bázisa, mely a B matrix által meghatározott leképezés egy vagy több szériájához tartozó összes vektorokból áll. Ha B valós, a bázist alkotó szériák kiválaszthatók úgy, hogy a valós sajátértékeknek megfelelő szériák valósak legyenek, és a komplex sajátértékű szériák pedig páronként komplex konjugáltak legyenek.

A tételben említett koordinátarendszerben a B matrixnak megfelelő leképezésnek egy új matrix szerinti leképezés felel meg s ez az új matrix már *Jordan*-típusú.

Az (1. 1') és (1. 2') egyenletek (elhagyva a vesszős jelölést) a következő alakúak lesznek a *Jordan*-féle alakra hozás után:

$$
\begin{aligned}
d\xi_1(t) &= \lambda_1\xi_1(t)dt+\xi_2(t)dt+d\zeta_1(t)\\
d\xi_2(t) &= \lambda_1\xi_2(t)dt+\xi_3(t)dt+d\zeta_2(t)\\
&\vdots\\
d\xi_{k_1}(t) &= \lambda_1\xi_{k_1}(t)dt+d\zeta_{k_1}(t)\\
d\xi_{k_1+1}(t) &= \lambda_2\xi_{k_1+1}(t)dt+\xi_{k_1+2}(t)dt+d\zeta_{k_1+1}(t)\\
&\vdots\\
d\xi_n(t) &= \lambda_r\xi_n(t)dt+d\zeta_n(t),
\end{aligned}
\tag{1. 3}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
\xi_1(k+1) &= \varrho_1\xi_1(k)+\xi_2(k)+\zeta_1(k+1)\\
&\vdots\\
\xi_{k_1}(k+1) &= \varrho_1\xi_{k_1}(k)+\zeta_{k_1}(k+1)\\
\xi_{k_1+1}(k+1) &= \varrho_2\xi_{k_1+1}(k)+\xi_{k_1+2}(k)+\zeta_{k_1+1}(k+1)\\
&\vdots\\
\xi_n(k+1) &= \varrho_r\xi_n(k)+\zeta_n(k+1).
\end{aligned}
\tag{1. 4}
$$

Ilyen alakú egyenletrendszer esetén az egy- és kétdimenziós esetben kapott eredmények minden különösebb nehézség nélkül átvihetők, hiszen sztochasztikus differenciálegyenletrendszerünk valós és komplex folyamatokra vonatkozó egyenletekre esett szét. A későbbiekben, amikor feltételezzük, hogy a *Jordan*-alakra hozás elvégezhető, csak egyetlen *Jordan*-féle blokkal fogunk foglalkozni.

2. §. Elégséges statisztikák

Kiszámítjuk a

$$\xi(t)+a_1\xi(t-1)+\ldots+a_p\xi(t-p) = \zeta(t) \tag{2. 1}$$

sztochasztikus differenciaegyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ stacionárius, *Gauss*-folyamat egy véges realizációjának sűrűségfüggvényét. Feltesszük, hogy $\mathbf{M}\xi(t)=0$ és a $\zeta(t)$ folyamat független valószínűségi változók sorozata (természetesen normális eloszlású). A $\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(N)$ valószínűségi változók kovariancia matrixa a stacionaritás miatt mindkét diagonálisra nézve szimmetrikus lesz és ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik R_N^{-1}-el jelölt inverze is. A $\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(N)$ változók sűrűségfüggvénye

$$p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(x_1,\ldots,x_N) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}|R_N|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(X_N R_N^{-1} X_N^*)\}$$

lesz. Az

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1\\
&\vdots\\
x_p &= x_p\\
x_{p+1}+a_1x_p+\ldots+a_px_1 &= z_{p+1}\\
&\vdots\\
x_N+a_1x_{N-1}+\ldots+a_px_{N-p} &= z_N
\end{aligned}
$$

leképezéssel (melynek determinánsa 1) és felhasználva azt, hogy a $(\xi(1), \dots, \xi(p))$ változók függetlenek a $\zeta(p+1), \dots, \zeta(N)$ változóktól, melyek eloszlását ismerjük, a függetlenségi feltevés szerint kapjuk, hogy

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(p), \zeta(p+1), \dots, \zeta(N)}(x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_N) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |R_p|^{-\frac{1}{2}} \sigma_\zeta^{-(N-p)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[(X_p R_p^{-1} X_p^*) + \frac{1}{\sigma_\zeta^2} \sum_{p+1}^{N} z_i^2 \right] \right\}$$

és innen

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(N)}(x_1, \dots, x_N) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |R_p|^{-\frac{1}{2}} \sigma_\zeta^{-(N-p)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(X_p R_p^{-1} X_p^*) + \frac{1}{\sigma_\zeta^2} \sum_{p+1}^{N} (x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_p x_{i-p})^2 \right] \right\}$$

A (2. 1) előállításból az R_N^{-1} matrixot a mindkét diagonálisra nézve szimmetrikusság felhasználásával teljesen meg tudjuk határozni. Legyen $a_0 = 1$, akkor

$$(2.2) \qquad \mathrm{R}_N^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0 a_1 & a_0 a_2 & \dots\ a_0 a_p & 0 & 0 \dots 0 \\ a_0 a_1 & a_0^2 + a_1^2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & \dots\ a_0 a_{p-1} + a_1 a_p & a_0 a_p & 0 \dots 0 \\ a_0 a_2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 & \dots & & \\ \vdots & & & & & \\ a_0 a_p & a_0 a_{p-1} + a_1 a_p & & \dots\ \sum_1^p a_i^2 & & \sum_1^{p-1} a_i a_{i+1} \dots \\ 0 & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & a_0^2 \end{pmatrix}$$

azaz az R_N^{-1} matrix r_{ij} eleme a következő alakú

$$(2.3) \qquad r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |i-j| > p+1 \\ \sum_{k=0}^{p-|j-i|} a_k a_{k+|j-i|}, & \text{ha } |i-j| \leqq p+1,\ p < i,\ j < N-p+1 \\ \sum_{k=0}^{i} a_k a_{k+j-i}, & \text{ha } i < p,\ i \leqq j \\ \sum_{k=0}^{i} a_k a_{k+(i-j)}, & \text{ha } j \leqq i \leqq p \end{cases}$$

Ezenkívül

$$(2.4) \qquad |R_N^{-1}| = |R_p^{-1}| \cdot \sigma_\zeta^{2(N-p)}.$$

DÜNKIN ismert tételéből [7], mely szerint

$$\log p(X, a) - \log p(X; a^0)$$

fix a^0 esetén szükséges és elégséges statisztikája a $p(X, a)$ eloszlásseregnek, és R_N^{-1} fenti alakjából következik a

2. 1 TÉTEL: *Ha a $\xi(t)$ stacionárius Gauss-folyamat kielégíti a* (2. 1) *egyenletet az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ $(N>p)$ minta*

$$\Big(\sum_{p+1}^{N-p} x_i^2,\ \sum_{p+1}^{N-p+1} x_i x_{i-1}, \ldots, \sum_{p+1}^{N} x_i x_{i-p},\ x_1^2+x_N^2,\ x_1x_2+x_Nx_{N-1}, \ldots x_1x_p+$$
$$+x_Nx_{N-p+1},\ x_1^2+x_{N-1}^2, \ldots, x_2x_p+x_{N-1}x_{N-p+1}, \ldots, x_p^2+x_{N-p+1}^2\Big)$$

rendszere szükséges és elégséges statisztikát alkot.

Ismeretes (lásd pl. ROZANOV [1]), hogy a (2. 1) egyenletnek eleget tevő folyamat spektrál sűrűségfüggvénye $e^{i\lambda}$ olyan racionális függvénye, melynek számlálója konstans. Kérdés, hogy általában a racionális spektrál sűrűségű folyamatok esetén található-e egy elégséges statisztikarendszer. Amint az alábbi példa mutatja, általában nem létezik ilyen (N-nél kevesebb elemet tartalmazó) rendszer. Tekintsük ugyanis a

$$\xi(t) = a_0\zeta(t)+a_1\zeta(t-1)$$

folyamatot, ahol $\zeta(t)$ egy független normális eloszlású sorozat. Legyen $\mathbf{M}\xi(t)=0$ és

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{M}\xi^2(t) = (a_0^2+a_1^2)\mathbf{M}\zeta^2(t),\quad \varrho = \frac{\mathbf{M}\xi(t)\xi(t-1)}{\sigma_\xi^2} = \frac{a_0a_1}{a_0^2+a_1^2}.$$

Nyilván

$$\mathbf{M}\xi(t)\xi(t-\tau) = 0, \quad \text{ha } |\tau|>1.$$

A $\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(N)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$p(y_1, \ldots, y_N) = \sigma_\xi^{-N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}|B_N|^{-\frac{1}{2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}^* y_i y_j\Big\}$$

alakú, ahol $B_N^{-1}=\{b_{ij}^*\}_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,N}}$ a B_N korrelációs matrix inverze. Könnyű kiszámítani, hogy

$$b_{ij}^* = (-1)^{j-i}\varrho^{|j-i|}|B_{i-1}|\,|B_{N-j}|\frac{1}{|B_N|},$$

ha $i<j$ és $|B_i| = \dfrac{u_1^{i+1}-u_2^{i+1}}{u_1-u_2}$ (az inverz matrix természetesen ismét szimmetrikus mindkét diagonálisra nézve.) Észre kell venni, hogy $|B_N|$ kielégíti a

$$|B_N| = |B_{N-1}|-\varrho^2|B_{N-2}|$$

differenciaegyenletet és u_1, u_2 az

$$u^2-u+\varrho^2 = 0$$

egyenlet gyökei, azaz $u_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4\varrho^2}}{2}$, $u_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4\varrho^2}}{2}$. Mivel pl. a b_{iN}^* $(i=1, \ldots, N)$ függvények mint ϱ függvényei függetlenek, nem létezik az $x_1, \ldots, x_N$ változók olyan függvényrendszere, mely elégséges statisztikarendszert alkotna (lásd DÜNKIN [7] 2. §.).

Többdimenziós folyamatok esetén csak azt a *Markov*-típusú stacionárius *Gauss*-folyamatot tekintsük, mely kielégíti a

$$\xi(t) = A\xi(t-1)+\zeta(t)$$

differenciaegyenletet, ahol $A=\{\alpha_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$, $\xi(t)=\{\xi_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\zeta(t)=\{\zeta_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$, és

$$\mathbf{M}\zeta_j(t)=0$$

$$\mathbf{M}\zeta_i(t)\zeta_j(t+\tau)=\begin{cases} s_{ij}, & \text{ha} \quad \tau=0 \\ 0, & \text{ha} \quad \tau\neq 0 \end{cases}$$

A $\zeta(t)$ sorozat független.

A $\xi(t)$ folyamat $B(\tau)$ korrelációs függvénye,

(2. 5) $$B(\tau)=A^{\tau}\cdot B(0)$$

alakú, ahol

(2. 6) $$B(0)=A\cdot B(0)\cdot A^*+B_\zeta(0).$$

A $B(0)$ matrix meghatározása a következő módon történhet akkor, amikor az A matrix egyetlen *Jordan*-féle blokkból áll és $B_\zeta(0)$ diagonális. A $\xi(t)$ folyamat ekkor eleget tesz a

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= \varrho\xi_n(t-1)+\zeta_n(t) \\ \xi_{n-1}(t) &= \varrho\xi_{n-1}(t-1)+\xi_n(t-1)+\zeta_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ \xi_1(t) &= \varrho\xi_1(t-1)+\xi_2(t-1)+\zeta_1(t) \end{aligned}$$

összefüggéseknek. Az első összefüggés mindkét oldalát beszorozva $\xi_n(t-1)$, majd $\xi_n(t)$-vel és minden alkalommal várható értéket képezve, a következő összefüggésekre jutunk

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\zeta_n(t)=s_n$$

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\xi_n(t-1)=\varrho\beta_{nn}^2, \quad \text{ahol} \quad \beta_{nn}=M\xi_n^2$$

$$\beta_{nn}=\varrho^2\cdot\beta_{nn}+s_n, \quad \beta_{nn}=\frac{s_n}{1-\varrho^2}.$$

Ugyancsak az első összefüggést $\xi_{n-1}(t)$-vel és $\xi_{n-1}(t-1)$-gyel beszorozva és várható értéket képezve, az

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\xi_{n-1}(t)=\varrho\mathbf{M}\xi_n(t-1)\xi_{n-1}(t)$$

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\xi_{n-1}(t-1)=\varrho\,\mathbf{M}\xi_n(t-1)\xi_{n-1}(t-1)$$

összefüggéseket kapjuk. Ezek felhasználásával a második egyenletnek $\zeta_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$, $\xi_{n-1}(t)$ és $\xi_n(t-1)$-gyel való beszorzása és a várható értékképzéssel azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\zeta_{n-1}(t)=s_{n-1}$$

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_n(t-1)=\frac{s_n}{(1-\varrho^2)^2}$$

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t-1)\xi_n(t)=\frac{\varrho^2 s_n}{(1-\varrho^2)^2}$$

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_{n-1}(t-1)=\varrho\beta_{n-1,n-1}+\frac{\varrho s_n}{(1-\varrho^2)^2}$$

$$\beta_{n-1,n-1}(1-\varrho^2)=s_n\frac{1+\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2}+s_{n-1}.$$

Ezt az eljárást folytatva a $B(0)$ matrix összes elemei meghatározhatók.

Feltettük, hogy a $\zeta(t)$ folyamat komponensei is függetlenek, másrészt a $\xi(1), \ldots$ $\ldots, \xi(N)$ változók és a $\xi(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(N)$ változók közötti (1. 1)-nek megfelelő leképezés determinánsa 1 lesz, ily módon

$$
\begin{aligned}
(2.7) \qquad & p_{\xi(1), \ldots, \xi(N)}(x_{11}, \ldots, x_{1N}; x_{21}, \ldots, x_{2N}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{nN}) = \\
& = (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}} |R_{Nn}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} X R_{Nn}^{-1} X^*\right\} = \\
& = p_{\xi(1)}(x_{11}, \ldots, x_{n1}) (2\pi)^{-\frac{(N-1)n}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n} s_i\right)^{-\frac{N-1}{2}} \cdot \\
& \cdot \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i+1}^{n} \frac{1}{2s_i} (x_{ij+1} - \alpha_{i1} x_{1j} - \ldots - \alpha_{in} x_{nj})^2\right\}
\end{aligned}
$$

ahol

$$
(2.8) \qquad p_{\xi(1)}(x_{11}, \ldots, x_{n1}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |B(0)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} X_1 B(0)^{-1} X_1^*\right\}
$$

A fenti összefüggésből látszik, hogy

$$
(2.9) \qquad |R_{Nn}| = |B(0)| \cdot \left(\prod_{i=1}^{N} s_i\right)^{N-1},
$$

ahol az R_{Nn}^{-1} matrix

$$
(2.10) \qquad \begin{pmatrix}
a_{10} & b_{11} & 0 \;\ldots\ldots\ldots\; 0 & a'_{12} & b_{12} & 0 \;\ldots\ldots\ldots\; 0 \;\ldots & a'_{1n} & b_{1n} & 0 \;\ldots\ldots\ldots\; 0 \\
b_{11} & a_{11} & b_{11} \;\ldots\ldots\ldots\; 0 & b'_{12} & a_{12} & b_{12} \;\ldots\ldots\ldots\; 0 \;\ldots & b'_{1n} & a_{1n} & b_{1n} \;\ldots\ldots\ldots\; 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & & a_{11} \;\; b_{11} & 0 & & a_{12} \;\; b_{12} & & & a_{1n} \;\; b_{1n} \\
0 & & b_{11} \;\; a''_{12} & 0 & & a'_{12} \;\; a''_{12} & & & b'_{1n} \;\; a''_{1n} \\
a'_{12} & b'_{12} & 0 \;\ldots\; 0 & 0 & a_{20} & b_{22} \;\; 0 \;\ldots\; 0 \;\ldots & & & \\
b_{12} & a_{12} & b'_{12} \;\ldots\; 0 & 0 & b_{22} & a_{22} \;\; b_{22} \;\ldots\; 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \\
0 & & & a''_{12} & & a_{22} \;\; b_{22} & & & \\
 & & & & & b_{22} \;\; a''_{22} \;\ldots & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
a'_{1n} & b'_{1n} & 0 \;\ldots\; 0 & 0 & & & a_{n0} & b_{nn} & 0 \;\ldots\; 0 \\
b_{1n} & a_{1n} & b'_{1n} \;\ldots\; 0 & 0 & & & b_{nn} & a_{nn} & b_{nn} \;\ldots\; 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & \\
0 & & \ldots a_{1n} & b'_{1n} & & & 0 & & \ldots a_{nn} \;\; b_{nn} \\
0 & & \ldots b_{1n} & a''_{1n} & & & 0 & & \ldots b_{nn} \;\; a''_{n0}
\end{pmatrix}
$$

alakú, az

$$
\begin{aligned}
a_{i0} &= \beta_{ii} + \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha_{ij})^2}{s_j}, \\
a''_{i0} &= \frac{1}{s_i} \\
a'_{ik} &= \beta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ik}}{s_j}, \quad a''_{ik}=0, \quad \text{ha} \quad k \neq i,\, k \neq 0, \qquad (2.11) \\
a_{ii} &= \frac{1+(\alpha_{ii})^2}{s_i} + \sum_{j\neq i} \frac{(\alpha_{ji})^2}{s_j}, \\
a_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{ji}+\alpha_{jk}}{s_j}, \quad k \neq i, \\
b_{ik} &= -\frac{\alpha_{ki}}{s_k}, \\
b'_{ik} &= -\frac{\alpha_{ik}}{s_i}, \quad B(0) = \{\beta_{ik}\}_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}},
\end{aligned}
$$

elemekkel. Ebből következik, hogy elégséges statisztika a

$$
\Big(\sum_{j=2}^{N} x_{ij}^2, \ \sum_{j=1}^{N} x_{i_1 j} x_{i_2 j}, \ \sum_{j=1}^{N-1} x_{i_1 j} x_{i_2 j+1}, \ i, i_1, i_2 = \overline{1,n}, \ x_{11}^2, \dots, x_{n1}^2, \ x_{1N}^2, \dots, x_{nN}^2,
$$

$$
x_{11}x_{21}, \ x_{11}x_{31}, \dots, x_{11}x_{n1}, \ x_{21}x_{31}, \dots, x_{21}x_{n1}, \dots, x_{n-1\,1}x_{n_1}\Big)
$$

rendszer lesz.

Példaként vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ekkor, amint az könnyen belátható

$$
A^\tau = e^{-\lambda\tau} \begin{pmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix}
$$

és

$$
B(0) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix},
$$

ahol

$$
\beta_{11} = \frac{\gamma[s_1(1-\alpha^2+\beta^2)+2\beta\alpha s_{12}] + \delta[s_2(1-\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta s_{12}]}{\gamma^2-\delta^2}
$$

$$
\beta_{12} = \frac{\beta_{22}\alpha\beta - \beta_{11}\alpha\beta + s_{12}}{1-\alpha^2+\beta^2}
$$

$$
\beta_{22} = \frac{\delta[s_1(1-\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta s_{12}] + \gamma[s_2(1-\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta s_{12})]}{\gamma^2-\delta^2}
$$

$$
e^{-2\lambda} = \alpha^2+\beta^2, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \gamma = (1-\alpha^2)^2 + \beta^2(1+\alpha^2), \quad \delta = \beta^2(1+\alpha^2+\beta^2),
$$

speciálisan, ha $s_{12}=0$, $s_{11}=s_{22}=s$,

$$B(0)=\frac{1}{1-\alpha^2-\beta^2}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Formálisan nyilvánvalóan felírható a sűrűségfüggvény abban az esetben is, amikor a $\zeta(k)$ valószínűségi változó komponensei nem függetlenek, a megfelelő összefüggések azonban túlságosan bonyolultak ahhoz, hogy itt ismertessük őket.

A későbbiekben viszont szükségünk lesz olyan folyamatok sűrűségfüggvényeinek meghatározására, melyek *Jordan*-típusú differenciálegyenletnek (egyetlen blokkal) tesznek eleget.

Legyen $\xi(t)=\{\xi_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ ilyen. Akkor az R_{Nn}^{-1} matrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ A_{12}' & A_{22} & A_{23} & 0 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & A_{n-1\,n-1} & A_{n-1\,n} \\ 0 & & & & A_{n-1\,n}' & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

alakú, ahol az A_{ik} matrixok

$$A_{i\,i+1}=\begin{pmatrix} a_{i\,i+1} & 0 & 0 \dots & & 0 \\ -\frac{1}{s_i} & \frac{\varrho}{s_i} & 0 \dots & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot\ \frac{\varrho}{s_i} & 0 \\ \cdot & & & & \\ 0 & & & -\frac{1}{s_i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$A_{ii}=\begin{pmatrix} a_{ii} & -\frac{\varrho}{s_i} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & -\frac{\varrho}{s_i} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & -\frac{\varrho}{s_i} \\ 0 & & & -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1}{s_i} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

alakúak.

Speciálisan az $n=2$ esetben könnyű kiszámítani, hogy

$$a_{11}=\frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)+s_2}+\frac{\varrho^2}{s_1}$$

$$a_{12}=-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}+\frac{\varrho}{s_1}$$

$$a_{22}=\frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]}+\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2}{s_2}.$$

Az általános esetben a

$$\xi(t)+C_1\xi(t-1)+\ldots+C_p\xi(t-p)=\xi(t)$$

differenciaegyenletnek eleget tevő n-dimenziós $\xi(t)$ folyamat vizsgálata tűnik természetesnek, mint az egydimenziós autoregressziós séma általánosítása. Az ilyen típusú folyamatokkal általánosan nem fogunk foglalkozni, bár a korrelációs-matrixra vonatkozó összefüggések ugyanúgy felírhatók, mint a $p=1$ esetben.

3. §. Regressziós problémák

A gyakorlatban legtöbbször nem az n-dimenziós folyamatot, $\xi(t)$-t figyeljük meg, hanem az

$$\eta(t)=C\cdot h(t)+\xi(t)$$

folyamatot, ahol a $h(t)=\{h_k(t)\}_{k=\overline{1,m}}$ függvények ismertek, míg a $C=\{c_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ matrix elemei ismeretlenek.

Az $\eta(t)$ folyamat megfigyelése esetén a c_{ij} regressziós együtthatók becslése az idősorok elméletének egyik központi problémája. A gyakorlatban leggyakrabban előforduló eset az, amikor a $h_k(t)$ függvények polinomok vagy trigonometrikus polinomok. Az alábbiakban az előző pontok eredményei alapján a maximum likelihood becslésekkel fogunk foglalkozni s ezen becslések bizonyos tulajdonságait vizsgáljuk meg.

Feltéve, hogy a $\xi(t)$ diszkrét folyamatot leíró egyenlet már (1. 4) alakú, vizsgáljuk egyetlen — valós sajátértékű — *Jordan*-féle blokk által leírt n-dimenziós folyamat sűrűségfüggvényét. Feltesszük, hogy a $\zeta(t)$ változó komponensei függetlenek, bár ezt a feltevést a gyakorlatban mindig ellenőrizni kell. A komplex sajátértékű eset vizsgálatát külön nem végezzük el. A tett feltevések mellett a $\xi(2), \ldots, \xi(N)$ változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x(1)$ feltétel mellett

$$C_N \exp -\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2s_1}(x_{1j+1}-\varrho x_{1j}-x_{2j})^2+\frac{1}{2s_2}(x_{2j+1}-\varrho x_{2j}-x_{3j})^2+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2s_{n-2}}(x_{n-1\,j+1}-\varrho x_{n-1\,j}-x_{nj})^2+\frac{1}{2s_n^2}(x_{nj+1}-\varrho x_{nj})^2\right]\right\},$$

alakú lesz. A $\xi(1)$ változó sűrűségfüggvénye a (2. 6) összefüggés alapján a $B(0)$

matrix meghatározásával számítható ki ($\mathbf{M}\zeta_j^2 = s_j$). Az előbbi pontban láttuk, hogy a feltételes sűrűségfüggvény:

$$
\begin{aligned}
C_N \exp -\frac{1}{2}\Bigg\{ & \frac{\varrho^2}{s_1} x_{11}^2 + \left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2}{s_2}\right) x_{21}^2 + \left(\frac{1}{s_2}+\frac{\varrho^2}{s_3}\right) x_{31}^2 + \ldots + \left(\frac{1}{s_{n-1}}+\frac{\varrho^2}{s_n}\right) x_{n1}^2 + \\
& + \frac{1}{s_1} x_{1N}^2 + \frac{1}{s_2} x_{2N}^2 + \ldots \qquad + \frac{1}{s_n} x_{nN}^2 + \\
& + \frac{2\varrho}{s_1} x_{11} x_{21} + \frac{2\varrho}{s_2} x_{21} x_{31} + \ldots \qquad + \frac{2\varrho}{s_{n-1}} x_{n-11} x_{n1} + \\
& + \frac{1+\varrho^2}{s_1} \sum_{2}^{N-1} x_{1i}^2 + \ldots \qquad + \frac{1+\varrho^2}{s_n} \sum_{2}^{N-1} x_{ni}^2 + \\
& - \frac{2\varrho}{s_1} \sum_{1}^{N-1} x_{1i+1} x_{1i} + \ldots \qquad - \frac{2\varrho}{s_n} \sum_{1}^{N-1} x_{ni+1} x_{ni} + \\
& - \frac{2}{s_1} \sum_{1}^{N-1} x_{1i+1} x_{2i} + \ldots \qquad - \frac{2}{s_{n-1}} \sum_{1}^{N-1} x_{n-1i+1} x_{ni} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Az egyszerűség kedvéért csak a feltételes (a $\xi(1) = x(1)$ feltétel melletti) maximum likelihood egyenletekkel foglalkozunk. Legyen speciálisan $h(t) \equiv 1 = (1, \ldots, 1)$, tehát a $\xi(t)$ folyamat $m_1, \ldots, m_n$ várható értékeit akarjuk becsülni. A feltételes maximum likelihood egyenletek a következők lesznek

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2\varrho^2}{s_1}(x_{11}-m_1) - \frac{2}{s_1}(x_{1N}-m_1) - \frac{2\varrho}{s_1}(x_{21}-m_2) - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_1} \sum_{2}^{N-1} (x_{1i}-m_1) + \\
& \quad + \frac{2\varrho}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} [(x_{1i}-m_1)+(x_{1i+1}-m_1)] + \frac{2}{s_1} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{2i}-m_2) = 0 \\
& -2\left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2}{s_2}\right)(x_{21}-m_2) - \frac{2}{s_2}(x_{2N}-m_2) - \frac{2\varrho}{s_1}(x_{11}-m_1) - \\
& \quad - \frac{2\varrho}{s_2}(x_{31}-m_3) - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_2} \sum_{2}^{N-1} (x_{2i}-m_2) + \frac{2\varrho}{s_2} \sum_{1}^{N-1} [(x_{2i}-m_2)+(x_{2i+1}-m_2)] + \\
& \quad + \frac{2}{s_1} \sum_{1}^{N-1} (x_{1i+1}-m_1) + \frac{2}{s_2} \sum_{1}^{N-1} (x_{3i}-m_3) = 0 \\
& \quad \vdots \\
& -2\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{\varrho^2}{s_k}\right)(x_{k1}-m_k) - \frac{2}{s_k}(x_{kN}-m_k) - \frac{2\varrho}{s_{k-1}}(x_{k-11}-m_{k-1}) - \frac{2\varrho}{s_k}(x_{k+1,1}-m_{k+1}) - \\
& \quad - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_k} \sum_{2}^{N-1} (x_{ki}-m_k) + \frac{2\varrho}{s_k} \sum_{1}^{N-1} [(x_{ki}-m_k)+(x_{k-1i+1}-m_k)] + \\
& \quad + \frac{2}{s_{k-1}} \sum_{1}^{N-1} (x_{k-1i+1}-m_{k-1}) + \frac{2}{s_k} \sum_{1}^{N-1} (x_{k+1i}-m_{k+1}) = 0 \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$-2\left(\frac{1}{s_{n-1}}+\frac{\varrho^2}{s_n}\right)(x_{n1}-m_n)-\frac{2}{s_n}(x_{nN}-m_n)-\frac{2\varrho}{s_{n-1}}(x_{n-1\,1}-m_{n-1})-$$
$$-\frac{2(1+\varrho^2)}{s_n}\sum_2^{N-1}(x_{ni}-m_n)+\frac{2\varrho}{s_n}\sum_1^{N-1}[(x_{ni}-m_n)+(x_{ni+1}-m_n)]+$$
$$-\frac{2}{s_{n-1}}\sum_1^{N-1}(x_{n-1i+1}-m_{n-1})=0$$

Innen egyszerű, de hosszadalmas átalakításokkal nyerjük az alábbi

$$\frac{\varrho^2-\varrho}{s_1}x_{11}+\frac{1-\varrho}{s_1}x_{1N}+\frac{\varrho-1}{s_1}x_{21}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{2i}=$$
$$=\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}m_1+\frac{\varrho-1}{s_1}m_2+\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}(N-2)m_1-\frac{(N-2)}{s_1}m_2$$

$$\left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_2}\right)x_{21}+\frac{1-\varrho}{s_2}x_{2N}+\frac{\varrho}{s_1}x_{11}-\frac{1}{s_1}x_{1N}+\frac{\varrho-1}{s_2}x_{31}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\sum_2^{N-1}x_{2i}-$$
$$-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}-\frac{1}{s_2}\sum_2^{N-1}x_{3i}=\left(\frac{1}{s_1}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\right)m_2+\frac{\varrho-1}{s_1}m_1+\frac{\varrho-1}{s_2}m_3+$$
$$+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}(N-2)m_2-\frac{(N-2)}{s_1}m_1-\frac{(N-2)}{s_2}m_3$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_k}\right)x_{k1}+\frac{1-\varrho}{s_k}x_{kN}+\frac{\varrho}{s_{k-1}}x_{k-1\,1}-\frac{1}{s_{k-1}}x_{k-1N}+\frac{\varrho-1}{s_k}x_{k+1,1}+$$
$$+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}\sum_2^{N-1}x_{ki}-\frac{1}{s_{k-1}}\sum_2^{N-1}x_{k-1i}-\frac{1}{s_k}\sum_2^{N-1}x_{k+1i}=\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}\right)m_k+$$
$$+\frac{\varrho-1}{s_{k-1}}m_{k-1}+\frac{\varrho-1}{s_k}m_{k+1}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}(N-2)m_k-\frac{N-2}{s_{k-1}}m_{k-1}-\frac{N-2}{s_k}m_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{1}{s_{n-1}}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_n}\right)x_{n1}+\frac{1-\varrho}{s_n}x_{nN}+\frac{\varrho}{s_{n-1}}x_{n-1\,1}-\frac{1}{s_{n-1}}x_{n-1N}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_n}\sum_2^{N-1}x_{ni}-$$
$$-\frac{1}{s_{n-1}}\sum_2^{N-1}x_{n-1i}=\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}(N-1)\right)m_n+\frac{\varrho-(N-1)}{s_{n-1}}m_{n-1}$$

egyenletrendszert, mely lényegében

$$\begin{aligned}
C_1X &= a_{11}m_1+a_{12}m_2\\
C_2X &= a_{21}m_1+a_{22}m_2+a_{23}m_3\\
&\vdots\\
C_kX &= a_{kk-1}m_{k-1}+a_{kk}m_k+a_{kk+1}m_{k+1}\\
&\vdots\\
C_nX &= a_{nn-1}m_{n-1}+a_{nn}m_n
\end{aligned}$$

alakú, ahol a megfelelő konstansok jelentése az előző egyenletrendszerből látható.

Ha az összes s_i szórásnégyzetek azonosak, legyen $s_i = s$, akkor a fenti

$$b = A \cdot m$$

egyenletrendszer A matrixa

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a & b \\ 0 & & & & b & a \end{pmatrix}$$

alakú. Az A matrix inverzének meghatározása az eddigiekben sokszor felhasznált valószínűségszámítási meggondolások alapján történhet. Az $n=2$ speciális esetben a fenti egyenletrendszer

$$\frac{\varrho^2-\varrho}{s_1}x_{11}+\frac{1-\varrho}{s_1}x_{1N}+\frac{\varrho-1}{s_1}x_{21}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{2i}=$$

$$=\frac{(1-\varrho)^2(N-1)}{s_1}m_1-\left(\frac{N-2}{s_1}+\frac{1-\varrho}{s_1}\right)m_2$$

$$\left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_2}\right)x_{21}+\frac{1-\varrho}{s_2}x_{2N}+\frac{\varrho}{s_1}x_{11}-\frac{1}{s_1}x_{1N}-\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\sum_2^{N-1}x_{2i}-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}=$$

$$=\frac{\varrho-N-1}{s_1}m_1+m_2\left(\frac{1}{s_1}+\frac{(N-1)(1-\varrho)^2}{s_2}\right)$$

alakú lesz.

Említésre méltó, hogy ellentétben az egydimenziós esettel, ϱ-nak 1-hez közeli értékei esetén is a várható értéket a megfigyelések számtani átlagával lehet jól becsülni.

Ebben a speciális ($n=2$) esetben a feltétel nélküli maximum likelihood egyenletek (a számítások mellőzésével) a következők lesznek

$$\left\{\frac{\varrho^2-\varrho}{s_1}+\frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}\right\}x_{11}+\frac{1-\varrho}{s_1}x_{1N}+\left\{\frac{\varrho-1}{s_1}-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}\right\}x_{21}+$$

$$+\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{2i}=\left[\frac{(1-\varrho)^2(N-1)}{s_1}+\frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}\right]m_1-$$

$$-\left[\frac{N-2}{s_1}+\frac{1-\varrho}{s_1}+\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}\right]m_2$$

$$\left\{\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_2}+\frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]}\right\}x_{21}+\frac{(1-\varrho)}{s_2}x_{2N}+$$

$$+\left(\frac{\varrho}{s_1}-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}\right)x_{11}-\frac{1}{s_1}x_{1N}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\sum_2^{N-1}x_{2i}-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}=$$

$$=\left[\frac{\varrho}{s_1}-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}-\frac{N-1}{s_1}\right]m_1+$$

$$+\left[\frac{1}{s_1}+\frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]}+\frac{(N-1)(1-\varrho)^2}{s_2}\right]m_2.$$

Ha $\varrho\sim 1$, a közelítő egyenletekből a következő becslések adódnak:

$$m_2=\frac{1}{N-2}\sum_2^{N-1}x_{2i}$$

$$m_1=\frac{x_{1N}-x_{11}}{N-2}+\frac{1}{N-2}\sum_2^{N-1}x_{1i}+\frac{1}{(N-2)^2}\sum_2^{N-1}x_{2i}-\frac{x_{21}}{N-2}.$$

Az eredményből látható, hogy az egydimenziós esettel szemben itt mindig a számtani középpel való becslés lesz jó.

4. §. Az A matrix elemeinek becslése

Tegyük fel, hogy $\mathbf{M}\xi(t)=0$ és a $\xi(t)$ *Gauss*-folyamat eleget tesz az (1. 2) egyenletnek. A $\xi(t)$ folyamat $t=1,2,\ldots,N$ időpontokban való megfigyeléseiből az ismeretlen A matrix elemei maximum likelihood becsléseinek meghatározása a megfelelő sűrűségfüggvény alapján elvben könnyen elvégezhető. Az egyszerűség kedvéért tekintsük ismét a könnyebben kezelhető feltételes sűrűségfüggvényt s az ily módon adódó feltételes, maximum likelihood becsléseket (az ún. széria-korrelációs együttható becslés többdimenziós analogonjáról van szó, vö. [2] 1. §). Legyen $A=\{\alpha_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ és legyenek a $\zeta(i)$ változók komponensei függetlenek, $\mathbf{M}(\zeta_j(i))^2=s_j$, $\mathbf{M}(\zeta_{j_1}(i)\zeta_{j_2}(k))=0$, ha $j_1\neq j_2$; paraméterekkel, ekkor a $\xi(2),\xi(3),\ldots,\xi(N)$ változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x(1)$ feltétel mellett

$$p_{\xi(2),\ldots,\xi(N)}(x_{21},\ldots,x_{2N};\ldots;x_{n1},\ldots,x_{nN}\,|\,\xi(1)=x(1))=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n(N-1)}{2}}\left(\prod_1^n s_i\right)^{-\frac{N-1}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i}\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1}-\alpha_{i1}x_{1j}-\alpha_{i2}x_{2j}-\ldots-\alpha_{in}x_{nj})^2\right\}.$$

A maximum likelihood egyenletek

$$\text{(4. 1)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial\log p}{\partial\alpha_{i1}}=\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1}-\alpha_{i1}x_{1j}-\alpha_{i2}x_{2j}-\ldots-\alpha_{in}x_{nj})x_{1j}=0\\ &\vdots\\ &\frac{\partial\log p}{\partial\alpha_{in}}=\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1}-\alpha_{i1}x_{1j}-\alpha_{i2}x_{2j}-\ldots-\alpha_{in}x_{nj})x_{nj}=0\\ &i=\overline{1,n},\end{aligned}$$

alakúak lesznek. Bevezetve az

$$\eta_{i1}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}(\xi_i(j+1)-\alpha_{i1}\xi_1(j)-\alpha_{i2}\xi_2(j)-\ldots-\alpha_{in}\xi_n(j))\xi_1(j)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{1}^{N-1}\zeta_i(j+1)\xi_1(j),$$

$$\eta_{i2}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}\zeta_i(j+1)\xi_2(j) \tag{4. 2}$$

$$\vdots$$

$$\eta_{in}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}\zeta_i(j+1)\xi_n(j)$$

valószínűségi változókat és a (4. 1) egyenletrendszer megoldásait a $\xi(1), \ldots, \xi(N)$ megfigyelések esetén $\hat{\alpha}_{ij}$-vel jelölve az $\eta_{ik}(N)$ változók a következő alakba írhatók:

$$\eta_{ik}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}[(\hat{\alpha}_{i1}-\alpha_{i1})\xi_1(j)+(\hat{\alpha}_{i2}-\alpha_{i2})\xi_2(j)+\ldots+(\hat{\alpha}_{in}-\alpha_{in})\xi_n(j)]\xi_k(j) \tag{4. 3}$$

$$i,k=\overline{1,n};$$

felhasználva közben, hogy (4. 1) alapján

$$\sum_{j=1}^{N-1}\xi_i(j+1)\xi_k(j)=\sum_{j=1}^{N-1}(\hat{\alpha}_{i1}\xi_1(j)+\ldots+\hat{\alpha}_{in}\xi_n(j))\xi_k(j).$$

Kis átalakítással (4. 3) a következő alakba írható

$$\eta_{ik}(N)=\sqrt{N-1}\,(\hat{\alpha}_{i1}-\alpha_{i1})\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\xi_k(j)\xi_1(j)}{N-1}+\ldots \tag{4. 3'}$$

$$\ldots+\sqrt{N-1}\,(\hat{\alpha}_{in}-\alpha_{in})\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\xi_k(j)\xi_n(j)}{N-1} \qquad i,k=\overline{1,n}.$$

A (4. 2) összefüggések alapján könnyű kiszámítani — felhasználva a $\zeta_i(j)$ változók tulajdonságait — hogy

$$\mathbf{M}\eta_{il_1}(N)\eta_{il_2}(N)=s_i\mathbf{M}\xi_{l_1}(j)\xi_{l_2}(j). \tag{4. 4}$$

Másrészt, ha az A matrix sajátértékei 1-nél kisebbek, a folyamat ergodikus és így

$$\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\xi_i(j)\xi_k(j)\to\mathbf{M}\xi_i(j)\xi_k(j), \qquad i,k=\overline{1,n} \tag{4. 5}$$

1 valószínűséggel. Fix α_{ik} $(i, k=\overline{1, n})$ értékekre az $\eta_{ik}(N)$ valószínűségi változók $N\to\infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlásúak (lásd pl. ROZANOV [10])

$$s_i\{\mathbf{M}\xi_{l_1}(j)\xi_{l_2}(j)\}_{l_1=\overline{1,n}}^{l_2=\overline{1,n}} = \{\mathbf{M}\eta_{il_1}(N)\eta_{il_2}(N)\}$$

kovariancia matrixszal. A (4. 5) összefüggések felhasználásával (4. 3′) azt mutatja, hogy az $\eta_{ik}(N)$ $(k=\overline{1, n})$ változók az $\sqrt{N-1}\,(\hat{\alpha}_{ik}-\alpha_{ik})$ változók $(k=\overline{1, n})$ lineáris kombinációi, így azok is aszimptotikusan normális eloszlásúak

$$s_i\cdot\{\mathbf{M}\xi_{l_1}(j)\xi_{l_2}(j)\}^{-1}$$

kovariancia matrixszal.

Nyilván az $\hat{\alpha}_{ij}$ $(i, j=1, n)$ becslések torzítatlanok és konzisztensek is.

Megjegyzem, hogy a (4. 1) egyenletrendszer helyett tekinthető a

$$\sum_{j=1}^{N-\tau-1}[\xi_i(j+\tau)-\alpha_{i1}\xi_1(j+\tau-1)-\ldots-\alpha_{in}\xi_n(j+\tau-1)]\xi_k(j) = 0; \qquad i,k=\overline{1,n}$$

egyenletrendszer is az α_{ik} becsléseinek meghatározására $(\tau=1, 2, \ldots, r)$ értékek esetén. A megfelelő becsléseket jelöljük $\hat{\alpha}_{ik}(\tau)$-val. Nyilván minden τ értékre más és más becslést kapunk, kérdés, hogy az így kapott becsléseket átlagolva milyen rendszerek esetén jutunk jobb becslésekhez? Amennyiben a folyamat stacionárius *Gauss—Markov*-típusú, a becslések nem javulnak, azonban megadhatók lennének olyan, az említett típushoz közel álló folyamatok, melyeknél ez az eljárás hasznosnak bizonyul pl. nem *Gauss*-típusú folyamatok esetén.

Az eddigiekben csak azt az ismert eljárást mutattuk meg, hogy hogyan nyerhetők az α_{ik} ismeretlen paraméterekre becslések. A továbbiakban azzal a problémával kívánunk foglalkozni, hogy ezek a becslések mennyire megbízhatóak s melyek azok a nehézségek, amelyekkel számolni kell ezeknek a becsléseknek a vizsgálatánál. Pontosabban megfogalmazva az a kérdés, hogy az így nyert statisztikai becslések segítségével megállapíthatók-e az A matrix sajátértékei? Tehát N nagy értékeire (mégpedig milyen nagy N értékek esetén mekkora pontossággal) elvégezhető-e pl. a *Jordan*-alakra hozás?

Ehhez első lépésként vizsgáljuk meg az (1. 4) alakú egyenletrendszernek eleget tevő $\xi(t)$ n-dimenziós folyamat egyetlen ismeretlen ϱ paraméterének becslését. A (2. 12) összefüggésekből megállapítható, hogy a $\xi(1)=x(1)$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényből nyert maximum likelihood becslés

$$\hat{\varrho}=\frac{\sum_1^{N-1}x_{1i}x_{1i+1}-\sum_1^{N-1}x_{1i}x_{2i}+\sum_1^{N-1}x_{2i}x_{2i+1}-\sum_1^{N-1}x_{2i}x_{3i}\pm\ldots-\sum_1^{N-1}x_{n-1i}x_{ni}+\sum_1^{N-1}x_{ni}x_{ni+1}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N-1}x_{ki}^2}$$

lesz. Könnyű belátni az (1. 4) összefüggések alapján, hogy

$$\hat{\varrho}-\varrho=\frac{\sum_1^{N-1}\xi_{1i}\zeta_{1i+1}+\ldots+\sum_1^{N-1}\xi_{n1}\zeta_{ni+1}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N-1}\xi_{ki}^2}$$

és a jobb oldal számlálójának várható értéke 0 (mivel $\mathbf{M}\xi_{ki}\zeta_{ki+1}=0$). Ily módon a becslés aszimptotikusan torzítatlan. N nagy értékeire — az ergodikusság miatt — a nevező az $(N-1)\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ értékkel asszimptotikusan egyenlő, másrészt a számláló négyzetének várható értéke

$$\Sigma s_k \sigma_k^2.$$

Ily módon

$$\mathbf{M}(\sqrt{N-1}(\hat{\varrho}-\varrho))^2 \sim \frac{\Sigma s_k \sigma_k^2}{(\Sigma\sigma_k^2)^2}, \quad \text{ha} \quad N\to\infty.$$

Az $n=2$ speciális esetben, ha $s_1=s_2$

$$\mathbf{M}(\sqrt{N-1}(\hat{\varrho}-\varrho))^2 \sim \frac{(1-\varrho^2)^3}{2(1-\varrho^2)^2+(1+\varrho^2)}$$

(vö. [2] 2. §, ahol az egydimenziós folyamat esetén $\sqrt{N-1}(\hat{\varrho}-\varrho)$ szórásnégyzetére $(1-\varrho^2)$ adódott).

Ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben, szükség van a fenti becslés aszimptotikus eloszlásának vizsgálatára 1-hez közeli ϱ értékre. Láttuk az egydimenziós esetben, hogy $\sigma_\zeta^2=1$ feltétel esetén ϱ becslése aszimptotikusan egyenletesen normális eloszlású $-1<\varrho<1$-ben, míg $s=1$ esetén normalitásról szó sincs. Éppen amiatt volt szükség $s=1$ esetén az időben folytonos folyamat paraméter becslései pontos eloszlásának meghatározására, $\sigma_\zeta^2=1$ esetén pedig a diszkrét folyamat paraméter becslései aszimptotikus eloszlásának meghatározására. Ez a megkülönböztetés a többdimenziós esetben is fennáll, a megfelelő számítások gyakorlati kivitelezése azonban igen nagy és nehézkes számításokat igényel. Heurisztikus meggondolások alapján látható, hogy $\sigma_1^2=1, \sigma_2^2=c\,(\neq 1)$ esetén ϱ becslése aszimptotikusan egyenletesen normális eloszlású a $-1<\varrho<1$ intervallumban, míg $s_1=s_2=1$ esetén ez nem áll fenn. A megfelelő kétdimenziós — időben folytonos — folyamat paraméter becslése eloszlásának meghatározását egy külön dolgozatban végezzük el.

Visszatérve az általános esetre, a következő megállapításokat tehetjük.

Az [1] dolgozat 3. 3 tételéből, valamint [2] 5. 4 tételének korolláriumából következik, hogy amennyiben az (1. 2)-ben szereplő A matrix sajátértékei mind egyszeresek és valósak s az $\eta(t) = \xi(t)+m$ folyamatot figyeltük meg, az *m várható értékre nem szerkeszthetők véges konfidencia intervallumok és a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sajátértékekre nem szerkeszthetők 0-tól különböző alsó konfidencia határok folytonos funkcionálok segítségével.*

Ez egyben azt is jelenti, hogy a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sajátértékek nem különböztethetők meg.

Amennyiben komplex és többszörös sajátértékei is vannak az A matrixnak, a megfelelő komponensek várható értékeire a számtani közepek jó becslések lesznek és nincs szükség végtelen konfidencia intervallumok szerkesztésére.

Ezen állítások tételszerű megfogalmazását mellőzzük.

IRODALOM

[1] ARATÓ, M.: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *MTA III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 13–24.
[2] ——— : II., *MTA III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 135–157.
[3] ——— : III., *MTA III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 317–330.

[4] ARATÓ M.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов *Disszertáció*, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.
[5] ——— : О достаточных статистиках стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее прим.*, **6** (1961) 216—218.
[6] DOOB, J. L.: The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.*, **15** (1944) 229—281.
[7] Дынкин, Е. Б.: Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей, *Усп. мат. наук*, **6** (1951) 68—90.
[8] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: *Statistical analysis of stationary time series*, John Wiley, New York, 1957.
[9] Понтрягин, Л. С.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, 1961.
[10] QUENOUILLE, M. H.: *The analysis of multiple time series*, London, 1957.
[11] Розанов, Ю. А.: Стационарные случайные процессы, Москва, 1963.

(Beérkezett: 1965. III. 5.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ÉS STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSEK (II).*

Írta: ULF GRENANDER

5. fejezet

A BECSLÉS PROBLÉMÁJA

5. 1. Torzítatlan becslések. Tegyük most fel, hogy az $x(t)$ folyamatot megadó valószínűségi mérték az általunk ismert P_α osztályhoz tartozik, ahol α egy valós paraméter, amelynek értékei kitöltik az (a, b) véges intervallumot. Hogy elkerüljük a szinguláris esetet, feltesszük még, hogy semmilyen α_1, α_2 értékpár esetén sem létezik olyan S halmaz, amelyre $P_{\alpha_1}=0$ és $P_{\alpha_2}\neq 0$. A folyamat egy észlelt realizációja alapján el akarjuk dönteni, hogy a hipotézisek melyike igaz (mi az α igazi értéke), vagyis olyan $t(\omega)$ függvényt akarunk szerkeszteni, amely becslést ad α-ra. Tetszőleges S halmazra érvényes, hogy

$$P_\alpha(S) = \int\limits_S f(\omega, \alpha)\, dP_0(\omega),$$

ahol P_0 az α egy rögzített α_0 értékéhez tartozó mérték. Tekintsük most az $f(\omega, \alpha)$ likelihood függvényt olyan sztochasztikus folyamatnak, amely az α paramétertől függ (ez esetben tehát α-t tekintjük időparaméternek) és amelyet a P_0 valószínűségi mérték ad meg. Ennek a folyamatnak az átlaga nyilvánvalóan

$$\mathbf{E}_0 f(\omega, \alpha) = \int\limits_\Omega f(\omega, \alpha)\, dP_0(\omega) = P_\alpha(\Omega) = 1.$$

Induljunk ki abból a természetes feltevésből, hogy az $f(\omega, \alpha)$ folyamat középben folytonos, és véges a szórása. Az $f(\omega, s)=f(s)$ jelöléssel a folyamat kovariancia függvénye

$$\varrho(s, t) = \mathbf{E}_0[f(s)-1][f(t)-1].$$

Képezzük az ehhez a maghoz tartozó integrálegyenletet a szokásos módon, és jelöljük sajátértékeit λ_ν-vel, sajátfüggvényeit $\varphi_\nu(\alpha)$-val. Ekkor minden $\alpha \in A$ esetén

$$f(\omega, \alpha) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_1^n \varphi_\nu \frac{\psi_\nu(\omega)}{\sqrt{\lambda_\nu}} + 1,$$

* Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Matematik*, **1** (1950), 195–277. A fordítás első része, amely az eredeti dolgozat 1–4. fejezetét, a tartalomjegyzéket és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza, az *MTA III. Oszt. Közl.*, **15** (1965), 51–87. oldalán jelent meg.

ahol $\{\psi_\nu(\omega)\}$ egy $L_2(\Omega)$-ban ortonormált rendszer és az átlagban való konvergencia a P_0 mértékre nézve értendő.

Vizsgáljuk most minimális szórású torzítatlan becslések egzisztenciáját, azaz olyan $t(\omega)$ függvényekét, amelyek kielégítik az

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\alpha t(\omega) = \alpha \\ \mathbf{E}_\alpha [t(\omega)]^2 < \infty \end{cases}$$

feltételeket minden $\alpha \in A$ esetén. Ha a $\{\psi_\nu\}$ rendszer nem teljes $L_2(\Omega)$-ban P_0-ra nézve, akkor hozzácsatoljuk az ortogonális komplementumát, a

$$\{\psi'_\mu\} = L_2(\Omega) \ominus \{\psi_\nu\}$$

ortonormált rendszert. A fenti feltételeket kielégítő tetszőleges becslést P_0-ra nézve átlagban konvergens sorba lehet fejteni a $\{\psi_\nu\}$ és $\{\psi'_\mu\}$ rendszerek szerint:

$$t(\omega) = \sum_1^\infty t_\nu \psi_\nu(\omega) + \sum_1^\infty t'_\mu \psi'_\mu(\omega).$$

Ebből következik, hogy

$$\alpha = \mathbf{E}_\alpha t(\omega) = \int_\Omega t(\omega) f(\omega, \alpha) dP_0(\omega) = \sum_1^\infty t_\nu \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{\sqrt{\lambda_\nu}} + \mathbf{E}_0 t(\omega).$$

A jobb oldali sor egyenletesen konvergens, mert

$$\left| \sum_n^\infty t_\nu \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right|^2 \leqq \sum_n^\infty t_\nu^2 \sum_n^\infty \frac{\varphi_\nu(\alpha)^2}{\lambda_\nu} \leqq \sum_n^\infty t_\nu^2 \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(\alpha)^2}{\lambda_\nu}$$

és mert

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(\alpha)^2}{\lambda_\nu} = \varrho(\alpha, \alpha)$$

folytonos függvénye α-nak. Így tehát a sort megszorozhatjuk $\varphi_\nu(\alpha)$-val és tagonként integrálhatjuk, aminek eredménye:

$$\gamma_\nu \int_a^b (\alpha - \alpha_0) \varphi_\nu(\alpha) d\alpha = \frac{t_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}.$$

Ebből látható, hogy a véges szórású torzítatlan becslés létezésének szükséges feltétele $\sum_1^\infty \lambda_\nu \gamma_\nu^2 < \infty$.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\{\varphi_\nu(\alpha)\}$ teljes $L_2(A)$-ban. Ekkor a $\sum_1^\infty \lambda_\nu \gamma_\nu^2 < \infty$ feltétel egyszersmind elégséges feltétele is a véges szórású torzítatlan becslés létezésének.

Tekintsük ugyanis a

$$t(\omega) = \sum_1^\infty \sqrt{\lambda_\nu}\, \gamma_\nu \psi_\nu(\omega) + \sum_1^\infty t'_\mu \psi'_\mu(\omega)$$

kifejezést, ahol a t'_μ valós számok kielégítik a $\sum_1^\infty t'^2_\mu < \infty$ feltételt, de egyébként tetszőlegesek lehetnek. Ebben az esetben a sor nyilvánvalóan P_0-ra nézve átlagban konvergens, és

$$\mathbf{E}_\alpha t(\omega) = \sum_1^\infty t_\nu \varphi_\nu(\alpha) + \mathbf{E}_0 t(\omega).$$

Ugyanazzal a módszerrel, mint fentebb, ki lehet mutatni, hogy $\sum_1^\infty t_\nu\varphi_\nu(\alpha) = \alpha - \alpha_0$ minden $\alpha \in A$ esetén. Így tehát $t(\omega) + \alpha_0 - \mathbf{E}_0 t(\omega)$ torzítatlan becslése α-nak. Az eredményeket összefoglalva:

A véges szórású torzítatlan becslés létezésének szükséges feltétele

$$\sum_1^\infty \lambda_\nu \left\{ \int_a^b (\alpha - \alpha_0)\varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha \right\}^2 < \infty.$$

Ha a $\{\varphi_\nu\}$ rendszer teljes, akkor ebből a feltételből következik a torzítatlan becslések olyan seregének a létezése, amelynek dimenziója megegyezik az $L_2(\Omega) \ominus \{\psi_\nu\}$ tér dimenziójával.

Ha létezik egynél több torzítatlan becslés, és ha van alapja olyan feltevésnek, hogy α igazi értéke közel esik α_0-hoz, akkor természetesnek tűnik annak a becslésnek a kiválasztása, amelynek $\mathbf{D}_0(t)$ szórása a legkisebb. Egyes esetekben az is előfordulhat, hogy a torzítatlan becslések között olyat találunk, amelynek a szórása minden α-ra minimális.

A becslés-szerkesztés fenti módszerének vannak elméleti előnyei (többek között az, hogy a módszer még kiterjeszthető), de kevéssé alkalmas gyakorlati használatra, ezért a következő szakaszokban a becslésnek néhány gyakorlatilag előnyösebb módját fogjuk ismertetni. Itt csupán arra szorítkozunk, hogy egy egyszerű példa kapcsán bemutassuk a becslés megszerkesztésének egy olyan módszerét, amely néhány speciális esetben célra vezet. Tekintsük a 4. 10. szakaszban vizsgált Poisson-folyamatot, amelynek β sűrűsége állandó a $(0, t)$ intervallumban. A β sűrűségnek olyan torzítatlan β^* becslését keressük, amelynek a szórása minimális. Ha $\beta^* = \beta^*(n, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ akkor

$$\beta = \mathbf{E}_\beta \beta^* = \sum_0^\infty P\{n=\nu\}\, \mathbf{E}_\beta[\beta^* | n=\nu] = \sum_0^\infty \frac{e^{-\beta t}(\beta t)^\nu}{\nu!} \mathbf{E}_\beta[\beta^* | n=\nu],$$

tehát β-nak bizonyos intervallumból vett értékeire az alábbi egyenletnek kell fennállania

$$\beta e^{\beta t} = \sum_0^\infty \frac{(\beta t)^\nu}{\nu!} \mathbf{E}_\beta[\beta^* | n=\nu].$$

Ismert n esetén a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mennyiségek feltételes sűrűségfüggvénye

$$\frac{e^{-\beta t}\beta^n}{\dfrac{e^{-\beta t}(\beta t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n} \qquad (0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t),$$

tehát $\mathbf{E}_\beta[\beta^* | n=\nu]$ értéke független β-tól. Mivel $\beta \cdot e^{\beta t}$ a β változónak egész függvénye, a Taylor-együtthatókat egyenlővé tehetjük, és ilyen módon azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}_\beta[\beta^* | n=\nu] = \frac{\nu}{t}.$$

Azonban

$$\mathbf{E}_\beta(\beta^*-\beta)^2 = \sum_0^\infty P_n \mathbf{E}_\beta[(\beta^*-\beta)^2|n] = \sum_0^\infty P_n\left\{\mathbf{E}_\beta\left[\left(\beta^*-\frac{n}{t}\right)^2 \middle| n\right]+\right.$$

$$\left.+2\mathbf{E}_\beta\left[\left(\beta^*-\frac{n}{t}\right)\left(\frac{n}{t}-\beta\right)\middle| n\right]+\mathbf{E}_\beta\left[\left(\frac{n}{t}-\beta\right)^2\middle| n\right]\right\}.$$

Itt a jobb oldal második tagja eltűnik, mert

$$\mathbf{E}_\beta\left[\left(\beta^*-\frac{n}{t}\right)^2\middle| n\right]=0.$$

Így tehát nyilvánvalóan megkapjuk az egyetlen minimális szórású torzítatlan becslést, ha β^*-ot úgy választjuk meg, hogy az első tag (amelynek értéke egyébként >0 volna) nullával legyen egyenlő:

$$\beta^* = \frac{n}{t}.$$

5. 2. A lineáris becslések egy osztálya. Az előző szakaszban azzal az esettel foglalkoztunk, amikor az α paraméter értéke teljesen meghatározza a P_α valószínűségi eloszlásokat. Gyakran előfordul, hogy nem tudjuk, vagy nem akarjuk megadni a valószínűségi eloszlásokat. Megtörténhet, hogy ennek ellenére mégis lehet találni minimális szórású torzítatlan becsléseket, de ez esetben a becsléseknek csupán valamilyen leszűkített osztályában. Tekintsük pl. a következő feladatot: meg akarjuk becsülni az $x(t)$ sztochasztikus folyamat m átlagát, ha a folyamatról tudjuk, hogy középben folytonos és létezik adott $r(s, t)$ korrelációs függvénye. Tekintsük a lineáris becslések alábbi osztályát

$$m^* = \int_a^b f(t)x(t)dt,$$

ahol $f(t)$ négyzetesen integrálható (a, b)-n. Az integrálást akár az 1. 3. szakasz értelmében foghatjuk fel, akár pedig DOOB szerint (ez utóbbi esetben olyan mintateret kell választani, amelyben az $x^2(t)$ folyamat D-integrálható). Hogy az ebből az osztályból kapott becslés torzítatlan legyen, meg kell követelni az

$$\int_a^b f(t)dt = 1$$

feltétel teljesülését. Ebben az esetben a szórás

$$\mathbf{E}(m^*-m)^2 = \int_a^b\int_a^b r(s,t)f(s)f(t)\,ds\,dt.$$

Bevezetve a folyamat $r(s,t)$-magú integrálegyenletének λ_ν sajátértékeit és φ_ν sajátfüggvényeit (feltesszük, hogy a $\{\varphi_\nu\}$ függvények teljes rendszert alkotnak $L_2(a,b)$-ben), és felhasználva a korrelációs függvény bilineáris előállítását, következik

$$\mathbf{E}(m^*-m)^2=\sum_1^\infty \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu},$$

ahol

$$c_\nu=\int_a^b f(t)\varphi_\nu(t)\,dt, \qquad (\nu=1,2,\dots).$$

Keressük a $\frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu}$ kifejezés minimumát a $\sum\limits_1^\infty c_\nu a_\nu=1$ feltétellel, ahol

$$a_\nu=\int_a^b \varphi_\nu(t)\,dt.$$

A SCHWARZ-féle egyenlőtlenség felhasználásával könnyen ki lehet mutatni, hogy ha $\sum\limits_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu<\infty$, akkor

$$1=\left[\sum_1^\infty c_\nu a_\nu\right]^2 \leqq \left[\sum_1^\infty |c_\nu a_\nu|\right]^2 \leqq \sum_1^\infty \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu}\sum_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu,$$

vagyis

$$\mathbf{E}(m^*-m)^2 \geqq \frac{1}{\sum\limits_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu},$$

ahol egyenlőség csak abban az esetben következik be, ha

$$c_\nu=\frac{a_\nu\lambda_\nu}{\sum\limits_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu}.$$

Legyen

$$f_N(t)=\frac{\sum\limits_1^N a_\nu\lambda_\nu\varphi_\nu(t)}{\sum\limits_1^N a_\nu^2\lambda_\nu}$$

és

$$m_N^*=\int_a^b x(t)f_N(t)\,dt=m+\frac{\sum\limits_1^N a_\nu\sqrt{\lambda_\nu}\,x_\nu}{\sum\limits_1^N a_\nu^2\lambda_\nu},$$

ahol $\{x_\nu\}$ nulla várható értékű és 1 szórású korrelálatlan valószínűségi változók sorozata. Ha N a végtelenhez tart, akkor *a becsléseknek ez a sorozata nyilvánvalóan átlagban konvergál egy olyan m^* becsléshez, amely torzítatlan és amelynek* $\frac{1}{\sum\limits_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu}$

szórása a lineáris becslések tekintett osztályában minimális (lásd GRENANDER [1]). Ha úgy kívánjuk, ebből a sorozatból ki lehet választani egy majdnem biztosan konvergens részsorozatot is. Meg kell jegyezni, hogy a sorozat határértéke nem mindig tartozik a becslések itt tekintett osztályába. A becslés-osztálynak erre a hátrányos tulajdonságára később még visszatérünk.

Tegyük fel viszont, hogy $\sum_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu = \infty$. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben létezik olyan $m_{N_\nu}^*$ részsorozat, amely majdnem biztosan az igazi m-értékhez tart, ha $\nu \to \infty$. Így tehát — annak ellenére, hogy a folyamatnak csupán a korrelációs függvénye ismeretes — *megállapítható, hogy ha* $\sum_1^\infty a_\nu^2\lambda_\nu = \infty$, *akkor a szinguláris esettel van dolgunk.* A 4. 4. szakaszban láttuk, hogy a normális folyamatoknál ez szükséges feltétele is a szinguláris esetnek (ha csak pozitív definit korrelációs függvényekre szorítkozunk).

Amint ezt a 4. 6. szakaszban láttuk, az $f_n(t)$ függvénysorozat egy $L_2(T)$-beli függvényhez való konvergálása maga után vonja az

$$\int_a^b r(s,t)f(t)\,dt = 1$$

integrálegyenlet egy négyzetesen integrálható megoldásának a létezését. Mivel ez ritkán fordul elő, kézenfekvő a lineáris becslések

$$m^* = \int_a^b x(t)\,dF(t)$$

tágabb osztályát tekinteni, ahol $F(t)$ korlátos variációjú függvény, és az integrált valamilyen megfelelő módon (pl. KARHUNEN szerint) értelmezzük.

Az előzőkhöz hasonlóan megköveteljük az

$$\begin{cases} \mathbf{E}m^* = m\int_a^b dF(t) = m \\ \mathbf{E}(m^*-m)^2 = \int_a^b\int_a^b r(s,t)\,dF(s)\,dF(t) = \min. \end{cases}$$

feltételek teljesülését. Tegyük fel, hogy $F(t)$ kielégíti ezeket a feltételeket és legyen α és β két pont az (a, b) intervallumon. Ha

$$G = \varepsilon(t-\alpha) - \varepsilon(t-\beta)$$

és δ tetszőleges valós szám, akkor az $F(t)+\delta G(t)$ súlyfüggvény szintén torzítatlan becslést ad, mivel

$$\int_a^b d[F(t)+\delta G(t)] = 1.$$

Továbbá az

$$\int_a^b r(s,t)\,dF(t) = R(s)$$

jelöléssel

$$\int_a^b\int_a^b r(s,t)d[F(s)+\delta G(s)]d[F(t)+\delta G(t)]=\int_a^b\int_a^b r(s,t)dF(s)dF(t)+2\delta\int_a^b R(t)dG(t)+$$

$$+\delta^2\int_a^b\int_a^b r(s,t)dG(s)dG(t).$$

Mivel az utóbbi kifejezésnek δ minden értékére nagyobbnak kell lennie az

$$\int_a^b\int_a^b r(s,t)dF(s)dF(t)$$

integrálnál, szükségszerűen teljesülnie kell az

$$\int_a^b R(t)dG(t)=R(\alpha)-R(\beta)$$

feltételnek, tehát

$$R(s)=\int_a^b r(s,t)dF(t)\equiv c$$

minden $s\in T$-re. Nyilvánvaló, hogy az utóbbi egyenlet jobb oldalán levő állandó éppen becslésünk szórásával, vagyis az m^* lineáris becslés minimális szórásával egyenlő[1].

Tegyük fel másrészt, hogy $F(t)$ kielégíti a fenti integrálegyenletet és az $\int_a^b dF(t)=1$ feltételt. Legyen $H(t)$ egy másik korlátos variációjú függvény (a,b)-n, amelyre $\int_a^b dH(t)=1$, és legyen $H=F+G$, akkor

$$\int_a^b\int_a^b r(s,t)dH(s)dH(t)=\int_a^b\int_a^b r(s,t)dF(s)dF(t)+2\int_a^b\int_a^b r(s,t)dF(s)dG(t)+$$

$$+\int_a^b\int_a^b r(s,t)dG(s)dG(t).$$

A jobb oldal utolsó tagja nyilvánvalóan nem negatív, továbbá

$$\int_a^b\int_a^b r(s,t)dF(s)dG(t)=c\int_a^b dG(t)=0.$$

Így tehát bebizonyítottuk, hogy

$$\mathbf{D}^2(m_H^*)\geqq\mathbf{D}^2(m_F^*).$$

[1] Lásd e tekintetben még az 5.4. szakaszt, ahol ugyanezek az eredmények általánosabb alakban tetszőleges lineáris becslések esetére adódnak.

Már korábban láttuk, hogy az $e^{-\beta|t-s|}$ korrelációs függvény esetében (ez a stacionárius Markov-folyamatnak felel meg, ha teljesül az a járulékos feltétel, hogy minden valószínűségi eloszlás normális) nem lehet leghatékonyabb $f(t)$ függvényt szerkeszteni $L_2(t)$-ben a folyamat átlagára vonatkozó hipotézis ellenőrzésére.

Ha viszont az

$$\int_0^T e^{-\beta|t-s|}dF(t)=\frac{1}{2+\beta T}$$

egyenletet tekintjük, könnyen belátható, hogy az

$$F(t)=\frac{\varepsilon(t)+\varepsilon(t-T)+\beta t}{2+\beta T}$$

korlátos variációjú függvény kielégíti ezt az egyenletet, és hogy

$$\int_0^T dF(t)=1.$$

Ebből következik, hogy az

$$m^*=\frac{x(0)+x(T)+\beta\int\limits_0^T x(t)\,dt}{2+\beta T}$$

kifejezés m torzítatlan becslését adja, és szórása minimális a becslések tekintett osztályában. Később látni fogjuk, hogy normális folyamat esetében ez a becslés a becsléseknek egy sokkal tágabb osztályában is legjobb.

Második példaként tekintsünk egy az (a, b) intervallumon megadott, időben homogén ortogonális (korrelálatlan növekményű) folyamatot, amelynek létezzék az általunk nem ismert m átlaga és amelynek a korrelációs függvénye $r(s, t)=$ $=\min(s, t)$ legyen. Ebben az esetben az

$$\int_a^b \min(s, t)\,dF(t)=c$$

integrálegyenletnek létezik az

$$F(t)=\varepsilon(t-a)\cdot\frac{c}{a}$$

megoldása, tehát a leghatékonyabb becslés

$$m^*=x(a).$$

5. 3. A számtani közép szerinti becslés. A stacionárius folyamatok esetében az 5. 2. szakaszban vizsgált feladatnak van néhány speciális sajátsága. Ha a spektrál függvénynek nincs szakadása a $\lambda=0$ pontban (azaz a spektrális energia a $\lambda=0$ pontban zérus), akkor az

$$m^*=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

becslés, amely nyilvánvalóan torzítatlan, $T \to \infty$ esetén sztochasztikusan m-hez tart (lásd az 1. 3. szakaszt), vagyis m^* itt konzisztens becslés. Ennek a becslésnek, amelyet *számtani közép szerinti becslésnek* fogunk nevezni, van egy másik optimális tulajdonsága is, amellyel ebben a szakaszban foglalkozunk. Lehetségesnek látszik a kapott eredmény általánosítása is; ezzel a szerző egy későbbi munkájában kíván foglalkozni.

Tegyük fel, hogy a spektrum abszolút folytonos és létezik a $h(\lambda)$ spektrális sűrűségfüggvény, amely folytonos a $\lambda=0$ helyen és korlátos. Tekintsük az alábbi típusú torzítatlan becsléseket:

$$m_T^* = \int_{-T}^{T} f(t)x(t)\,dt; \quad \int_{-T}^{T} f(t)\,dt = 1.$$

Az

$$f(t) = \frac{1}{T} g\left(\frac{t}{T}\right)$$

helyettesítéssel ekkor

$$m_T^* = \int_{-1}^{1} g(u)x(uT)\,du; \quad \int_{-1}^{1} g(u)\,du = 1.$$

A $g(u)$ függvény itt tehát azt a viszonylagos súlyt képviseli, amelyet a folyamat különböző t-khez tartozó értékeinek tulajdonítunk. A torzítatlan becsléseknek arra a reguláris osztályára szorítkozva, amely a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletesen folytonos és egyenletesen korlátos C függvényosztályhoz tartozó $g(u)$ függvényeknek felel meg, ki fogjuk mutatni, hogy *ebben az osztályban a számtani közép szerinti becslés aszimptotikusan minimális szórású, ha T a végtelenhez tart.* Pontosabban: definiáljuk a

$$\mu_T^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

becslés hatékonyságát („efficienciáját") az

$$e_T = \frac{\inf\limits_{m^* \in C} \mathbf{D}^2 m_T^*}{\mathbf{D}^2 \mu_T^*}; \quad 0 \leq e_T \leq 1$$

kifejezéssel (a hatékonyságnak ez a definíciója eltér a klasszikus elméletben használt meghatározástól, amennyiben a folyamatnak csupán a lineáris tulajdonságait veszi tekintetbe). Ki fogjuk mutatni, hogy $e_T \to 1$, ha T a végtelenhez tart. Legyen ugyanis $\underline{\lim}_{T\to\infty} e_T = e$. Ekkor létezik olyan $T_\nu \to \infty$ sorozat és olyan $g_\nu(\mu) \in C$ függvénysorozat, hogy a hozzátartozó $m_{T_\nu}^*$ becslés-sorozatra érvényes a

$$\frac{\mathbf{D}^2 m_{T_\nu}^*}{\mathbf{D}^2 \mu_{T_\nu}^*} \to e$$

aszimptotikus összefüggés $\nu \to \infty$ esetén. Vezessük be a

$$\gamma_\nu(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{iu\lambda} g_\nu(u)\,du$$

függvényeket. Ekkor

$$\mathbf{D}^2(m^*_{T_\nu})=\frac{1}{T_\nu^2}\int_{-T_\nu}^{T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} r(s,t)g_\nu\left(\frac{t}{T_\nu}\right)ds\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_\nu(T_\nu\lambda)|^2 h(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{T_\nu}\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_\nu(\mu)|^2 h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)d\mu.$$

A számtani közép szerinti becslésre ugyanilyen módon a

$$\mathbf{D}^2\mu^*_{T_\nu}=\frac{1}{T_\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\mu}{\mu^2}h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)d\mu$$

egyenletet kapjuk, amelyből a Fejér-féle magok egy tulajdonságánál fogva következik, hogy

$$T_\nu\mathbf{D}^2\mu^*_{T_\nu}\to\pi h(0)$$

ha $\nu\to\infty$. A $g_\nu(u)$ függvények egyenletes folytonossága következtében ki lehet választani olyan részsorozatot, amely a folytonos $g(u)$ függvényhez tart. Ha feltesszük, hogy ez már megtörtént, akkor a korlátos konvergenciára vonatkozó LEBESGUE-tétel szerint

$$\int_{-1}^{1}|g(u)-g_\nu(u)|^2\,du\to 0$$

ha $\nu\to\infty$. PLANCHEREL tételének felhasználásával továbbá azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_\nu(\mu)-\gamma(\mu)|^2\,d\mu\to 0,$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\gamma_\nu(\mu)\sqrt{h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)}-\gamma(\mu)\sqrt{h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)}\right|^2 d\mu\leqq H\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_\nu(\mu)-\gamma(\mu)|^2\,d\mu\to 0$$

ha $\nu\to\infty$. Ennélfogva

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_\nu(\mu)|^2 h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)d\mu-\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(\mu)|^2 h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)d\mu\to 0.$$

Azonban

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(\mu)|^2 h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)d\mu-h(0)\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(\mu)|^2 d\mu\right|\leqq\left|\int_{|\mu|<\varepsilon T_\nu}|\gamma(\mu)|^2\left[h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)-h(0)\right]d\mu\right|+$$

$$+\left|\int_{|\mu|\geqq\varepsilon T_\nu}|\gamma(\mu)|^2\left[h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right)-h(0)\right]d\mu\right.$$

és ha ε értékét olyan kicsire választjuk, hogy $|h(\mu)-h(0)|<\delta$ legyen ha $|\mu|<\varepsilon$, és azután T_ν-t olyan nagyra választjuk, hogy $\int\limits_{|\mu|\geqq\varepsilon T\mu} |\gamma(\mu)^2 d\mu<\delta$ legyen, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_\nu(\mu)|^2 h\left(\frac{\mu}{T_\nu}\right) d\mu \to h(0) \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\mu)|^2 d\mu$$

ha $\nu\to\infty$. Azonban PLANCHEREL tétele szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\mu)|^2 d\mu = 2\pi \int_{-1}^{1} |g(u)|^2 du,$$

tehát a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség értelmében

$$e=2\int_{-1}^{1}|g(u)|^2du \geqq \left\{\int_{-1}^{1}|g(u)|du\right\}^2 \geqq \left\{\int_{-1}^{1}g(u)du\right\}^2=1.$$

Az e mennyiség definíciójánál fogva azonban csupán az egyenlőség lehetséges, tehát állításunkat bebizonyítottuk.

Ennek az eredménynek a legfontosabb következménye az alábbi

KOROLLÁRIUM: *Az*

$$m^* = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g\left(\frac{t}{T}\right) x(t)dt$$

típusú becslések között — ahol $g(u)$ a $(-1, 1)$-ben definiált olyan függvény, amelyre $\int_{-1}^{1} g(u)du=1$, és amely független T-től — nem lehet találni a számtani közép szerinti becslésnél aszimptotikusan hatékonyabb becslést.

A fenti bizonyítás továbbá azt is kimutatja, hogy e becslések közül a leghatékonyabb ténylegesen azonos a számtani közép szerinti becsléssel.

Megjegyezzük, hogy a $g_\nu(u)\in C$ feltételt nem lehet elhagyni anélkül, hogy ugyanakkor ne szűkítenénk valamiképpen a tekintett folyamatok osztályát. Vegyük ugyanis példaképpen azt a folyamatot, amelynek korrelációs függvénye $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Ha ennek a folyamatnak észleljük egy realizációját tetszőleges nem elfajult intervallumon, akkor ismerjük a realizációt t minden értékére, mert ez a folyamat analitikus minden t-re. Ezért a realizáció tetszőlegesen kicsi szakaszon ismert értékeiből kiindulva képezhetjük az $\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} x(t)dt$ kifejezést, amely a folyamat spektrumának folytonossága miatt $A\to\infty$ esetén átlagban az m igazi értékéhez tart. A számtani közép szerinti becslés efficienciája tehát ebben az esetben nulla az összes lineáris becslések osztályában.

5. 4. Doob-féle elemi folyamatok. Láttuk, hogy a folyamatok átlagára vonatkozó becslések vizsgálatánál sokszor nem volt elegendő csupán $\int x(t)f(t)dt$ típusú becslésekre szorítkozni, ahol $f(t)$ négyzetesen integrálható függvény, hanem az előbbiekben Stieltjes-integrálokat is be kellett vezetni. Ezért szükséges, hogy ezt a kérdést más szempontból is megvizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy ismerjük az $y(t) = m+x(t)$ folyamatnak az (a, b) időintervallumban észlelt értékeit, és legyen $\mathbf{E}x(t)=0$. Keressük m-nek egy minimális szórású torzítatlan becslését. Ha m^* torzítatlan becslés és

$$m^* = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, m_n^*; \quad m_n^* = \sum_1^n c_\nu^{(n)} y(t_\nu^{(n)}); \quad t_\nu^{(n)} \in (a, b),$$

akkor

$$\mathbf{E}m_n^* = m \sum_1^n c_\nu^{(n)} \to m, \quad \text{ha} \quad n\to\infty.$$

Ebben az esetben tehát

$$m^* = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \left\{ \sum_1^n c_\nu^{(n)} y(t_\nu^{(n)}) + \left[1 - \sum_1^n c_\nu^{(n)}\right] y(a) \right\},$$

mert a szögletes zárójelben levő kifejezés zérushoz tart, ha $n\to\infty$. Ilyenképpen minden torzítatlan lineáris becslés

$$\sum_1^n c_\nu^{(n)} y(t_\nu^{(n)})$$

alakú véges összegek határértékének tekinthető, ahol $\sum_1^n c_\nu^{(n)} = 1$.

Tekintsük most a

$$\sum_1^n c_\nu x(t_\nu)$$

alakú valószínűségi változók által alkotott $M_0 \subset L_2(X;\, a, b)$ halmazt, ahol

$$\sum_1^n c_\nu = 1; \quad t_\nu \in (a, b); \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Ennek a halmaznak átlag szerinti konvergenciában való lezárásával egy új $M \subset \subset L_2(X;\, a, b)$ halmazt kapunk. Mivel az M halmaz nyilvánvalóan zárt és konvex, létezik legalább egy olyan μ^* eleme, amelyre

$$\|\mu^*\| = \inf_{z\in M} \|z\|.$$

Könnyen ki lehet mutatni, hogy valójában csupán egyetlen ilyen elem létezhetik. Legyen ugyanis μ_1^* egy másik ilyen elem. Ekkor $\frac{\mu^*+\mu_1^*}{2} \in M$, és

$$\left\| \frac{\mu^*+\mu_1^*}{2} \right\|^2 = \frac{\|\mu^*\|^2}{4} + \frac{\|\mu_1^*\|^2}{4} + 2Re\frac{\mathbf{E}\mu^*\bar{\mu}_1^*}{4} < \|\mu^*\|^2,$$

ami ellentmond μ^* definíciójának. Így tehát *a torzítatlan lineáris becslések osztályában létezik egyetlen minimális szórású becslés.*

Jelöljük ezt a becslést m^*-gal és tekintsük az $\mathbf{E}m^*\overline{x(t)}$, $a \leqq t \leqq b$, kifejezést. Ha

$$\mathbf{E}m^*\overline{x(\alpha)} \neq \mathbf{E}m^*\overline{x(\beta)}; \quad a \leqq \alpha, \beta \leqq b,$$

akkor bevezetjük az

$$m_1^* = m^* + \varepsilon[x(\alpha) - x(\beta)]$$

becslést, amely szintén torzítatlan. Ebben az esetben

$$\|m_1^* - m\|^2 = \|m^* - m\|^2 + 2Re\{\bar{\varepsilon}\mathbf{E}[m^* - m]\overline{[x(\alpha) - x(\beta)]}\} + |\varepsilon|^2 \|x(\alpha) - x(\beta)\|^2,$$

tehát lehet választani olyan ε értéket, hogy $\mathbf{D}m_1^* < \mathbf{D}m^*$ legyen, ellentmond m^* definíciójának. *Következésképpen az* $\mathbf{E}m^*\overline{x(t)}$ *függvénynek állandó értéket kell felvennie minden az* (a, b) *intervallumhoz tartozó* t *esetében:*

$$\mathbf{E}m^*\overline{x(t)} = c; \quad t \in (a, b).$$

Mivel azonban $m^* = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, m_n^*$, ahol

$$m_n^* = \sum_1^n c_\nu^{(n)} y(t_\nu^{(n)}),$$

következik

$$\mathbf{D}^2 m^* = \|m^* - m\|^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(m^* - m)\overline{(m_n^* - m)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, m^*\overline{(m_n^* - m)} = c \sum_1^n \overline{c_\nu^{(n)}} = c,$$

tehát *a c állandó egyenlő az* m^* *becslés szórásával.*

Megjegyezzük még, hogy *ennek az egyenletnek a megoldása mindig megadja az egyértelműen meghatározott legkisebb szórású torzítatlan lineáris becslést.* Ugyanis ha

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E}m^*\overline{x(t)} = c \\ \mathbf{E}m_1^*\overline{x(t)} = c_1 \end{array}\right\}, \quad a \leqq t \leqq b,$$

akkor a $c = c_1$ egyenlőségből következik, hogy $\|m^* - m_1\|^2 = 0$, vagyis hogy a két becslés egybeesik. Ha viszont $c \neq c_1$, akkor mindig feltehetjük, hogy $c \neq 0$, ekkor azonban nyilvánvalóan

$$m_1^* = \frac{c_1}{c} m^*,$$

és abból, hogy mindkét becslés torzítatlan, közvetlenül következik $c_1 = c$.

Alkalmazzuk az itt kapott eredményeket a stacionárius folyamatoknak egy DOOB által bevezetett fontos osztályára [5]. Itt csupán ennek az osztálynak a reguláris (nem-determinisztikus) típusú folyamataival kívánunk foglalkozni, vagyis feltesszük, hogy a folyamat korrelációs függvényét elő lehet állítani az

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{d\lambda}{|a_n(i\lambda)^n + a_{n-1}(i\lambda)^{n-1} + \ldots + a_0|^2}$$

alakban, ahol a nevezőben levő polinom együtthatói valósak és a λ_ν zérushelyek mind a felső félsíkban helyezkednek el:

$$a_n(i\lambda)^n + \ldots + a_0 = a_n i^n \prod_1^n (\lambda - \lambda_\nu).$$

Ugyanezt a folyamatot elő lehet állítani egy állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet megoldásaként is, (KARHUNEN [2]). Ha $n=1$, akkor olyan folyamatot kapunk, amelynek a korrelációs függvénye $e^{-\beta|t|}$.

Közvetlenül belátható, hogy a tekintett folyamatnak léteznek a deriváltjai az $(n-1)$-edrendű deriváltig bezárólag (az átlagban való konvergencia értelmében). Tekintsük az

$$m^* = \frac{\sum_0^{n-1} \{\alpha_\nu x^{(\nu)}(0) + \beta_\nu x^{(\nu)}(T)\} + a_0 \int_0^T x(s)\,ds}{2a_1 + a_0 T}$$

becslést, ahol $x(t)$ a megfigyelt folyamat, és

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu &= (-1)^\nu a_{\nu+1} \\ \beta_\nu &= a_{\nu+1} \end{aligned}\right\}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Ilyen becslés mindig lehetséges, mert

$$ia_1 = (-1)^{n-1} i^n a_n \sum_1^n \frac{\lambda_1 \ldots \lambda_n}{\lambda_\nu} = -a_0 \sum_1^n \frac{1}{\lambda_\nu} = -a_0 \sum_1^n \frac{\bar{\lambda}_\nu}{|\lambda_\nu|^2},$$

ahonnan kitűnik, hogy $i\frac{a_1}{a_0}$ $(a_0 \neq 0)$ képzetes része pozitív, tehát a_1 és a_0 azonos előjelűek, és így a becslés nevezője nem lehet zérus. A becslés nyilvánvalóan torzítatlan, és ki fogjuk mutatni, hogy egyszersmind a szórása is minimális. Tekintsük az

$$\mathbf{E} m^* \overline{[x(t) - m]} = \frac{\sum_0^{n-1} \{\alpha_\nu r^{(\nu)}(-t) + \beta_\nu r^{(\nu)}(T-t)\} + a_0 \int_0^T r(s-t)\,dt}{2a_1 + a_0 T}$$

kifejezést. Azonban

$$a_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{a_n(i\lambda)^n + \ldots + a_0}{[a_n(i\lambda)^n + \ldots + a_0]^2}\,d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{d\lambda}{a_n(-i)^n \prod_1^n (\lambda - \bar{\lambda}_\nu)},$$

ahol a jobb oldal $t > 0$ esetében CAUCHY tétele szerint azonosan zérus. Hasonlóképpen kapjuk $t < 0$ esetére, hogy

$$a_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} - a_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + (-1)^n a_0 r(t) = 0.$$

Így tehát

$$a_0\int_0^T r(s-t)ds = a_0 \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{t-\varepsilon} r(s-t)ds + \int_{t+\varepsilon}^{T} r(s-t)ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\{a_1[r(-\varepsilon)-r(-t)]-\right.$$

$$-a_2[r'(-\varepsilon)-r'(-t)]+\ldots+(-1)^{n+1}a_n[r^{(n-1)}(-\varepsilon)-r^{(n-1)}(-t)]-a_1[r(T-t)-r(\varepsilon)]-$$

$$\left.-a_2[r'(T-t)-r'(\varepsilon)]-\ldots-a_n[r^{(n-1)}(T-t)-r^{(n-1)}(\varepsilon)]\right\} = 2a_1r(0)+2a_3r''(0)+\ldots$$

$$\ldots+2a_\mu r^{(\mu-1)}(0)-a_1r(-t)-a_1r(T-t)+a_2r'(-t)-a_2r'(T-t)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n a_n r^{(n-1)}(-t)-a_n r^{(n-1)}(T-t),$$

ahol $\mu=n$, ha n páratlan és $\mu = n-1$, ha n páros. A fentiekből következik, hogy

$$\mathrm{E}m^*\overline{[x(t)-m]} = \frac{2a_1r(0)+2a_2r''(0)+\ldots+2a_\mu r^{(\mu-1)}(0)}{2a_1+a_0T} = \text{konst.}$$

A jobb oldal itt nem függ t-től, amiből következik, hogy m^* *valóban megadja az egyetlen minimális szórású torzítatlan becslést.* A szórás meghatározására csupán az utóbbi egyenlet jobb oldalán szereplő állandó értékét kell kiszámítani. Az $r(t)$ számára megadott két differenciálegyenletet $-A$ és A határok között integrálva, és tekintetbe véve, hogy $r(\pm A)$, $r'(\pm A)$, ..., $r^{(n-1)}(\pm A)$ a Fourier-együtthatókra vonatkozó LEBESGUE-tétel szerint nullához tart, ha $A\to\infty$, azt kapjuk, hogy

$$2a_1r(0)+2a_3r''(0)+\ldots+2a_\mu r^{(\mu-1)}(0) = \lim_{A\to\infty} a_0\int_{-A}^{A} r(t)dt.$$

Így tehát a fenti leghatékonyabb becslés szórása

$$\frac{a_0 2\pi \frac{1}{a_0^2}}{2a_1+a_0T} = \frac{2\pi}{a_0(2a_1+a_0T)}.$$

5. 5. Tisztán nem-determinisztikus folyamatok. Láttuk, hogyha a folyamat egy realizációjának egy A hosszúságú szakaszon való ismerete alapján extrapolálni tudjuk a folyamat értékeit minden más időpontra, akkor a folyamat A-nál hosszabb időszakaszon végzett megfigyelése alapján az átlag számára szerkesztett, számtani közép szerinti becslés hatékonysága nulla. Ennek az eshetőségnek az elkerülése végett közelfekvő a vizsgálatot olyan sztochasztikus folyamatokra korlátozni, amelyek regulárisak, más szóval „tisztán nem-determinisztikusak" (ilyen folyamatokról lásd pl. HANNER [1] és KARHUNEN [4] [2]). Ebben az esetben a folyamat spektrál eloszlásfüggvénye abszolút folytonos és azzal a tulajdonsággal bír, hogy létezik olyan abszolút értékben négyzetesen integrálható $f(\lambda)$ függvény, amelyre

$$|f(\lambda)|^2 = F'(\lambda)$$

[2]Magának a reguláris folyamatnak a fogalmát KOLMOGOROV vezette be először [1*]. Lásd még DOOB [1*], XII. fej.

és ahol a

$$g(a) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{ia\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

függvény a negatív féltengelyen mindenütt nulla. Feltesszük még ezenkívül, hogy λ kis értékeire

$$f(\lambda) = f_0 + f_1 \lambda (1 + 0(\lambda)),$$

ahol f_0 valós és zérustól különböző.

Tekintsük λ függvényeinek azt a Hilbert-terét, amelyben a belső szorzatot a következő kifejezés adja meg:

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \overline{\psi(\lambda)}\, dG(\lambda),$$

ahol

$$G(\lambda) = F(\lambda) + \varepsilon(\lambda).$$

Ebben a térben a

$$H(\lambda) = \frac{e^{-iT\lambda} \frac{1}{f(\lambda)} - e^{-iT\lambda} \frac{1}{f(\lambda)}}{\lambda}$$

függvény, úgyszintén az $e^{it\lambda}$, $-T \leqq t \leqq T$, függvények nyilvánvalóan véges normájúak. Hilbert-terünknek az $e^{it\lambda}$, $-T = t = T$ függvényeken kifeszített alterét jelöljük $\lambda_2(T)$-vel. Legyen

$$H(\lambda) = e^{-iT\lambda} \frac{\frac{1}{f(\lambda)} - \frac{1}{f(0)}}{\lambda} + \frac{e^{-iT\lambda} - e^{iT\lambda}}{f(0)\lambda} + e^{iT\lambda} \frac{\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(\lambda)}}{\lambda} = H_1(\lambda) + H_2(\lambda) + H_3(\lambda).$$

Ekkor a H_1, H_2, H_3 függvények mindegyike véges normájú, azonkívül

$$H_2 = \frac{1}{if(0)} \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t}\, dt \in \lambda_2(T).$$

Legyen

$$\begin{cases} H_{1,T}^* = P_{\lambda_2(T)} H_1, \\ H_{3,T}^* = P_{\lambda_2(T)} H_3 \end{cases}$$

és

$$H_T^*(\lambda) = H_{1,T}^*(\lambda) + H_2(\lambda) + H_{3,T}^*(\lambda) \in \lambda_2(T).$$

Ha

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$$

az $x(t)$ folyamat spektrális felbontása, akkor

$$y(t) = m + x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ'(\lambda),$$

ahol

$$Z'(\lambda) = Z(\lambda)+m\varepsilon(\lambda).$$

Az $y(t)$ folyamatnak a $(-T, T)$ intervallumon történt megfigyelése alapján meg lehet szerkeszteni az

$$m_0^* = \int_{-\infty}^{\infty} H_T^*(\lambda)\, dZ'(\lambda)$$

becslést. Ha ugyanis

$$H_T^*(\lambda)\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_1^n c_\nu^{(n)} e^{it_\nu^{(n)}\lambda}, \quad -T \leqq t_\nu^{(n)} \leqq T,$$

akkor nyilvánvalóan

$$m_0 = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_1^n c_\nu^{(n)} y\left(t_\nu^{(n)}\right).$$

Ebben az esetben

$$\mathbf{E}m_0^* = mH_T^*(0) = m[H_{1,T}^*(0)+H_2(0)+H_{3,T}^*(0)].$$

Azonban az

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\overline{f(\lambda)}}-\frac{1}{f(0)}\right]$$

függvénynek $H'_{1,T}(\lambda)$ projekciója az $\{e^{i(T+t)\lambda};\ -T \leqq t \leqq T\}$ elemek által kifeszített altérre nyilvánvalóan egyenlő az $e^{iT\lambda}H_{1,T}^*(\lambda)$ függvénnyel, ezért $T\to\infty$ esetén egy $H'_{1,\infty}(\lambda)$ határértékhez tart. Így tehát

$$(H_1, 1) = (H_1^*, 1) = e^{-iT\lambda}H'_{1,T}(\lambda) - e^{-iT\lambda}H'_{1,\infty}(\lambda), 1) +$$

$$+ (e^{-eT\lambda}H'_{1,\infty}, 1).$$

$T\to\infty$ esetén az egyenlet bal oldalának a határértékét közvetlenül ki lehet számítani:

$$(H_1', 1) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\lambda)\, dG(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) - \dfrac{|f(\lambda)|^2}{f(0)}}{\lambda} e^{-iT\lambda}\, d\lambda + H_1(0) \to H_1(0) = \frac{\bar{f}_1}{f_0^2}.$$

De a jobb oldal első tagja $T\to\infty$ esetén zérushoz tart:

$$|(e^{-iT\lambda}H_{1,T} - e^{-iT\lambda}H_{1,\infty}, 1)| \leqq \|1\| \cdot \|H'_{1,T} - H'_{1,\infty}\| \to 0,$$

a második tag határértéke pedig:

$$(e^{-iT\lambda}H_{1,\infty}, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} H'_{1,\infty}(\lambda) e^{-iT\lambda} |f(\lambda)|^2\, d\lambda + H'_{1,\infty}(0) \to H'_{1,\infty}(0).$$

Így tehát

$$\lim_{T\to\infty} H_{1,T}^*(0) = \lim_{T\to\infty} H'_{1,T}(0) = H'_{1,\infty} = H_1(0).$$

Hasonlóképpen lehet bizonyítani, hogy

$$\lim_{T\to\infty} H_{3,T}^{*}(0) = H_3(0).$$

A fentiekből következik, hogy az alábbi kifejezés a folyamat átlagának torzítatlan becslése:

$$m^* = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_T^*(\lambda)\,dZ'(\lambda)}{H_{1,T}^*(0) + \frac{2T}{if(0)} + H_{3,T}^*(0)},$$

(a nevező különbözik nullától, ha T elég nagy). Ki fogjuk mutatni, hogy ennek a becslésnek a szórása minimális.

Ugyanis $$\mathbf{E}m^*\overline{x(t)} = \mathbf{E}[m^* - m]\overline{x(t)},$$

és

$$\left[H_{1,T}^*(0) + \frac{2T}{if(0)} + H_{3,T}^*(0)\right]\mathbf{E}[m^* - m]\overline{x(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_T^*(\lambda)e^{-it\lambda}F'(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_T^*(\lambda)e^{-it\lambda}dG(\lambda) - H_T(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)e^{-it\lambda}dG(\lambda) - H_T^*(0) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}H(\lambda)F'(\lambda)\,d\lambda + H(0) - H_T^*(0).$$

Legyen most

$$n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)e^{-it\lambda}F'(\lambda)\,d\lambda.$$

Ekkor $-T \leqq t_1,\ t_2 \leqq T$ esetén

$$n(t_2) - n(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(-T-t_2)\lambda} - e^{i(-T-t_1)\lambda}}{\lambda} f(\lambda)\,d\lambda - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(T-t_2)\lambda} - e^{i(T-t_1)\lambda}}{\lambda} f(\lambda)\,d\lambda.$$

A jobb oldal első tagja itt Plancherel tétele szerint:

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-T-t_1}^{-T-t_2} g(a)\,da = 0,$$

mert a fenti feltétel értelmében

$$\begin{cases} -T \leqq t_2 \\ -T \leqq t_1. \end{cases}$$

Ugyanígy lehet kimutatni, hogy a második tag is nulla, mert

$$\begin{cases} t_2 \leqq T \\ t_1 \leqq T. \end{cases}$$

Ezért

$$n(t)=C(T) \quad \text{ha} \quad -T\leqq t\leqq T,$$

tehát m^* csakugyan minimális szórású becslés. Hasonlóképpen lehet kimutatni, hogy $C(T)$ valóban független T-től.

Számítsuk most ki, mekkora az m^* becslés szórása. Tekintsük a

$$C=\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)F'(\lambda)d\lambda=2i\int_{-\infty}^{\infty}\cos T\lambda\frac{Im f(\lambda)}{\lambda}d\lambda-2i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin T\lambda}{\lambda}\operatorname{Re} f(\lambda)d\lambda$$

kifejezést. A jobb oldalon az első integrál nullához tart, ha $T\to\infty$ (mert integrálható függvénynek a Fourier-transzformáltja), a második tag határértéke pedig $-2i\pi f(0)$. Így tehát az m mennyiség legjobb torzítatlan becslésének a szórása

$$\mathbf{D}^2 m^*=\frac{-2if(0)\pi+H(0)-H_T^*(0)}{H_{1,T}^*(0)+\frac{2T}{if(0)}+H_{3,T}^*(0)}\sim\frac{\pi f(0)^2}{T}=\frac{\pi F'(0)}{T}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a reguláris (tisztán nem-determinisztikus) sztochasztikus folyamatok itt vizsgált osztályának az esetében az aritmetikai közép szerinti becslés aszimptotikusan efficiens a lineáris torzítatlan becslések osztályában (és nem csupán az 5. 3. szakaszban vizsgált szűkebb osztályban).

5. 6. A becslések efficienciája. Ebben a szakaszban és a következő szakaszokban a maximum likelihood módszerrel fogunk foglalkozni. Habár általában ennek a módszernek az átvitele lehetséges a folytonos idő-paraméterű sztochasztikus folyamatokra, néhány igen érdekes és mélyreható bonyodalom vetődik fel. Ezeknek a problémáknak a megoldását az 5. 7—5. 9. szakaszokban fogjuk először megkísérelni.

Itt is feltesszük, hogy az α paraméterre (amely az A intervallumból veszi értékeit) a reguláris eset áll fenn, továbbá feltesszük, hogy az $f(\omega, \alpha)$ likelihood függvény majdnem biztosan differenciálható, és a derivált eleget tesz a

$$\left|\frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}\right|<F(\omega)$$

feltételnek, ahol $F(\omega)$ egy véges szórású valószínűségi változó (a P_0 valószínűségi mértékre nézve), és ezenkívül

$$E_\alpha\left(\frac{\partial\log f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2<\infty.$$

Vizsgáljuk az α paraméter véges szórású $\alpha^*(\omega)$ becsléseit; ebben az esetben SAKS [1] könyve 15. 1. szakaszában található tétel alkalmazásával *ennek a szórásnak a minimális értékére egy olyan kifejezést lehet levezetni, amely hasonló a véges dimenziószámú esetben kapott kifejezéshez* (lásd CRAMÉR [4]).

Legyen a becslésünk torzított és a torzítás nagysága legyen $b(\alpha)$, akkor

$$\alpha+b(\alpha)=\mathbf{E}_\alpha a^*=\mathbf{E}_0[\alpha^*(\omega)f(\omega,\alpha)]$$

és

$$1+\frac{db(\alpha)}{d\alpha}=E_0\left[\alpha^*(\omega)\frac{\partial f(\omega,\alpha)}{\partial\alpha}\right]$$

(ez utóbbi egyenlet jobb oldalán az integrál alatti kifejezés abszolút értékben nem nagyobb az $|\alpha^*(\omega)|F(\omega)$ mennyiségnél, ez utóbbi kifejezés viszont a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség értelmében integrálható a P_0 mértékre nézve). Hasonlóképpen kapjuk az

$$1 = \mathbf{E}_\alpha 1 = \mathbf{E}_0 f(\omega, \alpha)$$

és

$$0 = \mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial f(\omega, \alpha)}{\partial \alpha} \right)$$

egyenleteket. Így tehát

$$\left(1 + \frac{db}{d\alpha}\right)^2 = \left[\mathbf{E}_0 (\alpha^* - \alpha) \frac{\partial f(\omega, \alpha)}{\partial \alpha}\right]^2 \leqq \mathbf{E}_0[(\alpha^* - \alpha)^2 f(\omega, \alpha)] \mathbf{E}_0 \left[\left(\frac{\partial \log f(\omega, \alpha)}{\partial \alpha}\right)^2 f(\omega, \alpha)\right] =$$

$$= \mathbf{E}_\alpha (\alpha^* - \alpha)^2 E_\alpha \left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2,$$

amiből következik, hogy

$$\mathbf{E}_\alpha (\alpha^* - \alpha)^2 \geqq \frac{\left(1 + \frac{db}{d\alpha}\right)^2}{\mathbf{E}_\alpha \left(\frac{\partial \log f(\omega, \alpha)}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Mellékesen megjegyezzük, hogy ha ezt az eredményt hozzárendelt valószínűségi változókkal bíró pontfolyamatokra alkalmazzuk (amelyeket a 3. 1. szakaszban ismertetett módon koordinátáikkal adunk meg), akkor olyan eredményt kapunk, amely formálisan analóg WOLFOWITZ-nak [1] a szekvenciális becslések minimális szórására vonatkozó tételével.

Könnyen belátható, hogy a legutóbbi összefüggésben az egyenlőség esete akkor és csak akkor következik be, ha

$$\frac{\partial \log f(\omega, \alpha)}{\partial \alpha} = k(\alpha)[\alpha^*(\omega) - \alpha].$$

Ebből, ugyanúgy mint a klasszikus esetben, következik, hogy ha egyáltalában létezik efficiens becslés, akkor elő lehet állítani a maximum likelihood egyenlet egyetlen, nem azonosan állandó megoldásaként.

Példaképpen vizsgáljuk az 5. 2. szakaszban tárgyalt becsléselméleti feladatot és tegyük fel, hogy normális folyamattal és a reguláris esettel van dolgunk. Ez esetben a likelihood függvény

$$f(\omega, m) = e^{-\frac{m^2}{2} \sum_1^\infty a_\nu^2 \lambda_\nu + m \sum_1^\infty a_\nu \lambda_\nu x_\nu},$$

amely kielégíti a regularitás minden feltételét. Ha m^* az m paraméternek véges szórású torzítatlan becslése, akkor a fenti eredménynek megfelelően

$$\mathbf{D}_m^2 m^* \geqq \frac{1}{\mathbf{E}_m \left[\sum_1^\infty a_\nu \lambda_\nu x_\nu - m \sum_1^\infty \lambda_\nu a_\nu^2\right]^2} = \frac{1}{\sum_1^\infty a_\nu^2 \lambda_\nu}.$$

Mivel azonban a jelen esetben

$$\frac{\partial \log f(\omega, m)}{\partial m} = m \left\{ \frac{\sum_{1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu x_\nu}{\sum_{1}^{\infty} a_\nu^2 \lambda_\nu} - m \right\} \sum_{1}^{\infty} a_\nu^2 \lambda_\nu,$$

tehát az alábbi efficiens becslést kapjuk:

$$m^* = \frac{\sum_{1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu x_\nu}{\sum_{1}^{\infty} a_\nu^2 \lambda_\nu},$$

amely eredményt közvetlen számítással sem nehéz igazolni.

Különösen érdekesek számunkra a normális stacionárius Markov-folyamatok. Ez esetben

$$f(\omega, m) = e^{\frac{m}{2}\left[x(0)+x(T)+\beta \int_0^T x(t)dt\right] - \frac{m^2}{2}\left(1+\frac{T}{2}\right)}$$

és a fenti módszerrel az alábbi alakú minimális szórású torzítatlan becslést kapjuk:

$$m^* = \frac{x(0)+x(T)+\beta \int_0^T x(t)\,dt}{2+\beta T}.$$

Így tehát ez a becslés ilyen értelemben a legjobb az összes véges szórású becslések közül.

5. 7. A maximum likelihood módszer. Majdnem ugyanolyan módszerekkel, mint a véges dimenziójú esetben, bizonyítani lehet a becslések számos általános tulajdonságát, pl. azt, hogy ugyanannak a paraméternek két efficiens becslése feltétlenül 1 valószínűséggel azonos. Hasonló módszereket lehet alkalmazni több paraméter egyidejű becslésének az esetére is. A maximum likelihood módszernek a sztochasztikus folyamatokra való alkalmazásakor azonban néhány új nehézség merül fel.

Kezdjük az alábbi eredménnyel, amely viszont még nagyon könnyen bizonyítható. Tegyük fel, hogy teljesül az alábbi három feltétel:

1. A $\dfrac{\partial^\nu \log f(\omega, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}$ deriváltak, $\nu = 1, 2, 3$, majdnem biztosan léteznek.

2. Minden $\alpha \in A$ esetén érvényesek a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| < F_1(\omega), \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right| < F_2(\omega), \quad \left|\frac{\partial^3 \log f}{\partial \alpha^3}\right| < H(\omega)$$

egyenlőtlenségek, ahol $\mathbf{E}_0 F_1 < \infty$, $E_0 F_2 < \infty$ és $\mathbf{E}_\alpha H < k$.

3. Minden $\alpha \in A$ esetén $\mathbf{E}_\alpha \left(\dfrac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2$ pozitív és véges.

Tegyük fel, hogy ismerjük a folyamat N független realizációját, és ezeknek a realizációknak az alapján keresünk becslést α-ra. A megfigyelt realizációkat az $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ szimbólumokkal jelölve, vizsgáljuk a megfelelő

$$f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N; \alpha) = f(\omega_1; \alpha) f(\omega_2; \alpha) \ldots f(\omega_N; \alpha)$$

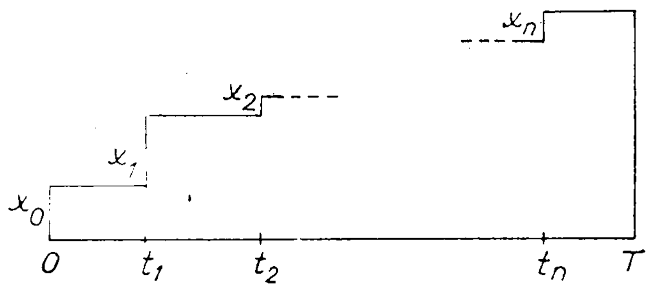
likelihood függvényt. A jelen esetben ki lehet mutatni, hogy a

$$\frac{\partial \log f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N; \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

likelihood egyenletnek létezik $\alpha^*(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ megoldása, amely az α paraméternek $N \to \infty$ esetére konzisztens, aszimptotikusan normális és aszimptotikusan efficiens becslése.

Ennek az állításnak a bizonyítása pontosan ugyanolyan, mint a Cramér [4] könyvben az 500—503. oldalakon található megfelelő bizonyítás.

Az eredmény szemléltetésére tekintsük az Einstein [1] által kavicsoknak folyómederben történő mozgására alkalmazott sztochasztikus folyamatot. Figyeljünk meg a $(0, T)$ időintervallum folyamán egy bizonyos kavicsot; minden egyes időpontban kétféle lehetséges állapot közül az egyik állapotban fogjuk találni: vagy mozog, vagy pedig mozdulatlanul fekszik a meder fenekén. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a mozgás egyes ugrásokból tevődik össze, éspedig úgy, hogy minden egyes ugrás elhanyagolhatóan kicsi idő alatt történik (azaz pillanatnyinak tekinthető). Tegyük fel továbbá, hogy a $t=0$ időpontban a kavics mozog. A többi olyan $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpont, amikor a kavics mozog, legyen rögzített $1/\vartheta$ sűrűségű Poisson eloszlású a $(0, T)$ intervallumon. Könnyű belátni, hogy ϑ az átlagos nyugalmi idő. A $0, t_1, \ldots, t_n$ időpontokban történő ugrások alkalmával megtett távolságok legyenek $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (lásd az 1. ábrát). Legyenek itt az x_i távolságok független valószínűségi változók, amelyek csak pozitív értékeket vehetnek fel $1/\xi \cdot e^{-x/\xi}$ valószínűség-sűrűséggel, ahol a ξ paraméter egy ugrás átlagos távolságával egyenlő. Tegyük fel, hogy ismerjük N különböző (azonos méretű) kavicson végzett N megfigyelés eredményeit, és ezeknek az adatoknak az alapján akarjuk a ϑ paramétert megbecsülni.



1. ábra

Az $x_0, t_1, x_1, \ldots, t_n, x_n$ koordinátatérben a valószínűség-sűrűséget a $dx_0 \ldots dx_n$ $dt_1 \ldots dt_n$ térfogatelembe való tartozás valószínűségével adjuk meg:

$$\frac{1}{\xi} e^{-\frac{x_0}{\xi}} dx_0 \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{t_1}{\vartheta}} dt_1 \ldots \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{t_n - t_{n-1}}{\vartheta}} dt_n \frac{1}{\xi} e^{-\frac{x_n}{\xi}} dx_n e^{-\frac{T-t_n}{\vartheta}} =$$

$$= \xi^{-(n+1)} e^{-\frac{X}{\xi}} \vartheta^{-n} e^{-\frac{T}{\vartheta}} dx_0 \ldots dx_n dt_1 \ldots dt_n,$$

ahol az $X = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ jelölést alkalmaztuk. A különböző realizációknak megfelelő koordinátákat az $i = 1, 2, \ldots, N$ indexekkel számozva az összes realizációkat jellemző koordinátatérben a valószínűségsűrűséget az alábbi alakban kapjuk meg:

$$\xi^{-\sum\limits_1^N (n_i+1)} e^{-\sum\limits_1^N \frac{X_i}{\xi}} \vartheta^{-\sum\limits_1^N n_i} e^{-\frac{NT}{\vartheta}}.$$

Ennek alapján könnyen meg tudjuk határozni az X mennyiségnek (a kavics összelmozdulásának) a valószínűségeloszlását. Itt csupán az eloszlás első négy momentumára van szükségünk, amelyek:

$$\alpha_1 = \xi\left(1+\frac{T}{\vartheta}\right)$$

$$\alpha_2 = \xi^2\left(2+4\frac{T}{\vartheta}+\frac{T^2}{\vartheta^2}\right)$$

$$\alpha_3 = \xi^3\left(6+18\frac{T}{\vartheta}+9\frac{T^2}{\vartheta^2}+\frac{T^3}{\vartheta^3}\right)$$

$$\alpha_4 = \xi^4\left(24+96\frac{T}{\vartheta}+72\frac{T^2}{\vartheta^2}+16\frac{T^3}{\vartheta^3}+\frac{T^4}{\vartheta^4}\right)$$

$$\mu_2 = \xi^2\left(1+2\frac{T}{\vartheta}\right)$$

$$\mu_3 = \xi^3\left(2+6\frac{T}{\vartheta}\right)$$

$$\mu_4 = \xi^4\left(9+36\frac{T}{\vartheta}+12\frac{T^2}{\vartheta^2}\right)$$

ahol a szokásos módon a közönséges momentumokat α_i-vel és a centrális momentumokat μ_i-vel jelöltük. A ϑ paraméter maximum likelihood becslése igen egyszerű:

$$\vartheta^* = \frac{NT}{\sum\limits_1^N n_i}.$$

Ha $\sum\limits_1^N n_i = 0$, akkor nyilvánvalóan $\vartheta^* = \infty$, azonban ennek az esetnek a valószínűsége nullához tart, amikor $N \to \infty$, tehát ennek a lehetőségnek csekély a gyakorlati jelentősége. A ϑ^*-ra kapott kifejezésből következik, hogy

$$\sqrt{N}(\vartheta^* - \vartheta) = -\vartheta \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_1^N \left(n_i - \frac{T}{\vartheta}\right)}{\frac{1}{N} \sum\limits_1^N n_i},$$

ahol az n_i mennyiségek Poisson-eloszlású független valószínűségi változók T/ϑ átlaggal. A centrális határeloszlástétel értelmében az $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_1^N\left(\eta_i-\frac{T}{\vartheta}\right)$ mennyiség eloszlása aszimptotikusan normális 0 átlaggal és T/ϑ szórással. Mivel $N\to\infty$ esetén az $\frac{1}{N}\sum_1^N n_i$ mennyiség valószínűségben T/ϑ-hoz tart, ezért (a CRAMÉR [4] könyv 20. 6. szakaszában megadott tétel szerint) a ϑ^* becslés aszimptotikusan normális, ϑ átlaggal és nagy N értékek esetén közelítőleg $\frac{1}{N}\frac{\vartheta^3}{T}$ szórással. A becslés efficienciájának a kiszámítására megjegyezzük, hogy

$$\mathbf{E}_\vartheta\left(\frac{\partial \log f(\omega,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)=\mathbf{E}_\vartheta\left(\frac{n}{\vartheta}-\frac{T}{\vartheta^2}\right)^2=\frac{T}{\vartheta^3},$$

amiből közvetlenül belátható, hogy ϑ^* aszimptotikusan efficiens becslés. A folyamat koordinátáiként itt az ugrások időpontjait és hosszúságait használtuk; de a különböző realizációk adataiból megszerkesztett legjobb becslésben csupán a megfigyelt ugrások száma szerepelt. EINSTEIN [1] munkája szerint csak az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ változókat figyelték meg; a hordalékok vizsgálatánál az n_i mennyiségeket feltehetőleg nem is tudják megfigyelni. Amennyiben ugyanennek a folyamatnak másféle alkalmazásainál ez a megfigyelés lehetséges volna (habár esetleg nehéz), érdekes megvizsgálni, hogy milyen mértékben csökken a ϑ paraméter becslésének az efficienciája, ha csupán az X_i értékeket figyelik meg. Vizsgáljuk a ϑ paraméternek az X_i értékek alapján szerkesztett következő becslését, amelyet EINSTEIN a momentumok módszerével állított elő, ([1] p. 38):

$$\vartheta_0=T\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m_2}{a_2^2}}}-1\right\},$$

ahol

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{N}\sum_1^N X_i \\ m_2=\frac{1}{N}\sum_1^N X_i^2-a_i^2. \end{cases}$$

A $\vartheta_0^*-\vartheta$ különbséget a minta-momentumok $H(a_1, m_2)$ függvényeként tekintve, azt kapjuk, hogy

$$H(\alpha_1\mu_2)=0 \qquad \mu_2(a_1)\sim\frac{\xi^2(1+2\theta)}{N}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial a_1}\right)_0=-\frac{\vartheta^3}{\xi T^2}(1+2\theta) \qquad \mu_{11}(a_1, m_2)\sim\frac{\xi^3(2+6\theta)}{N}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial m_2}\right)_0=\frac{\vartheta^3}{2\xi^2T^2}(1+\theta) \qquad \mu_2(m_2)\sim\frac{\xi^4(8+32\theta+8\theta^2)}{N},$$

ahol $\theta=\frac{T}{\vartheta}$ és a 0-indexszel azokat a mennyiségeket jelöltük, amelyeket az $a_1=\alpha_1$

és $m_2=\mu_2$ értékeknek a zárójeles kifejezésekbe való helyettesítésekor kapunk. A jobb oldali oszlopban a μ kifejezések a zárójelbe írt mennyiségek centrális momentumait jelentik. A CRAMÉR [4] könyv 28. 4. szakaszában megadott tétel alkalmazásával könnyen ki lehet mutatni, hogy a $\vartheta^*-\vartheta$ mennyiség eloszlása ebben az esetben aszimptotikusan normális 0 átlaggal és

$$\frac{\vartheta^6}{NT^4}(1+6\theta+10\theta^2+8\theta^3+2\theta^4) \qquad \text{szórással.}$$

Így tehát az EINSTEIN-féle becslés efficienciája

$$e(\vartheta_0^*)=\frac{\theta^3}{1+6\theta+10\theta^2+8\theta^3+2\theta^4}.$$

Tekintsük még a következő, az előbbivel rokon sztochasztikus folyamatot, amely az orvosi statisztikának egy problémájával kapcsolatban fordul elő.

Vizsgáljuk valamilyen A jelenség előfordulását vagy hiányát egy intervallumon, amelyet szokás szerint $(0, T)$-vel jelölünk, noha az adott esetben a paraméterünk nem időt jelent, hanem egy egyenesen mért távolság-koordinátát. Tegyük fel, hogy $t=0$ esetén az A^* eseményt észleljük (vagyis az A eseményt nem észleljük). Legyen a mintaterünk olyan függvények tere, amelyeknek az értéke általában csak 0 vagy 1 lehet (éspedig 0 az A^* és 1 az A észlelésekor), $t=0$ esetén pedig csakis 0 lehet. A folyamat koordinátái legyenek az $n_1, n_2, t_1, t_2, \ldots, t_{n_1+n_2}$ számok, ahol t_i az állapotváltozások időpontjait jelenti, n_1 az A állapotok kezdeti időpontjainak a számát, n_2 pedig ugyanezen állapotok vég-időpontjainak a számát jelenti. Nyilvánvaló, hogy vagy $n_1=n_2$, vagy pedig $n_1 = n_2+1$, attól függően, hogy a $t=T$ időpontban az A^* állapotot, illetve az A állapotot észleljük-e. Tegyük fel, hogy az A^* (illetve A) intervallumok hosszának a sűrűségfüggvénye $\beta e^{-\beta t}$, $t>0$ (illetőleg $\alpha e^{-\alpha t}$, $t>0$). Ekkor a koordinátatér egy térfogatelemébe való tartozás valószínűségét a következő módon kapjuk meg:

$$e^{-\beta t_1}\beta dt_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)}\alpha dt_2 \ldots e^{-\alpha(t_{n_1+n_2}-t_{n_1+n_2-1})}\alpha dt_{n_1+n_2} e^{-\beta(T-t_{n_1+n_2})}=$$
$$=e^{-\beta l'}\beta^{n_1}e^{-\alpha\lambda'}\alpha^{n_2}\,dt_1\ldots dt_{n_1+n_2}$$

az $n_1=n_2$ esetben, és

$$e^{-\beta t_1}\beta dt_1 \ldots e^{-\alpha(T-t_{n_1+n_2})} = e^{-\beta l''}\beta^{n_1}e^{-\alpha\lambda''}\alpha^{n_2}dt_1\ldots dt_{n_1+n_2}$$

az $n_1 = n_2+1$ esetben.

Itt az alábbi jelöléseket vezettük be:

$$\begin{aligned}
l' &= t_1+t_3-t_2+\ldots+T-t_{n_1+n_2},\\
l'' &= t_1+t_3-t_2+\ldots+t_{n_1+n_2}-t_{n_1+n_2-1},\\
\lambda' &= t_2-t_1+\ldots+t_{n_1+n_2}-t_{n_1+n_2-1},\\
\lambda'' &= t_2-t_1+\ldots+T-t_{n_1+n_2}.
\end{aligned}$$

Bevezetve az összes A^* intervallumok L összesített hosszúságát, látjuk, hogy az első esetben $L=l'$, és a második esetben $L=l''$. Hasonló összefüggések érvényesek az A intervallumok Λ összesített hosszúságára. Így tehát mindkét esetben

$$\beta^{n_1}e^{-\beta L}\alpha^{n_2}e^{-\alpha\Lambda}\,dt_1\ldots dt_{n_1+n_2}$$

alakban lehet a valószínűség-eloszlást felírni. A kísérletet N-szer, egymástól függetlenül elvégezve, a következő maximum likelihood becsléseket kapjuk:

$$\beta^* = \frac{\sum_1^N n_{1,i}}{\sum_1^N L_i}, \qquad \alpha^* = \frac{\sum_1^N n_{2,i}}{\sum_1^N \Lambda_i}.$$

A becslések nevezőjében szereplő mennyiségek azt az összesített időt adják meg, amelynek folyamán az éppen meglevő állapotnak (A^* az első esetben, A a második esetben) az ellenkező állapotba való átmenete várható, a számlálókban levő kifejezések pedig megadják azoknak az eseteknek a számát, amikor ilyen változás történt.

5. 8. Metrikus tranzitivitás — konzisztens becslések. Eddig azt az esetet vizsgáltuk, amikor a folyamatnak N független realizációja volt megfigyelhető. Kimutattuk, hogy ekkor a maximum likelihood módszer segítségével olyan becslést lehet szerkeszteni, amely aszimptotikusan konzisztens és asszimptotikusan efficiens, ha N végtelenhez tart. Abban a fontos esetben, amikor a folyamat stacionárius, azt lehetne remélni, hogy a maximum likelihood módszerrel a folyamat egyetlen T hosszúságú realizációjából is kaphatunk ilyen becslést, feltéve hogy T a végtelenhez tart. Ez a gondolat közelfekvő, mert ha T nagy, akkor a $(0, T)$ intervallumot fel lehet osztani nagy számú I_n intervallumra, amelyeket más I_n' intervallumok választanak el egymástól, éspedig úgy, hogy az utóbbiak összes hossza elhanyagolhatóan kicsi az egész $(0, T)$ intervallum hosszához képest, de mindegyik I_n' intervallum mégis elég hosszú ahhoz, hogy két különböző I_n intervallumon a folyamat értékei egymástól gyakorlatilag függetlenek legyenek. Nyilvánvaló azonban, hogy ennek az állításnak az érvényessége valamilyen járulékos feltételhez van kötve, amely biztosítja a folyamat értékeinek az aszimptotikus függetlenségét olyan időpontokban, amelyeket elég hosszú időköz választ el egymástól. Ilyen feltétel szükséges voltát bizonyítja a következő egyszerű példa.

Legyen $y(t)$ az előzőkben már többször tárgyalt normális sztochasztikus folyamat nulla átlaggal és adott $\varrho(s, t)$ korrelációs függvénnyel, és legyen x egy normális eloszlású valószínűségi változó, amely független $y(t)$-től minden t-re. Legyen x átlaga 0 és szórása σ. A megfigyelt folyamat legyen

$$x(t) = m + x + y(t); \quad 0 = t = T,$$

ahol m egy ismeretlen valós paraméter. Az előzőkben kimutattuk, hogy az m paraméter maximum likelihood becslésének, m^*-nak a szórása

$$\begin{cases} \mathbf{D}^2 m_T^* = \inf \int_0^T \int_0^T r(s, t) f(s) f(t) \, ds \, dt, \\ \int_0^T f(s) \, ds = 1, \end{cases}$$

ahol $r(s, t)$ az $x(t)$ folyamat korrelációs függvénye, vagyis

$$r(s, t) = \varrho(s, t) + \sigma^2.$$

Ebből közvetlenül belátható, hogy

$$\mathbf{D}^2 m_T^* \geqq \sigma^2,$$

és így m_T nem lehet m konzisztens becslése $T \to \infty$ esetén. Ez az eredmény nyilván annak a következménye, hogy az $r(s, t)$ korrelációs függvény kifejezésében fellépő σ^2 tag miatt a korrelációs kapcsolat nagyon erős marad $|t-s|$ nagy értékei esetében is. Ezért, ha biztosítani akarjuk konzisztens becslés létezését, akkor a *folyamatra olyan feltételt kell szabni, amely kizárja a túl erős korrelációs kapcsolat lehetőségét* $|t-s|$ *nagy értékeinél.* E célra a következőkben a *metrikus tranzitivitás* feltételét fogjuk használni (lásd az 1. 4. szakaszt).

Hogy a vizsgálatot ne bonyolítsák lényegbe nem vágó nehézségek, a 4. 1. szakaszban tárgyalt egyszerű esettel fogunk foglalkozni: legyen adva két különböző egyszerű hipotézis a P_{α_1}, illetőleg P_{α_2} valószínűség-eloszlásoknak megfelelően, ahol $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Bizonyítani fogjuk, hogy a metrikus tranzitivitás feltételének következményeképpen létezik az α paraméternek konzisztens becslése, ha a folyamat T megfigyelési ideje végtelenhez tart (illetve létezik konzisztens próba a két hipotézis összehasonlítására).

Tekintsük a mintatér összes véges dimenziójú I_n intervallumainak $\{I_n\}$ összességét, ahol n a dimenziószám. Ha minden $I \in \{I_n\}$ esetén

$$P_{\alpha_1}(I) = P_{\alpha_2}(I),$$

akkor az eloszlások ekvivalensek, és a feladat triviális. Az ellenkező esetben létezik olyan I intervallum, hogy

$$P_{\alpha_1}(I) \neq P_{\alpha_2}(I) \quad (\text{legyen pl. } P_{\alpha_1}(I) > P_{\alpha_2}(I)).$$

Az 5. 14. szakaszban ki fogjuk mutatni, hogy a metrikus tranzitivitás feltételének teljesülése esetén a $P(I)$ valószínűségre lehet szerkeszteni egy $\pi_T(I)$ konzisztens becslést. Legyen most $f(x)$ olyan valós függvény, hogy

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{ha} \quad x \leqq \dfrac{P_{\alpha_1}(I) + P_{\alpha_2}(I)}{2} \\[2ex] \alpha_2, & \text{ha} \quad x > \dfrac{P_{\alpha_1}(I) + P_{\alpha_2}(I)}{2}. \end{cases}$$

Ekkor $f[\pi_T(I)]$ valóban az α paraméter konzisztens becslése.

5. 9. A maximum likelihood módszer (folytatás). Ahhoz, hogy a maximum likelihood módszerrel akkor is optimális tulajdonságú becslést állíthassunk elő, ha a folyamatnak csupán egyetlen, de nagyon hosszú idejű realizációja ismeretes, a metrikus tranzitivitáson kívül még egy feltételnek kell teljesülnie. Ez a feltétel nem a folyamat múltbeli és jövőbeli értékei közötti függőségi kapcsolat mértékét, hanem annak jellegét korlátozza. Tekintsük a folyamat értékeit a t időpontot követő időpontokban. Legyen ismeretes a folyamat realizációja az $a \leqq s \leqq b$ $(b < t)$ intervallumban; ekkor be lehet vezetni az $x(s)$ folyamat feltételes valószínűség-eloszlását $s \geqq t > b$ esetére. Ha létezik olyan $(b-a)$-nál kisebb T érték, amelyre ez a feltételes valószínűség csupán a folyamatnak a $b - T \leqq s \leqq b$ intervallumból vett értékeitől függ, akkor a folyamatot általánosított Markov-folyamatnak nevezzük. A folyamatoknak ehhez a típusához tartoznak a közönséges Markov-folyamatok, úgyszintén az olyan folyamatok, amelyeknél a feltételes valószínűségeloszlást teljesen meghatározza magának a folyamatnak az értéke és az összes deriváltak értéke (adott rendű deriváltig) az utolsó megfigyelt időpontban. Diszkrét idő esetén az általánosított Markov-folyamat a közönséges, illetve a véges rendű Markov-lánc.

A továbbiakban feltesszük, hogy a feltételes eloszlásokat úgy lehet megadni, hogy majdnem biztosan valószínűségeloszlások legyenek, és hogy a likelihood függvények az 5. 7. szakaszban megadottakkal analóg feltételeknek tegyenek eleget (itt is csak a reguláris esettel foglalkozunk). Figyeljük meg a folyamatot az $(0, NT)$ időintervallumban, ahol N pozitív egész szám, és jelöljük a $((\nu-1)T, \nu T)$ intervallumnak megfelelő realizációt ω_ν-vel, $\nu=1, 2, \ldots, N$.

Használjuk minden ν esetén ugyanazokat a koordinátákat, és legyen Ω_ν az ω_ν realizáció mintatere.

Tekintsünk egy tetszőleges $A\subset\Omega_N$ halmazt és egy másik $S\subset\Omega_1\times\ldots\times\Omega_N$ halmazt. Legyen $f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)$ a likelihood függvény; ekkor magából a feltételes valószínűségeloszlás definíciójából adódik, hogy

$$P_\alpha(SA)=\int_S P_\alpha\{\omega_N\in A|\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}\}\, dP_\alpha(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})=$$

$$=\int_S P_\alpha\{\omega_N\in A|\omega_{N-1}\}\, dP_\alpha(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})=$$

$$=\int_S P_\alpha\{\omega_N\in A|\omega_{N-1}\} f(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}; \alpha)\, dP_0(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})=$$

$$=\int_{SA} f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)\, dP_0(\omega_1, \ldots, \omega_N).$$

Az

$$\int_A f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)\, dP_0(\omega_N|\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})=\int_A f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)\, dP_0(\omega_N|\omega_{N-1})=$$

$$=g(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}, A; \alpha)$$

jelöléssel azt kapjuk, hogy (lásd Doob [2])

$$\int_S P_\alpha\{\omega_N\in A|\omega_{N-1}\} f(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}; \alpha)\, dP_0(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})=$$

$$=\int_S g(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}, A; \alpha)\, dP_0(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})$$

minden $S\subset\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{N-1}$ halmazra. Így tehát majdnem biztosan

$$P_\alpha(\omega_N\in A|\omega_{N-1})=\int_A \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)}{f(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}; \alpha)}\, dP_0(\omega_N|\omega_{N-1}),$$

amiből következik, hogy az

$$\frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)}{f(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}; \alpha)}$$

viszony majdnem biztosan független az $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{N-2}$ realizációktól. A nevező itt 1 valószínűséggel különbözik nullától, mert feltételeztük a reguláris esetet. Használjuk most fel, hogy

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha) = f(\omega_1; \alpha) \frac{f(\omega_1, \omega_2; \alpha)}{f(\omega_1; \alpha)} \cdots \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)}{f(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}; \alpha)}.$$

Ugyanúgy, mint az előzőkben, ki lehet mutatni, hogy a jobb oldali hányadosok mindegyike csupán a benne előforduló utolsó két ω_i szimbólumtól függ. A legutóbbi egyenletet tehát az alábbi alakba lehet írni:

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha) = f_1(\omega_1; \alpha) f_2(\omega_2 | \omega_1; \alpha) \ldots f_N(\omega_N | \omega_{N-1}; \alpha).$$

Az f-ek indexeit itt el lehet hagyni, mert a folyamat stacionárius:

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha) = f(\omega_1; \alpha) f(\omega_2 | \omega_1; \alpha) \ldots f(\omega_N | \omega_{N-1}; \alpha).$$

Így tehát

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \log f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{N} \frac{\partial \log f(\omega_1; \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{1}{N} \sum_2^N \frac{\partial \log f(\omega_\nu | \omega_{\nu-1}; \alpha)}{\partial \alpha},$$

és most a CRAMÉR [4] könyv 501—503. oldalán leírt módszer alkalmazásával a maximum likelihood egyenletet

$$B_0 + B_1(\alpha - \alpha_0) + \tfrac{1}{2}\theta B_2(\alpha - \alpha_0)^2 = 0$$

alakban kapjuk, ahol

$$B_0 = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial \log f(\omega_1; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0 + \frac{1}{N} \sum_2^N \left(\frac{\partial \log f(\omega_\nu | \omega_{\nu-1}; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0$$

$$B_1 = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial^2 \log f(\omega_1; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0 + \frac{1}{N} \sum_2^N \left(\frac{\partial^2 \log f(\omega_\nu | \omega_{\nu-1}; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0$$

$$B_2 = \frac{1}{N} H(\omega_1) + \frac{1}{N} \sum_2^N H(\omega_\nu | \omega_{-1}).$$

A metrikusan tranzitív folyamatokra $N \to \infty$ esetén érvényes ergod tétel értelmében ezek a kifejezések valószínűségben az átlagértékeikhez tartanak. Azonban

$$\mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial \log f(\omega_\nu | \omega_{\nu-1}; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0 = \mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial \log f(\omega_1, \ldots, \omega_\nu; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0 -$$

$$- \mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial \log f(\omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0 = 0.$$

Az

$$\mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial^2 \log f(\omega_2 | \omega_1; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0 = k$$

jelöléssel (ahol feltehetjük, hogy $k \neq 0$, mert különben ez a triviális eset volna) azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial \log f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_0^2 = -\mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial^2 \log f(\omega_1, \ldots, \omega_N; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0 =$$

$$= -\mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial^2 \log f(\omega_1; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0 + (N-1)k.$$

Ebből következik, hogy $N \to \infty$ esetén

$$B_0 \to 0, \quad B_1 \to -k, \quad B_2 \to M < \infty$$

(valószínűségben való konvergenciával). Most ugyanolyan módon, mint CRAMÉR [4]-ben, ki lehet mutatni, hogy létezik konzisztens maximum likelihood becslés, és hogy

$$\sqrt{Nk}(\alpha^* - \alpha) = \frac{\sqrt{\frac{N}{k}}\, B_0}{u_N},$$

ahol $N \to \infty$ esetén u_N valószínűségben egyhez tart. B_0 átlaga azonban 0 és szórása

$$-\frac{1}{N^2} \mathbf{E}_0 \left(\frac{\partial^2 \log f(\omega_1; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_0 + \frac{N-1}{N^2} k.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy az adott esetben *a maximum likelihood becslés konzisztens és aszimptotikusan efficiens* az aszimptotikus efficiencia WALD [1] által definiált értelmében.

5. 10. A metrikus tranzitivitás feltételei. A metrikus tranzitivitás fogalma nagyon fontos a stacionárius sztochasztikus folyamatok becsléselméletének a felépítésében. Ezzel kapcsolatban hasznosnak bizonyulnak DOOB [2] eredményei, amelyek a Markov-folyamatok esetére vonatkoznak. Itt a metrikus tranzitivitásra két másik feltételt fogunk adni.

TÉTEL: *Egy folytonos $r(t)$ korrelációs függvényű stacionárius normális folyamat metrikus tranzitivitásának szükséges és elegendő feltétele, hogy a folyamat spektrál eloszlásfüggvénye folytonos legyen.*

A tétel bizonyítására DOOB [1] és ITÔ [1] dolgozataiban található gondolatokat alkalmazunk. Feltesszük, hogy a folyamat D-integrálható, és legyen

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF(\lambda), \quad r(0) = 1,$$

ahol az $F(\lambda)$ spektrál eloszlásfüggvényről feltettük, hogy folytonos. Ha a folyamat nem volna metrikusan tranzitív, akkor léteznék egy olyan minden T_t eltolással szemben invariáns S halmaz, amelyre $P(S) = \varrho$, $0 < \varrho < 1$. Approximáljuk az S halmazt véges dimenziójú intervallumok véges I összegével oly módon, hogy kielégüljenek a

$$P(I) < \varrho + \varepsilon$$
$$P(SI^*) < \varepsilon$$

feltételek, ahol ε egy előre megadott pozitív szám. Nyilvánvalóan feltehetjük, hogy az I összeget képező intervallumok mindegyikének véges hosszúságúak az oldalai. Legyen $T_t I = I_t$. Legyenek $\tau_1 + t, \dots, \tau_n + t$ olyan időpontok, hogy minden az I_t-hez tartozó véges dimenziójú intervallumot a folyamatnak ezekhez az időpontokhoz tartozó értékei határoznak meg, és vezessük be az

$$x_i = x(\tau_i); \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$x_{n+j} = x(\tau_j + t); \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

jelöléseket. Ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlása nyilvánvalóan $2n$-dimenziós normális eloszlás, amelyet a második momentumok matrixa, $A(t)$ határoz meg:

$$A(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & r(\tau_1 - \tau_2) & \dots & r(t) & r(\tau_1 - \tau_2 - t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(\tau_n - \tau_1) & r(\tau_n - \tau_2) & \dots 1 & & & \\ \hline r(t) & r(\tau_1 + t - \tau_2) & \dots & 1 \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(\tau_n + t - \tau_1) & r(\tau_n + t - \tau_2) & \dots & \dots & & \dots 1 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} A & B(t) \\ B'(t) & A \end{bmatrix},$$

ahol az A matrix nem függ t-től. A spektrum folytonosságából — amint ez könnyen belátható — következik, hogy a második momentumok semmilyen matrixa nem lehet szinguláris. Eléggé nagy t értékek esetén

$$P(II_t) = \frac{[A(t)]^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^n} \underset{(x_1, \dots x_n) \in I}{\int \dots \int} \; \underset{(x_{n+1}, \dots x_{2n}) \in I_t}{\int \dots \int} e^{-\frac{1}{2} Q(x)} dx_1 \dots dx_{2n},$$

ahol $Q(x)$ az $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ változók olyan kvadratikus formája, amelynek a matrixa $A(t)$ inverze. Vezessük be az összes $\tau_i - \tau_j$ alakú számok részére a $t_1, t_2, \dots, t_N$ jelölést. Ekkor az abszolút integrálhatóság következtében

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{1}^{N} |r(t_i + t)|^2 dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_i + t)\lambda - i(t_i + t)\mu} dF(\lambda) dF(\mu) dt =$$

$$= \sum_{1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(t_i + T)(\lambda - \mu)} - e^{i(t_i - T)(\lambda - \mu)}}{2Ti(\lambda - \mu)} dF(\lambda) dF(\mu).$$

Ismert meggondolások alapján (lásd pl. HOPF [1] p. 16)

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{1}^{N} |r(t_i + t)|^2 dt = 0,$$

tehát

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{1}^{N} |r(t_i+t)|^2 = 0.$$

Következésképpen létezik olyan, $\nu\to\infty$ esetén végtelenhez tartó t_ν sorozat, hogy $B(t_\nu)\to 0$ és

$$\Lambda(t_\nu)\to\begin{Bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{Bmatrix}.$$

A korlátos konvergenciára vonatkozó LEBESGUE-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P(II_t)\to P(I)^2.$$

Így tehát ν nagy értékeire

$$(\varrho+\varepsilon)^2 > P(II_t) \geqq P(SII_{t\nu}) \geqq P(S)-P(SI^*)-P(SI^*_{t\nu}) > \varrho - 2\varepsilon.$$

Ez az egyenlőtlenség azonban csak úgy lehet érvényes tetszőlegesen kicsi ε-ra, ha vagy $\varrho=1$, vagy $\varrho=0$, ami viszont kiinduló feltevésünknek mond ellent. Ezzel bebizonyítottuk, hogy feltételünk elégséges.

Hogy bizonyíthassuk a feltétel szükséges voltát is, tekintsük az $x^2(t)$ folyamatot. Ez a folyamat véges szórású, mert a normális eloszlásnak léteznek véges negyedik momentumai, és könnyen belátható, hogy

$$\varrho(t) = \mathbf{E}[x^2(s)-\mathbf{E}x^2(s)][x^2(s+t)-\mathbf{E}x^2(s+t)] = 2r^2(t).$$

Tudjuk, hogy a

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = y$$

határérték majdnem biztosan létezik és szórása

$$\mathbf{D}^2(y) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varrho(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 2r^2(t)\,dt.$$

Ez az utóbbi kifejezés azonban CRAMÉR [1] szerint a

$$\mathbf{D}^2 y = 2\sum_{1}^{N}\Delta_\nu F$$

alakra hozható, ahol $\Delta_\nu F$ az $F(\lambda)$ spektrál eloszlásfüggvény ugrásait jelenti a szakadási pontokon. Az $x(t)$ folyamat metrikus tranzitivitásának tehát szükséges feltétele, hogy $F(\lambda)$ folytonos legyen. Ezzel tételünk bizonyítása teljessé vált.

Ha nem feltételezzük, hogy folyamatunk normális, akkor a korrelációs függvény ismerete nem elégséges a folyamat valószínűségeloszlásainak a meghatározására. Ennek ellenére ebben az esetben is lehet a metrikus tranzitivitás számára egy kritériumot megadni, amely lényegében a fenti kritérium általánosítása.

Az $x(t)$ folyamatra azt mondjuk, hogy *keverő*, ha minden A, B mérhető halmazra érvényes a

$$\lim_{t\to\infty} P(AB_t) = P(A)\cdot P(B)$$

összefüggés, ahol $B_t = T_t B$.

Ismeretes, hogy a keverő tulajdonság maga után vonja a metrikus tranzitivitást, de ennek a fordítottja nem érvényes (lásd HOPF [1]). A fentebb bizonyított tétel szerint a folyamat metrikusan tranzitív, ha nincs pont-spektruma. Ebben az esetben a spektrál eloszlásfüggvény egy abszolút folytonos részből és egy szinguláris részből lehet összetéve. ITÔ kimutatta, hogy ha a szinguláris összetevő is hiányzik, akkor normális folyamat esetén a folyamat keverő. De a normális folyamat esetében már láttuk, hogy a folyamat metrikusan tranzitív már akkor is, ha a spektrumának van szinguláris összetevője. Megjegyezzük azonban, hogy ilyen esetben léteznie kell olyan a végtelenhez tartó t_ν sorozatnak, hogy $\lim\limits_{\nu\to\infty} r(t_\nu)=0$. Ez a körülmény természetes módon rávezet a keverő folyamatok alábbi gyengített fogalmára:

Az $x(t)$ folyamat *részben keverő*, ha minden mérhető A halmazhoz létezik olyan $t_\nu \to \infty$ sorozat (amely A-tól függ), hogy

$$\lim_{\nu\to\infty} P(AA_{t_\nu})=P(A)^2.$$

TÉTEL: *A stacionárius sztochasztikus folyamat metrikus tranzitivitásának szükséges és elegendő feltétele, hogy a folyamat részben keverő legyen.*

Ha az $x(t)$ részben keverő folyamat, akkor be lehet bizonyítani — pontosan ugyanolyan módon, mint fent —, hogy metrikusan tranzitív. Így tehát itt csak a feltétel szükséges voltát kell külön bizonyítanunk. Válasszunk egy tetszőleges A halmazt és legyen $c(t, \omega)$ az A_t halmaz karakterisztikus függvénye, vagyis az a függvény, amelynek értéke 1, ha $\omega \in A_t$, és 0, ha $\omega \notin A_t$. Ekkor $c(t, \omega)$ stacionárius sztochasztikus folyamat, amelynek korrelációs függvénye

$$\begin{aligned} r_A(t) &= Ec(s,\omega)\, c(s+t,\omega)-Ec(s,\omega)\, Ec(s+t,\omega) = \\ &= P(A_s, A_{s+t})-P(A_s)\, P(A_{s+t}) = \\ &= P(AA_t)-P(A)^2. \end{aligned}$$

Az ergodikus tulajdonság értelmében

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} r_A(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-0}^{T} r_A(t)\,dt=0.$$

Mivel a folyamatot D-integrálhatónak és D-mérhetőnek tételeztük fel, $P(AA_t)$ folytonos függvénye t-nek (lásd pl. HOPF [1]). Az $r_A(t)$ függvénynek vagy végtelen sok zérushelye van és ezeknek a sorozata végtelenhez tart, vagy pedig a függvény értékeinek az előjele ugyanaz marad minden $t>t_0$ időpontra. Mindkét esetben lehet olyan $t_\nu(A)$ sorozatot találni, amelyre

$$\lim_{\nu\to\infty} P(AA_{t_\nu})=P(A)^2,$$

és ez bizonyítja tételünket.

Megjegyzés: A keverő tulajdonság definíciójában egy bizonyos feltételt szabtunk minden mérhető A halmazra. Az alkalmazások számára ez a megfogalmazás nem nagyon célszerű. Megmutatjuk, hogy teljesen elegendő, ha csupán véges dimenziójú intervallumokat veszünk tekintetbe. Tegyük fel, hogy a

$$\lim_{t\to\infty} P(IJ_t)=P(I)P(J)$$

feltétel bármely véges dimenziójú I, J intervallumpárra teljesül. Ha most A tetszőleges mérhető halmaz, akkor approximálni lehet diszjunkt intervallumok $\Sigma = \Sigma I$ véges összegével úgy, hogy

$$P(A^*\Sigma) + P(A\Sigma^*) < \varepsilon.$$

Ekkor

$$|P(A) - P(\Sigma)| < \varepsilon,$$

és

$$P\{AA_t(\Sigma\Sigma_t)^*\} + P\{(AA_t)^*\Sigma\Sigma_t\} \leqq$$
$$\leqq P(AA_t\Sigma^*) + P(A^*\Sigma\Sigma_t) + P(A_t^*\Sigma\Sigma_t) + P(AA_t\Sigma_t^*) \leqq$$
$$\leqq P(A\Sigma^*) + P(A^*\Sigma) + P(A_t\Sigma_t^*) + P(A_t^*\Sigma_t) < 2\varepsilon.$$

Azonban

$$P(\sum \sum_t) = P(\sum_\nu I_\nu \sum_\mu I_\mu^t) = \sum_{\nu,\mu} P(I_\nu I_\mu^t).$$

Itt a jobb oldal határértéke $t \to \infty$ esetén

$$\sum_{\nu,\mu} P(I_\nu)\, P(I_\mu),$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty} P(\Sigma\Sigma_t) = P(\Sigma)^2.$$

Így

$$P(AA_t) - P(A)^2 \leqq$$
$$\leqq |P(AA_t) - P(\Sigma\Sigma_t)| + |P(\Sigma\Sigma_t) - P(\Sigma)^2| +$$
$$+ |P(\Sigma)^2 - P(A)^2| \leqq 4\varepsilon + |P(\Sigma\Sigma_t) - P(\Sigma)^2|,$$

ezért végül

$$\lim_{t\to\infty} P(AA_t) = P(A)^2.$$

5. 11. Alkalmazások. Alkalmazzuk a maximum likelihood módszert két speciális, egyszerű típusú stacionárius sztochasztikus folyamatra.

Legyen $x(t)$ egy stacionárius normális Markov-folyamat m átlaggal és $e^{-\beta|t-s|}$ korrelációs függvénnyel. Tudjuk, hogy itt a spektrális függvény abszolút folytonos, tehát a folyamat metrikusan tranzitív. A likelihood függvény

$$f(\omega, m) = e^{-\frac{m^2}{2}\left(1+\frac{\beta T}{2}\right) + \frac{m}{2}\left\{x(0)+x(T)+\beta \int_0^T x(t)dt\right\}}$$

és így a maximum likelihood becslés

$$m^* = \frac{x(0) + x(T) + \beta \int_0^T x(t)\,dt}{2 + \beta T},$$

amely tehát az m paraméter konzisztens és aszimptotikusan efficiens becslése. Az adott esetben ez az eredmény nem mond újat, ugyanis az 5. 6. szakaszban láttuk, hogy az m^* becslés már véges T esetén is efficiens.

Tekintsük most a 4. 9. szakaszban vizsgált folyamatot. Ez is stacionárius Markov-folyamat, és korrelációs függvénye szintén $e^{-\beta|t-s|}$, de mivel a folyamat nem normális, nem lehet az előbbivel azonos módon kimutatni, hogy metrikusan tranzitív.

Ehelyett tekintsük azt az I intervallumot, amelyet a folyamat $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontokban vett értékei határoznak meg, és tekintsünk egy másik J intervallumot, amelyet a $t_1', t_2', \ldots, t_m'$ pontokban vett értékei határoznak meg. Legyen t egy nagy pozitív szám. Ekkor

$$P(IJ_t) = P_0(t)\, P(IJ_t|0) + P_1(t)\, P(IJ_t|1),$$

ahol a 0 index azt a feltételt jelenti, hogy a $(t_n, t_1'+t)$ időintervallumban a folyamat értékeiben egyetlen változás sem következett be, az 1 index pedig annak az alternatív feltételnek felel meg, hogy legalább egy változás történt. Ekkor

$$P_0(t) = e^{-\beta(t_1'+t-t_n)} \to 0, \quad \text{ha } t \to \infty.$$

Azonban

$$P(IJ_t|1) = P(I)\, P(J_t),$$

amiből az előző szakasz végén közölt megjegyzés értelmében közvetlenül adódik, hogy a folyamat metrikusan tranzitív. A maximum likelihood becslés itt igen egyszerű alakú:

$$m^* = \frac{1}{m+1} \sum_0^n x_\nu,$$

amit úgy lehet felfogni, mint a folyamat értékeinek a realizációtól függő súlyfüggvénnyel vett integrálját. A becslés torzítatlan, mert

$$\mathbf{E}m^* = \sum_0^\infty P_\nu \mathbf{E}[m^*|\nu] = m \sum_0^\infty P_\nu = m.$$

A szórást is könnyen lehet kiszámítani:

$$\mathbf{E}(m^*-m)^2 = \sum_0^\infty P_\nu \mathbf{E}[(m^*-m)^2|\nu] = \sum_0^\infty \frac{(\beta T)^\nu}{\nu!} e^{-\beta T} \frac{1}{\nu+1} = \frac{1-e^{-\beta T}}{\beta T}.$$

Mivel azonban

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial \log f(\omega, m)}{\partial m}\right)^2 = \sum_0^\infty P_\nu \mathbf{E}\left\{\left[\sum_0^\nu x_n - (\nu+1)m\right]^2 = e^{-\beta T} \sum_1^\infty \frac{(\beta T)^\nu}{\nu!}(\nu+1) = 1+\beta T,\right.$$

tehát becslésünk efficienciája

$$e(m^*) = \frac{\beta T}{(1+\beta T)(1-e^{-\beta T})}.$$

$T=0$ esetén ez az efficiencia 1, és ha T nő, akkor $e(m^*)$ először csökken, de nagy T értékek esetén megint 1-hez tart. Ha viszont az m paraméter legjobb lineáris becslését kívánjuk alkalmazni, akkor az alábbi értéket kapjuk:

$$m_L^* = \frac{x(0) + x(T) + \beta \int_0^T x_0(t)\,dt}{2+\beta T}.$$

Ennek a becslésnek a szórása

$$D^2 m_L^* = \frac{2}{2+\beta T},$$

az efficienciát tehát ekkor az

$$e(m_L^*) = \frac{1+\frac{\beta T}{2}}{1+\beta T}$$

képlet adja meg. Látjuk, hogy $T=0$ esetén $e(m_L^*) = e(m^*) = 1$, a kétféle becslésnek ezért egybe kell esnie. A $T=0$ esetben csakugyan 1 valószínűséggel $n=0$, tehát $m^* = x_0$, és ugyancsak az $m_L^* = x_0$ érték adódik közvetlenül az m_L^* kifejezéséből is $T=0$ esetére. Ha viszont $T\to\infty$, akkor nyilvánvalóan $e(m_L^*)\to 1/2$.

A számtani közép szerinti becslés

$$m_E^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt.$$

S zórására T nagy értékei esetén aszimptotikusan a

$$D^2 m_E^* \sim \frac{2}{\beta T}$$

összefüggést kapjuk, következésképpen az aszimptotikus efficiencia

$$\lim_{T\to\infty} e(m_E^*) = \frac{1}{2}.$$

Így tehát a számtani közép szerinti becslés esetén, sőt a legjobb lineáris becslésnél is elveszítjük az efficiencia 50%-át, nagy T értékek esetén.

5. 12. Valószínűségi eloszlás a becslések egy típusának az esetére. Tekintsünk pontfolyamatokat hozzárendelt valószínűségi változókkal; ezeknél gyakran jutunk olyan becslésekhez, amelyek $\sum_1^n x_i$ alakú kifejezéseket foglalnak magukban. Vizsgáljuk ilyen kifejezések aszimptotikus eloszlását $T\to\infty$ esetére. Nem kívánunk a legáltalánosabb esettel foglalkozni, ezért feltesszük, hogy az x_i valószínűségi változók függetlenek, átlaguk nulla és szórásuk azonos σ értékű. Feltesszük továbbá, hogy $n\to\infty$, ha $T\to\infty$ (valószínűségben vett konvergencia értelmében). Ekkor a

$$\frac{\sum_1^n x_i}{\sigma\sqrt{n}}$$

mennyiség $T\to\infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlású (0, 1) paraméterekkel, mert

$$P\left\{\frac{\sum_1^n x_i}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} = \sum_1^\infty P_T(v) P\left\{\frac{\sum_1^n x_i}{\sigma\sqrt{n}} \leq a_a \mid v = n\right\}$$

és a centrális határeloszlástételből következik, hogy

$$P\left\{\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}} \leqq a \mid \nu = n\right\} \to \Phi(a); \quad \nu \to \infty,$$

ahol $\Phi(x)$ a normális eloszlásfüggvény. A tétel szerint ugyanis tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\nu(\varepsilon)$ szám, hogy

$$\left| P\left\{\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}} \leqq a \mid \nu = n\right\} - \Phi(a)\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \nu > \nu(\varepsilon).$$

Válasszuk most T értékét olyan nagyra, hogy $\sum_{1}^{\nu(\varepsilon)} P_T(\nu) < \varepsilon$. Ekkor

$$\left| P\left\{\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}}\right\} - \Phi(a)\right| \leqq \sum_{1}^{\infty} P_T(\nu) \left| P\left\{\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}} \leqq a \mid n = \nu\right\} - \Phi(a)\right| \leqq 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{\nu(\varepsilon)+1}^{\infty} P_T(\nu) < 3\varepsilon,$$

ami bizonyítja állításunkat.

Ha a $\frac{\mathbf{D}n(T)}{\mathbf{E}n(T)}$ viszonyszám $T \to \infty$ esetén nullához tart, akkor a $\sum_{1}^{n} x_i$ összeg eloszlása aszimptotikusan normális $\{0, \sigma\sqrt{\mathbf{E}n(T)}\}$ paraméterekkel, mert

$$\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{\mathbf{E}n(T)}} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{\mathbf{E}n(T)}}.$$

Az $\frac{n}{\mathbf{E}n(T)}$ valószínűségi változó átlaga ugyanis 1, és szórása $\frac{\mathbf{D}n(T)}{\mathbf{E}n(T)}$, tehát valószínűségben 1-hez tart, ha $T \to \infty$. A CRAMÉR [4] könyv 20.6. szakaszának tétele szerint ebből közvetlenül a fenti eredmény adódik.

Végül $\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$ is aszimptotikusan normális, $\left\{0, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{E}n(T)}}\right\}$ paraméterekkel, amit az előzőhöz hasonló módon lehet belátni az

$$\sqrt{\mathbf{E}n(T)}\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n\sigma} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{\sigma\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\mathbf{E}n(T)}{n}}$$

egyenlet alapján.

5. 13. Becslések approximációja. A következőkben a becsléselmélet egy eredményét ismertetjük, amely a 4. 12. szakaszban tárgyalt becsléssel analóg. Ott a reguláris eset biztosítása érdekében feltételeztük, hogy minden P_α eloszlás abszolút folytonos P_0-ra nézve. Most azt is feltesszük, hogy ez a folytonosság egyenletes $\alpha \in A$ esetén. Ekkor, ha $\alpha^*(\omega)$ az α paraméter becslése, és

$$\mathbf{E}_\alpha[\alpha^*(\omega)]^2 = v(\alpha),$$

— ahol a jobb oldalról feltesszük, hogy α-nak folytonos függvénye —, lehetséges az α^* becslés approximálása olyan $\alpha^*(x_1, \ldots, x_n)$ becslésekkel, amelyek csak véges számú koordinátától függnek. Ez az approximáció egyenletes $\alpha \in A$-ra. Képezzük e célból a

$$t_N(\omega) = \begin{cases} \alpha^*(\omega), & \text{ha} \quad |\alpha^*(\omega)| < N \\ 0 & \text{ha} \quad |\alpha^*(\omega)| \geqq N \end{cases}$$

valószínűségi változót. Ekkor

$$\mathbf{E}_\alpha(t_N - \alpha^*)^2 = \int_\Omega (t_N - \alpha^*)^2 \, dP_\alpha = \int_{\alpha^* \geqq N} (\alpha^*)^2 \, dP_\alpha \to 0,$$

ha $N \to \infty$. Azonban

$$\left| \int_{\alpha^* < N} (\alpha^*)^2 \{f(\omega, \alpha_0) - f(\omega, \alpha)\} \, dP_0(\omega) \right| = N^2 \sqrt{\int_\Omega [f(\omega, \alpha_0) - f(\omega, \alpha)]^2 \, dP_0(\omega)}\,,$$

ahol az 5. 1. szakaszban az $f(\omega, \alpha)$ számára megszabott feltételeknek megfelelően a jobb oldal nullához tart, ha $\alpha \to \alpha_0$. Ezért tehát

$$\int_{|\alpha^*| \geqq N} [\alpha^*(\omega)]^2 f(\omega, \alpha) dP_0(\omega) = v(\alpha) - \int_{|\alpha^*| < N} [\alpha^*(\omega)]^2 f(\omega, \alpha) dP_0(\omega)$$

α-nak folytonos függvénye. Dini tétele szerint a fenti konvergencia egyenletes, vagyis tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N_0 = N_0(\varepsilon)$, hogy

$$\mathbf{E}_\alpha[t_N - \alpha^*]^2 < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad N > N_0.$$

Tekintsük most az

$$\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{E}_0[t_N | x_1, \ldots, x_n]$$

valószínűségi változót. Ha n végtelenhez tart, akkor az $\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n)$ mennyiség 1 valószínűséggel $t_N(\omega)$-hoz tart. Vezessük be az

$$\{|\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n) - t_N(\omega)| < \varepsilon\} = \mathbf{E}_n \subset \Omega$$

halmazt. Ekkor

$$\mathbf{E}_\alpha[\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n) - t_N(\omega)]^2 = \int_\Omega [\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n) - t_N(\omega)]^2 \, dP_\alpha(\omega) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^2 P_\alpha(\mathbf{E}_n) + 4N^2 P_\alpha(\mathbf{E}_n^*).$$

Azonban $P_0(\mathbf{E}_n^*) \to 0$, ha $n \to \infty$, következőleg P-nak P_0-ra nézve egyenletes abszolút folytonossága miatt

$$\mathbf{E}_\alpha[\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n) - t_N(\omega)]^2 < \delta, \quad \text{ha} \quad n > n_0(N, \delta).$$

A háromszög egyenlőtlenség felhasználásával ekkor megkapjuk a kívánt eredményt:

$$\mathbf{E}_\alpha[\alpha_N^*(x_1, \ldots, x_n) - \alpha^*(\omega)]^2 < \varepsilon$$

minden $\alpha \in A$ esetén, ha N és n értékeit elég nagyra választjuk. Így tehát véges számú koordinátától függő olyan becslést kaptunk, amelynek átlaga és szórása tetszőleges pontossággal megközelítheti az $\alpha^*(\omega)$ becslés átlagát és szórását, éspedig egyenletesen $\alpha(\in A)$-ban.

Ebből következik, hogy ha csupán olyan becslésekre szorítkozunk, amelyek véges számú koordinátától függnek, és minden esetben kiválasztjuk ezek közül a legjobbat, (amelyet $\alpha^*(x_1, \ldots, x_n)$-nel jelölünk), akkor eléggé nagy n-re az $\alpha^*(x_1, \ldots, x_n)$ becslés gyakorlatilag éppen olyan jó lesz, mint bármelyik, a folyamat minden koordinátájától függő becslés.

5. 14. Függvények becslése. Eddig főleg azt az esetet vizsgáltuk, amikor az $x(t)$ valószínűségeloszlása néhány benne szereplő valós paraméter kivételével ismeretes volt. Más típusú problémával foglalkoztunk az 5. 2.—5. 5. szakaszokban, ahol azt tettük fel, hogy a folyamat valószínűségeloszlásairól semmi egyebet nem tudunk, mint a megfelelő korrelációs függvény alakját. Megint más jellegű feladattal állunk szemben, amikor *a folyamathoz tartozó valószínűségeloszlás egy ismeretlen függvénytől függ és a folyamat megfigyelése útján kapott adatokból kell becslést adni erre a függvényre.* A következőkben két példával illusztráljuk az ilyen feladatokat.

Legyen $x(t)$ egy valós, stacionárius, normális és D-mérhető folyamat nulla átlaggal és $r(t)$ korrelációs függvénnyel; ez utóbbit — mint eddig — folytonosnak feltételezzük. Az $r(t)$ függvényre keresünk becslést a folyamat realizációjának a $(0, T)$ időszakaszban történt megfigyelése alapján. Ha a folyamat metrikusan tranzitív — azaz ha spektrális függvénye folytonos (lásd az 5. 10. szakaszt) —, akkor lehetséges konzisztens becslést megadni $r(t)$-re. Ismeretes (lásd HOPF [1], p. 54—55), hogy majdnem biztosan t minden értékére

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(s)x(s-t)\,ds = r(-t) = r(t).$$

Mivel folyamatunk valós, a korrelációs függvénye páros, tehát elég csupán $t>0$ esetét vizsgálni. De

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(s)x(s-t)\,ds - \frac{1}{T}\int_t^T x(s)x(s-t)\,ds = \frac{1}{T}\int_0^t x(s)x(s-t)\,ds,$$

ahol a jobb oldal $T\to\infty$ esetén majdnem biztosan nullához tart minden t-re. Ebből következik, hogy az

$$r_T^*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^T x(s)x(s-t)\,ds, & \text{ha} \quad 0 \leqq t < T \\ 0, & \text{ha} \quad t \geqq T \end{cases}$$

kifejezés, amely csupán a folyamatnak a $0 \leqq t < T$ intervallumban megfigyelt értékeitől függ, $r(t)$-nek konzisztens becslése.

Második példaként vizsgáljunk olyan $x(t)$ folyamatot, amely szintén stacionárius, D-integrálható és metrikusan tranzitív. Legyen feladatunk az

$$F(a) = P\{x(t) \leqq a\}, \quad -\infty < a < \infty$$

eloszlásfüggvény konzisztens becslése. E célra segédeszközként bevezetjük az

$$e_t(\omega)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x(t,\omega)\leqq a,\\ 0, & \text{ha} \quad x(t,\omega)>a\end{cases}$$

sztochasztikus folyamatot. Nyilvánvalóan t tetszőleges rögzített értékére $e_t(\omega)$ valószínűségi változó. Az $e_t(\omega)$ függvény mérhető és integrálható a $T\times\Omega$ szorzattéren, ahol T tetszőleges véges intervallum az időtengelyen. Így tehát 1-valószínűséggel

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e_t(\omega)dt = Ee_t(\omega) = P\{x(t)\leqq a\} = F(a).$$

De $\int_{-T}^{T} e_t(\omega)dt$ annak a $(-T, T)$ intervallumhoz tartozó időszakasznak a hossza, amelynek folyamán $x(t)\leqq a$. Az

$$\frac{1}{2T}m\{x(t,\omega)\leqq a;\quad |t|<T\}_t=F_T^*(a,\omega)$$

jelöléssel (ami megengedett, mert FUBINI tétele szerint az m mérték létezik) ekkor

$$\lim_{T\to\infty}F_T^*(a,\omega)=F(a).$$

Legyen $\{a_\nu;\ \nu=1,2,\ldots\}$ egy a valós tengelyen mindenütt sűrű valós számsorozat. A sorozat megszámlálhatósága miatt

$$\lim_{T\to\infty}F_T^*(a_\nu,\omega) = F(a_\nu)$$

majdnem biztosan minden ν-re. De $F_T^*(a,\omega)$ nem csökkenő függvénye a-nak. Ha a folytonossági pontja $F(x)$-nek és $a'_\nu\to a+0$, $a''_\nu\to a-0$, akkor

$$F_T^*(a''_\nu,\omega)\leqq F_T^*(a,\omega)\leqq F_T^*(a'_\nu,\omega),$$

ahonnan következik, hogy

$$\lim_{T\to\infty}F_T^*(a,\omega)=F(a)$$

majdnem biztosan $F(x)$ minden folytonossági pontjában. Így tehát F_T^* konzisztens becslése F-nek. Ugyanilyen módon lehet konzisztens becslést szerkeszteni a folyamat bármelyik többdimenziós eloszlásfüggvénye számára.

Könnyen belátható, hogy a második példánkban a becslés torzítatlan, és hogy az első példában egyszerű módon torzítatlanná lehet tenni a $\dfrac{T}{T-t}$ tényezővel való szorzás útján. Kívánatosnak véljük az efficienciához hasonló valamilyen fogalom bevezetését ilyen természetű feladatok esetére és ennek alapján vizsgálni a függvények becsléseinek a sajátságait.

Mielőtt a becsléselmélet fejezetét lezárnók, utalni kívánunk arra, hogy a konfidenciatartományok definíciója a klasszikus elméletből majdnem szóról szóra átvihető a sztochasztikus folyamatok becsléselméletébe.

Fordította: *dr. Korodi Albert*,
a műszaki tudományok kandidátusa.

A VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET BIZONYOS FEJEZETEIRŐL, MELYEK KÖZVETLEN KAPCSOLATBAN VANNAK A BIOLÓGIA ÉS AZ ORVOSTUDOMÁNY PROBLÉMÁIVAL*

Írta: B. V. GNYEGYENKO

1. Bevezető megjegyzések. A Nagy Szovjet Enciklopédiában (2. kiadás) a „Biológia" címszó után a szöveg a következő szavakkal kezdődik: „A biológia az életről szóló tan; az a tudomány, amely feltárja az élőlények életének és fejlődésének törvényszerűségeit (LISZENKO, T. D.: *Agrobiológia.* 5. kiadás, 1949. 609. o.)." Az élő természet törvényeinek megismerése az egyik legnehezebb és ugyanakkor legfontosabb probléma; ez a megismerés nemcsak mezőgazdasági problémák (például a mezőgazdasági termékek bőségének biztosítása) megoldásához szükséges, hanem felbecsülhetetlen szolgálatot tesz az orvostudománynak is a legkülönbözőbb betegségekkel folytatott harcában. Meg vagyok győződve arról is, hogy egyedi élő sejtekben, illetve egy egész, magas szervezettségű szervezetben lejátszódó folyamatok megértése óriási távlatokat nyit meg a jövő technikája előtt.

A biológusok érdeklődési köre a legnagyobb hozamú növényfajták és a legtermékenyebb állatfajták kitenyésztésének problémájától (amely már sok évtizeddel ezelőtt felmerült az emberiség előtt) a gondolkodás mechanizmusába való behatolás problémájáig terjed. Természetes, hogy ilyen sokféle kérdéssel foglalkozván, a biológia nem korlátozódhat vizsgálati módszerek valamilyen zárt csoportjára. A fizika, kémia, rádiótechnika behatolása a biológiába elkerülhetetlenül arra vezet, hogy idővel a matematika is állandóan bele fog tartozni a biológus kutatási eszközei közé. És ebben nincs semmi csodálatos, mert a biológiában már beszélhetünk „az anyag olyan homogén és egyszerű elemeinek megközelítéséről, amelyek mozgási törvényei megengedik a matematikai tárgyalásmódot" (V. I. LENIN: Összegyűjtött művei, 14. k. 294. o. (Oroszul)).

A matematika biológiai vizsgálatokba való bevonása nem mindig megy simán, nem mindig sikerül annyira megbízható eredményeket kapni, hogy azok nem szorulnak további élesítésre és átgondolásra. De vannak-e általában a tudományban olyan eredmények, amelyeket nem kell később pontosabban megfogalmazni, korrigálni és módosítani? Ismeretes, hogy minden új felfedezés csak egy állomás, csak egy lépcsőfok abban a folyamatban, ahogy a természetnek és jelenségeinek törvényszerűségeit megismerjük. Mármost mi hasznunk lehet ilyenformán matematikailag megfogalmazott elméleteknek? Mindenekelőtt az, hogy segítségükkel lehetségessé válik bizonyos alapvető biológiai alapelvekből logikai úton egész sor következményt levezetni. Ezeket a következményeket kísérletekkel ellenőrizve, kiegészíthetjük a kiindulási alapelvek helyességét alátámasztó adatainkat; ez az ellenőrzés magában véve is érdekes a biológia szempontjából. De még ha ténylegesen a kísér-

* „Применение математических методов в биологии" (Matematikai módszerek alkalmazása a biológiában). Издательство Ленинградского Университета, 1960; 6–16.

letek által nyújtottakkal ellentétben álló eredményekre vezet is egy matematikailag megfogalmazott biológiai elmélet, érdekessége kétségtelenül megvan, mert arra vezet, hogy elkerülhetetlenül revideálni kell ama elsődleges biológiai megállapításokat, amelyeken az elmélet felépült. Az ilyen elméletek már ezzel is elősegítik ismereteink előrehaladását.

Nem ritkán halljuk biológusok között azt, hogy a matematikai analízis egyáltalán nem alkalmazható biológiai jelenségekre, azok különleges bonyolultsága és változékonysága miatt. Az ilyen okoskodások azonban nyilvánvaló félreértésen alapulnak, mert létezik egész sor rendkívül bonyolult fizikai jelenség is, és ez a körülmény mégsem zárja ki matematikai apparátus alkalmazását tanulmányozásukkor. Az pedig, hogy látszólag egyforma külső feltételek mellett egyes jelenségek lefolyása változékonyságot mutat, csak egy valamire utal: arra, hogy a legnagyobb mértékben segítségül kell hívni a valószínűségelméletet és a matematikai statisztikát.

Meg vagyok győződve arról, hogy bizonyos kölcsönös meg nem értés, amely biológusok és matematikusok között fennáll, jelentős mértékben abból ered, hogy elszigetelten dolgozunk. Bár napjainkban matematikusok és fizikusok ezrei választották életfeladatuknak fizikai jelenségek matematikai eszközökkel való tanulmányozását, mégsem ismerek egyetlen szovjet matematikust sem, aki teljesen vagy akár csak jelentős mértékben is biológiai jelenségek matematikai eszközökkel való tanulmányozásának szentelte volna idejét és energiáját. Nem arra gondolok most, hogy már szükségessé vált megalkotni a „matematikai biológia" sajátos tanát, — hasonlóan a „matematikai fizikához". — Semmi kétségem azonban afelől, hogy elkövetkezett az az idő, amikor matematikusok és biológusok kollektíváinak el kell kezdeniök a rendszeres együttes munkát, hogy megoldják a sarkalatos biológiai problémákat; ez olyan munka lesz, amelynek során a matematikusnak bele kell mélyednie a biológiai jelenségek lényegébe, a biológusnak pedig a matematikai módszerek alapgondolatai, s nem csak számolásokban való használhatósága által nyújtott lehetőségekbe. Ilyen hozzáállás mellett fokozatosan kikovácsolódnak majd a kutatás azon matematikai eszközei, amelyek legalkalmasabbak az előttünk egyáltalán ismeretes legbonyolultabb jelenségeknek — az élő természet jelenségeinek — tanulmányozására.

A tudomány története ismer olyan eseteket, amelyekben a matematikai elméletek haladása közvetlen kapcsolatban volt azzal, hogy feleletet adhatnak a biológusok kérdéseire —, azzal, hogy kísérletet tehettek a kvantitatív tényező tanulmányozására oly biológiai jelenségekben, amelyekben az döntő szerepet játszik. Így folyt le, nagymértékben a biológia, orvostudomány és a mezőgazdasági kísérletezés közvetlen és állandó ráhatása közben, a matematikai statisztika alapjainak kialakítása. A sztochasztikus folyamatok elmélete kialakulásának kezdeti szakaszára nagy befolyása volt egyes biológiai problémáknak. Biológiai kérdésekből ered az elágazó sztochasztikus folyamatok elmélete. Ma már számos és fontos alkalmazása van ennek a biológia területén kívül is. Mindamellett ebben az elméletben felettébb jelentős helyet foglalnak el azok a problémák, melyek a „születési és elhalási" folyamatok körébe tartoznak. Ezt a felsorolást tovább is lehetne folytatni.

2. Az egy- és többdimenziós sztochasztikus folyamatok elméletéről. Nem kétséges, hogy a biológia szempontjából legnagyobb jelentőségűnek az egy- és többdimenziós sztochasztikus folyamatok elméletének kell lennie, más szóval az olyan sztochasztikus változók elméletének, melyek egy vagy több folytonosan változó paramétertől függnek. Ilyen mennyiségekre tipikus példaként szolgálhatnak olyan fontos biológiai jellemzők, mint bizonyos populációk adott időpontbeli elemei számának becslése, elektrokardiogramok, azon ingerlések mértékei, melyek szükségesek egyes idegsejtek ingerelt állapotba hozásához, — és a többi. A felhozott példák igen különfélék, nemcsak biológiai sajátosságaik szerint, hanem azért is, mert mindegyik tanulmányozásához sajátos matematikai apparátus kell.

Nem kétséges, hogy a biológiában nem szerencsés csupán a sztochasztikus folyamatok elmélete valamelyik részének felhasználására korlátozni tevékenységünket. A biológia erre a maga teljes sokoldalúságában támaszt igényt. És valóban: a Markov-féle sztochasztikus folyamatok elméletét (vagyis azon folyamatokét, amelyek lefolyásának véletlenszerű menete a $t > t_0$ időpontban — ha ismeretes állapotuk a t_0 időpontban — csupán ettől az állapottól függ és nem függ azoktól az előzményektől, melyek a folyamatot ebbe az állapotba eljuttatták) egész sor szerző már széles körben felhasználta. Az ez irányban végzett mélyenjáró kutatások most is állandóan folynak.

Viszonylag nemrég (1951) jelent meg W. FELLER szemleszerű cikke, amelyet a Markov-folyamatok és láncok bizonyos biológiai feladatokra való alkalmazásairól szóló munkáknak szentelt. LOTKA, VOLTERRA, A. N. KOLMOGOROV régebbi, a létért való küzdelem matematikai elméleteiről írott munkái, FISHER és RIGHT az evolúció matematikai elméletével kapcsolatos vizsgálatai ma is kétségtelenül érdeklődésre számíthatnak. Az utóbbi években nagy figyelmet szenteltek annak, hogy kidolgozzák járványok terjedésének matematikai modelljeit. Nemrég (1957) jelent meg erről a témáról BAILEY speciális monográfiája. Óriási elméleti és gyakorlati jelentősége van olyan elmélet megalkotásának, amely lehetővé teszi ilyen vagy olyan típusú populációk növekedésének tanulmányozását, sőt módszerek kidolgozását is közélelmezési szempontból fontos halfajták állományának számszerű megállapítására. Nagyfokú érdeklődés mutatkozik Markov-folyamatok iránt napjainkban a kibernetika és információelmélet részéről is. Nagy figyelmet szentel nekik többek közt W. R. ASHBY: *„Introduction to cybernetics”* című ismert könyve is.

A Markov-folyamatok speciális esetét képezik az úgynevezett elágazó folyamatok. Az ilyen folyamatok elméletéről jó áttekintést nyújt B. A. SZEVASZTYANOV cikke (1951); ez főleg fizikusok és kémikusok számára íródott ugyan, azonban biológusok is igazán haszonnal olvashatják.

A biológiai jellemzők egy részének időbeli változása véletlenszerű; ezek semmiféle periodikus folyamatot nem képviselnek. Példaként megemlítjük az elektrokardiogramot, amely a szívműködés változásainak egyik objektív jelzője. Sok esetben az említett típusú jellemzők tanulmányozásához elegendően komoly alapot szolgáltat, ha azokat a stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletének szemszögéből vizsgáljuk. Reméljük, hogy ezen az úton sikerül majd eléggé megbízható és meggyőző kritériumokat találni bizonyos szívmegbetegedések diagnosztizálásához. Speciálisan arra számítunk, hogy elektrokardiogramok spektrális függvényének analízise lehetővé fogja tenni, hogy jellemző kritériumokat találjunk a tiszta mitrális stenosis és a tiszta mitrális elégtelenség megkülönböztetéséhez. Nem kétséges, hogy a stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletének a magasabb idegtevékenység bizonyos aspektusainak analízisére való felhasználása még jelentős szolgálatokat fog tenni az orvostudománynak.

A többdimenziós sztochasztikus folyamatok elmélete, — melynek kidolgozása különösen intenzíven folyt, minthogy meteorológiai jelenségek tanulmányozásával volt kapcsolatban — bizonyára sikeresen alkalmazható lesz biológiai kérdések megoldásában is. Ha pl. a zsuzsok nevű kártevő bábjainak a répaföldön való eloszlása érdekel minket, kérdés, számolhatunk-e azzal, hogy a báboknak telelés előtt a vizsgált területen való szétszóródása valamilyen határozott törvényszerűséget követ? Kétségtelen, hogy ennek a megvizsgálása bizonyos útmutatásokkal szolgálhat az említett kártevővel folytatott harc mértékének jellegét illetőleg. Vagy tekintsük a plankton eloszlását egy vízmedence meghatározott rétegében. Világos, hogy a plankton sűrűsége a tér minden egyes pontján más és más és változásai nagymértékben véletlen jellegűek. Milyenek ennek a térbeli (és időbeli) változásnak valószínűségi jellegű törvényszerűségei? Összehasonlíthatjuk-e őket porszemek Brown-féle mozgásával a levegőben, vagy pedig másfajta törvényszerűségről van itt szó? Ilyen típusú kérdések felvethetők baktériumoknak vagy spóráknak a levegőben való eloszlásával kapcsolatban is; lehetséges, hogy ugyanilyen módon kell jellemezni halak eloszlását is.

Az a sejtésem, hogy a sorbaállás elmélete, amely napjainkban a technika és fizika új irányzataival való kapcsolata folytán a viharos fejlődés periódusában van, komoly alkalmazásra találhat egész sor biológiai probléma megoldásában, például a lakosság orvosi ellátása megszervezésének kérdéseivel kapcsolatban.

A sorbaállás elméletének körébe tartozó problémák a következőképpen vetődnek fel: adva van bizonyos számú személy vagy készülék, amelyeknek az a feladata, hogy kiszolgáljanak bizonyos „fogyasztókat”, melyek időben véletlenszerűen jelentkeznek a kiszolgálási pontban. Ha a „fogyasztó” olyan időpontban jelentkezik, amelyben legalább egy kiszolgáló szabad, akkor rögtön elkezdik kiszolgálni. Ha az összes kiszolgálók foglaltak, a következő lehetőségek vannak: 1. a „fogyasztó” sorbaáll a kiszolgáláshoz és annyi ideig vár, ameddig szükséges; 2. a „fogyasztó” kilép a folyamatból (nem marad a sorban); 3. a „fogyasztó” sorbaáll, de csak korlátos időtartamon át vár, amelynek hossza valamely τ-t nem halad meg; 4. a várakozási, ill. kiszolgálási idők hosszainak összege nem lépi túl a τ időtartamot. A felsorolt esetek közül az utolsóban a „fogyasztó” kimaradhat az elintézésből, akár azért, mert nem várta ki a kiszolgálást, akár pedig azért, mert sokáig várt és így a kiszolgálásra csak igen kis idő maradhatott s az nem volt elegendő. Végül az is megtörténhetik, hogy a „fogyasztó” kivárta a kiszolgálást és az idő elegendő is volt a kiszolgálás lefolytatására. Szokásos a kiszolgálási idő hosszát sztochasztikus változónak felfogni. — A τ mennyiség, amelyről előbb szó volt, lehet állandó is, véletlenszerűen változó is. Az utóbbival van dolgunk az elsősegély állomások mindennapi munkája során. Egy személy, aki egy baleset eredményeként megsérült, ellátása elvégzésére valamilyen τ-nál hosszabb ideig nem várhat. Ez az időtartam egyénről egyénre változik és függ az elszenvedett sérülés jellegétől is. Ha a τ időtartam folyamán nem történik meg az ellátás, akkor a „fogyasztó” kilép a folyamatból (a balesetet szenvedett meghal). Nem kétséges, hogy ilyenfajta problémákkal kell foglalkozni sok más esetben is, amely érdekes a biológia és az orvostudomány számára, — például idegingerületek és más idegrendszeri jelek továbbítási elméletének megalkotása esetében is.

Sztochasztikus folyamatok biológiai problémák megoldásában való felhasználására példaként vegyük a járványok elterjedésének modelljeit, amelyeket M. BARTLETT angol tudós vizsgált könyvében (1956), valamint a Berkeleyben megtartott 3. valószínűségelméleti és matematikai statisztikai szimpóziumon elmondott előadásában (1956). Adva van valamilyen populáció, amely a t időpontban áll 1. $s(t)$ egyedből, amelyek fogékonyak valamilyen betegség iránt; 2. $i(t)$ már megbetegedett egyedből. A populáció kívülről csak s típusú egyedekkel egészülhet ki. A megbetegedni képes egyedek csoportja nem egészülhet ki a betegséget átvészeltek közül (azt az esetet is vizsgálhatjuk, amidőn az immunitás csak időleges). A rendszer állapotát minden egyes időpontban két szám jellemzi, s és i — a megbetegedésre szóba jövők száma és a betegek száma. h hosszúsági időtartam alatt a következő átmenetek lehetségesek:

$$\begin{array}{llll} 1. & s \to s-1, & i \to i+1, & is\lambda h \\ 2. & s \to s, & i \to i-1, & i\mu h \\ 3. & s \to s+1, & i \to i, & \nu h. \end{array}$$

Jobb oldalt a nyilakkal jelölt átmenetek valószínűségeit írtuk fel. Ha az (s, i) állapot valószínűségét a t időpontban $p_t(s, i)$-nek jelöljük, $\pi_t(u, v)$-vel pedig a megfelelő generátorfüggvényt, akkor

$$\pi_t(u, v) = \sum_{i,s=0}^{\infty} p_t(s, i) u^s v^i.$$

A $\pi_t(u, v)$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \lambda u(u-v) \frac{\partial^2 \pi}{\partial u \partial v} + \mu(1-u) \frac{\partial \pi}{\partial u} + \nu(v-1)\pi$$

differenciálegyenletet.

Az elméleti eredményeket BARTLETT összehasonlította kanyarós megbetegedésekre vonatkozó klinikai megfigyelések eredményével: A valóságos viszonyok elméleti megközelítése az említett megbetegedések esetében teljesen kielégítőnek mutatkozott.

Kétségtelen, hogy a BARTLETT vizsgálta modell primitív volt. Minden esetben számításba kellett volna venni az

$$s \to s-1, \quad i \to i$$

átmenet lehetőségét, minthogy valamely egyed más okból kifolyólag is elhalhat, vagy elszigetelődhet a megbetegedést létrehozó okoktól stb. Komoly kétségek merülhetnek fel azzal kapcsolatban is, hogy lehetséges állandó λ, μ és ν-vel dolgozni. Mindazonáltal már az ilyen primitív modellkészítés is valamivel közelebb visz bennünket járványok terjedése mechanizmusának megértéséhez.

A LJAPUNOV-féle centrális határeloszlástételnek, melynek a valószínűségelmélet technikai és fizikai alkalmazásaiban alapvető szerepe van, számos alkalmazási területe nyílik a biológiában is. Mindazon esetekben, melyekben feltehető, hogy valamilyen jellemző kialakulása nagy számú független vagy gyengén függő mennyiség összegének ráhatása alatt folyik le, ennek a jellemzőnek az eloszlása közel lesz a normálishoz. Ha például tekintjük egyazon típusú, fajtájú és nemű, nagyszámú egyed összességét, melyek közelítőleg egyforma feltételek között fejlődtek ki, akkor meghatározott méretük, például valamelyik csontjuk hossza, közelítőleg normális eloszlású lesz. Ezt a körülményt széles körben felhasználják az antropológiában. Az antropológiai normáknak pedig, mint ismeretes, jelentős szerepe van az alkalmazások szempontjából: ezek alapján határozzák meg, milyen százalékban ésszerű készíteni bizonyos méreteket lábbelik, ruhák, kalapok gyártásakor. Ezeket a normákat, valamint ipari célokra való felhasználásuk alapelveit behatóan tanulmányozta M. V. IGNATYEV.

3. Valószínűségek becslése; statisztikai megfigyelések megszervezése. A valószínűségelméet és a statisztika klasszikus feladata: ismeretlen valószínűségek becslése, napjainkban is az érdeklődés középpontjában áll. Az orvostudomány számára is különösen hasznos ilyenfajta feladattal találkoztunk nemrég, amikor Kijevben megkíséreltük matematikailag analizálni a szívbetegségek diagnosztikáját. Ennek során, hogy ne kelljen foglalkoznunk az összes szívbetegségekkel (melyekből kimeríthetetlenül sok van) csak két szívbetegséggel foglalkoztunk: a mitrális stenosisszal és a mitrális elégtelenséggel. Ismeretes, hogy mindkét betegség eléggé széles körben elterjedt és sokban egymásnak ellentétei: az ilyen esetek közül az egyikben a modern orvostudománynak az operatív beavatkozás jól kidolgozott módszerei állnak rendelkezésére; ezek a módszerek komoly sikerrel járnak, csak idejében állapítsák meg a diagnózist. A diagnózis pontos felállítása az orvostudomány jelen állása mellett azonban még nagyon fáradságos, minthogy igen ritkán találkozunk az említett megbetegedés világos megnyilvánulásával. A nehézségek akkor lépnek fel, amikor az alapmegbetegedésre komplikációk rétegződnek rá, amelyek anélkül is megzavarják a betegség mibenlétéről alkotott elképzelésünket. Ezenfelül ugyanazok a tünetek, melyek alapján a megbetegedéseket diagnosztizálják, másféle betegségeknél is előfordulnak. Végeredményben nem ritkán az a helyzet, hogy egy és ugyanazon beteggel kapcsolatban különböző orvosok lényegesen különböző megállapításokra jutnak. Világos, hogy az így előadódó helyzetből az lesz a kiút, hogy szisztematikusan tanulmányoznak lehetőleg nagyszámú különböző diagnosztikai adatot, ezek valószínűségeinek becsléseit különböző megbetegedések esetében és aztán mindezeket az adatokat egyidejűleg tekintik át. Lehetséges, hogy a beteg ilyen „körültekintő megvizsgálásához" adatok ezreit kell áttekinteni, melyek mindegyike a maga részéről csak kevéssé járul hozzá a diagnózis felállításának nagy ügyéhez, — mindenesetre azonban mégis csak elősegítik a helyes következtetések elérését. Lehetséges, hogy az összes adatoknak az áttekintése már túlhaladja az orvos erőit, minthogy a szokásos munkamódszerek mellett óriási időráfordítást követelnek. Mármost ezt a már csak technikai jellegű feladatot rábízhatjuk elektronikus számológépekre is.

Végeredményben a következő, tisztán statisztikai jellegű problémát vethetjük fel itt: válasszuk meg az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tünetek olyan komplexusát, hogy előre meghatározott fajta tünetek meglétének, illetve hiányának adott kombinációja 1-hez elég közeli valószínűséggel arra a következtetésre vezessen, hogy a beteg megadott $B_1, B_2, \ldots, B_m$ betegség-összesség közül épp a meghatározott B_k betegségben szenved. Bizonyos értelemben mondhatjuk, hogy a probléma ilyen kezelése teljesen megfelel a már létező diagnosztizálási módszerek alapgondolatának. Az, amiről előbb beszéltünk, csak kvantitatív becslésekkel egészíti ki az évezredek tapasztalatán alapuló kvalitatív becslést. Világos, hogy a szóban forgó feladat arra vezethető vissza, hogy becsléseket kell adnunk mind

$$\mathbf{P}\{B_i|A_j\} \quad \text{és} \quad \mathbf{P}\{A_j|B_i\}$$

típusú valószínűségekre, mind pedig a

$$\mathbf{P}\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}; \bar{A}_{j_1}, \bar{A}_{j_2}, \ldots, \bar{A}_{j_r} \mid B_i\}$$

és

$$\mathbf{P}\{B_i \mid A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}; \bar{A}_{j_1}, \bar{A}_{j_2}, \ldots, \bar{A}_{j_r}\}$$

valószínűségekre, az $i_1, i_2, \ldots, i_s$ és $j_1, j_2, \ldots, j_r$ indexek tetszőleges megválasztása mellett.

Az adatok közé természetesen besoroljuk mind az anamnézis adatait, melyeknek kiváltképpen kvalitatív jellegük van (szóba jöhet elkékülés, oedema, különböző fájások panaszolása és hasonlók), mind pedig más jellegű adatok, az arteriás és vénás vérnyomás értékei, elektrokardiográfiai vizsgálat, elektrokardiogram, fonokardiogram adatai és a többi. Továbbá figyelembe kell venni természetesen, hogy a beteg neme és kora, valamint foglalkozása is befolyásolja a végső megállapítást. Meg kell mondanunk, hogy már az első lépések alkalmával számunkra nem várt mértékben nagy nehézségekbe ütköztünk. Kezdetben úgy látszott, hogy kimeríthetetlen statisztikai anyag van kezünkben, mely kórtörténetekből, számos profilaktikus jellegű orvosi vizsgálati eredményből, újoncok és a lakosság más kategóriái szemléjének eredményeiből gyűlt össze. Azonban már korán különböző okokból le kellett mondanunk ezen adatok tekintélyes részének feldolgozásáról. Mindenekelőtt azt tapasztaltuk, hogy az általános vizsgálódásokat különböző eszközökkel hajtják végre, e vizsgálódások részben nem tartalmazzák a szükséges adatokat, emellett kizárólag vegyes és teljes bizalmat nem mindig érdemlő anyagot képviselnek. Másodszor, az ilyenféle vizsgálatok eredményei nagymértékben az orvos szubjektív benyomásának jellegét viselik magukon és nem támasztják alá őket objektív adatok. Közelítőleg ugyanilyen körülmények késztettek minket arra, hogy eltekintsünk nagyszámú kórtörténet tanulmányozásától és egyelőre csak ama betegek kórtörténeteire korlátozzuk vizsgálódásunkat, akik szívműtéten estek át és így esetükben bizonyos lehetőség volt objektív ellenőrzésre. Sajnos, gyűjtésünkben csupán kisszámú ilyen adat volt. Kijev, Moszkva és Leningrád más klinikai anyagának felhasználása bizonyos nehézségekbe ütközött, minthogy a diagnosztikai módszerek, az elektrokardiogramok kidolgozása ezeken a helyeken lényegesen más volt, mint N. M. Amoszov professzor klinikáján, amellyel együttműködve kezdtük el munkánkat. Az utóbbi időben elhatároztuk, hogy a statisztikai anyag teljesebbé tétele céljából felhasználjuk a hullaházakban lefolytatott boncolások eredményeit is.

Nem mondhatjuk, hogy a fentebb felvázolt feladatok megoldásában már messzire jutottunk volna. A munka megindulásának még csak a legkezdetén vagyunk. Egyelőre részeredményeket kaptunk, amelyek alapján kétségbe vonhattuk a megbetegedések bizonyos használatos, vagy kiemelni javasolt szimptómái használhatóságát — és olyan szimptómákét is, amelyek a betegség bizonyos stádiuma beálltának becslését teszik lehetővé. Ugyanakkor statisztikai alátámasztást is kaptunk bizonyos diagnosztikai kritériumokhoz is.

Vizsgálatainkban bizonyos figyelmet szenteltünk a statisztikai adatgyűjtés megszervezése bonyolultságának is. A megfigyelések megszervezésének, a következtetések mennyisége és jellegének kérdése egyik a legfontosabbak közül. Hogyan szervezzünk meg például kísérleteket adott körzetben elszaporodott rágcsálók, vagy meghatározott fajtájú állatok adott területen élő mennyisége becslésére? Hogyan becsüljük fel a közélelmezési halkészleteket adott halastóban és milyen megfigyeléseket kell ehhez elvégezni? Ezek a kérdések biológusok és matematikusok tartós együttműködését kívánják. Mindenesetre rendkívül szükségesnek tartom matematikusok részvételét hosszabb expedíciókban, melyek folyamán a matematikus nemcsak a biológusokat érdeklő problémákat ismeri meg, hanem a jelenségeknek azokat a jellemző sajátosságait is, melyek kvantitatív elméletét neki kell majd kialakítania.

4. A statisztika nem-paraméteres módszereiről. Az utóbbi években gyors ütemben fejlődő statisztikai módszerek közül különösen figyelmet érdemelnek az úgynevezett nem-paraméteres módszerek. A statisztika említett fejezete tárgyalásának van szentelve SIDNEY SIEGEL könyve (1956), melynek „receptkönyv" jellege van és különösen alkalmas azok számára, akik a statisztikai módszereknek csupán elvi oldalát kívánják megismerni. Egy másik nemrég megjelent könyv, FRASER munkája (1957), túlnyomórészt távolról sem foglalkozik nem-paraméteres módszerekkel és mindenesetre messzire esik azok érdeklődési körétől, akik arra törekednek, hogy gyorsabban létesüljön kapcsolat biológiai problémák és kísérleti adatok kidolgozásának statisztikai módszerei között.

A matematikai statisztika klasszikus problémafelvetési módjai változatlanul feltételezik, hogy a vizsgálat alá vont sztochasztikus változók olyan valószínűség-eloszlással rendelkeznek, amelyeknek analitikus alakja ismert. Felteszik, hogy ezek az eloszlások véges számú paramétertől függenek és ezek értékének becslése, valamint ezekkel kapcsolatos feltételekre vonatkozó különböző hipotézisek ellenőrzése a statisztikai vizsgálatok alapfeladatai. Ennek során — olykor elegendő alap nélkül is — különös figyelmet szenteltek a normális eloszlásnak. Tudjuk, még ma is az a helyzet, hogy ha egy vizsgált sztochasztikus változó eloszlásáról semmi sem ismeretes, akkor azt normálisnak tekintik, aztán pedig az egész feladatot arra vezetik vissza, hogy jól kidolgozott szabályok szerint becsléseket keressenek annak paramétereire. Az ilyen eljárás nem mindig jogosult és nem is mindig hasznos. Nem ritkán az a probléma, amely a biológust érdekli, egyáltalán nincs is befolyással arra a feltételezésre, hogy a vizsgált eloszlás ebbe vagy abba a meghatározott eloszlásosztályba tartozik. Például csak annak a hipotézisnek a lehetőségét kell megvizsgálni, hogy a vizsgált megfigyelés-sorozat nem változó eloszlású sokaságból vett mintának tekinthető. Rendkívül fontos az orvostudomány, a szántóföldi kísérletezés vagy tetszőleges kísérleti munka szempontjából csupán annak a ténynek a megállapítása, hogy két független mintát egy és ugyanazon sokaságból valónak tekinthetünk-e.

Nem kevésbé lényeges olyan szabály kidolgozása, amely lehetővé tenné annak megállapítását, hogy egy bizonyos megfigyelés-csoport egyes eredményei oly sztochasztikus változóra vonatkoznak, amely „kisebb" egy másik sztochasztikus változónál, amelyre vonatkozólag egy másik megfigyelés-csoport áll rendelkezésünkre. Ilyen fajta feladat nevezetesen mindenkor felmerül, amikor azt kell eldönteni, nagyobb terméshozama van-e valamely új fajtának, mint a korábban termesztettnek, vagy pedig azt, hogy egy kitenyésztett tehénfajta jobban örökíti-e ezt vagy azt a jellegzetességet, mint mások és így tovább. Minden ilyen esetben a kutatót csak az említett kérdések érdeklik, és számára teljesen közömbös az a kérdés, hogy valamely szereplő eloszlás a normális eloszláscsaládba tartozik-e vagy egy másikba. Az összes ilyen típusú problémák, melyekben statisztikai szabályok kidolgozásáról van szó, a kiindulási eloszlások tág osztályával kapcsolatban felvethetők (felvethetők pl. az összes folytonos vagy abszolút folytonos eloszlásokkal kapcsolatban); az ilyeneket manapság nem-paraméteres problémáknak nevezzük.

Nem kívánok példákat felsorolni itt bármilyen nem-paraméteres statisztikai szabályra, minthogy ezt természetesebb máshelyütt megtenni. Ilyen másik helynek tekintem viszonylag nem terjedelmes könyvek oly sorozatát, amely bevezethetné az olvasót a modern statisztika módszereibe és amelyekben elég sok jó, biológiai jellegű illusztráló példa volna. Az ilyenféle nem nagyterjedelmű monográfiák formáját persze jól át kellene gondolni. Nem szabadna ezeket megterhelni tisztán numerikus részletekkel; feladatuk főleg abból állna, hogy megvilágítsák a statisztikai módszerek alapgondolatait, alkalmazási feltételeit és felhasználási szkémáit.

Ilyen, a biológus, az orvos, a mezőgazdasági szakember számára életbevágóan fontos könyvsorozat kiadásának megvalósulása lényeges segítséget nyújt majd az említetteknek. Amellett ez a lépés abban is segítséget hoz majd, hogy elhárítsuk a nem-matematikus koponyákban a statisztikai módszerek konkrét orvosi és biológiai vizsgálatokban való felhasználásával kapcsolatban fel-felmerülő ama erős emócionális reakciót, amelyről oly színesen írt A. BRADFORD HILL nemrég orosz nyelven is megjelent „*Az orvosi statisztika alapjai*" című könyvében. Engedjék meg, hogy idézzem itt idevágó szavait. „Bosszantó, ha aközben, hogy nagy munkával elsajátítható módszerekkel tanulmányozunk egy problémát, megtudjuk, hogy következtetéseink kétkedésbe döntenek — sőt, elriasztanak tőlünk — bárkit, aki nem tudja önállóan reprodukálni megfigyeléseinket. Ahhoz, hogy elismerjük, hogy a hiba bennünk magunkban van, több hidegvér szükséges, mint amennyivel pillanatnyilag rendelkezünk." Célunk nem annyira az, hogy ellenőrizzük mások megállapításait, hanem inkább az, hogy lehetőleg nagyszámú értékes, fontos és igaz megállapítást tehessünk a természet — speciálisan az *élő* természet — folyamatairól.

IRODALOM

BARTLETT, M. S.: *An introduction to stochastic processes.* With special reference to methods and applications. Cambridge University Press, London, 1956. (Orosz fordítása: Бартлет, М. С.: Введение в теорию случайных процессов. Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1958.)

Севастьянов, Б. А.: Теория ветвящихся случайных наук, т. VI. (1951), вып. 6(46), 47—99.

HILL, A. BRADFORD: *Principles of medical statistics,* 4th edition. Lancet, London, 1949. (Orosz fordítása: Хилл, Бредфорд А.: Основы медицинской статистики. Издательство Медицинской Литературы, Москва, 1958.)

ASHBY, W. R.: *An introduction to cybernetics.* Chapman and Hall, London, 1956. (Orosz fordítása: Эшби, Росс У.: Введение в кибернетику. Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1959.)

BAILEY, N. T. J.: *The mathematical theory of epidemics.* Hafner Publishing Co., New York, 1957.

BARTLETT, M. S.: Deterministic and stochastic models of recurrent epidemics. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* 1954—1955, vol. IV, pp. 81—109. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1956.

FELLER, W. K.: Diffusion processes in genetics. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* 1950, pp. 227—246. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

FRASER, D. A. S.: *Nonparametric methods in statistics.* Wiley and Sons, New York, 1957.

SIEGEL, S.: *Nonparametric statistics for the behavioral sciences.* McGraw—Hill, New York, 1956.

Fordította: *dr. Medgyessy Pál,*
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1965. IV. 3. — Terjedelem: 7,50 (A/5) ív, 1 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 65-5696

Ára 17,– Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XV. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XV. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21 (Magyar Nemzet. Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK 1965. ÉVI OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓJA*

I.

Április 4-én ünnepeltük hazánk felszabadulásának 20. évfordulóját. E két évtized alatt gyors ütemű fejlődésre került sor hazánkban minden téren, így a tudományos életben is.

A tudomány hazai fejlődésében az 1949. évi átszervezés után, tehát 15 év óta, nagy szerepe van az Akadémiának. Az átszervezéssel indult meg az a folyamat, amelynek során az Akadémia országunk legfőbb tudományos intézményévé vált. A felszabadulás 20. és az Akadémia újjászervezésének 15. évfordulója alkalmából az Osztályvezetőség a jelen ülésen egyrészt visszapillantást kíván nyújtani az elmúlt időszakról, másrészt igyekszik meghatározni a legfontosabb feladatokat.

Az Osztály működési területe a matematikát, fizikát, a csillagászatot és a matematikai kibernetikát öleli fel, ezeken kívül kapcsolatban van több más tudományterülettel. A szaktudományi kutatások részleteredményei, ha azokat önmagukban nézzük, csak a szorosan vett szakembereket érdeklik. Ha azonban eme eredmények együttes hatását tekintjük, megállapíthatjuk, hogy e kutatások következményei és felhasználásuk az egész társadalmat érinti. A kutatómunka jelentős közügy, és ez a megállapítás az Osztályunkban képviselt tudományok mindegyikére érvényes.

Ilyen helyzetben kell tehát megítélnünk az Osztály és intézményeinek eddigi tevékenységét, és ebből kiindulva kell kitűznünk a további feladatokat is.

II.

A kutatási eredmények és az Osztályhoz tartozó tudományterületek helyzete

Az elmúlt 15 év kutatási eredményeinek ismertetése messze meghaladná egy szóbeli beszámoló kereteit. Ezért a konkrét tudományos eredményekről az osztályvezetőségi beszámoló külön melléklete nyújt tájékoztatást, amely az osztályülés részvevőinek a rendelkezésére áll.

Indokolt azonban e helyütt vázlatosan beszámolni arról, hogy milyen fejlődésen ment át a felszabadulás óta a matematika, a fizika, a csillagászat, s milyen a jelenlegi hazai fejlettségük.

A *matematikai tudományokkal* szemben a felszabadulás előtt hazánkban csaknem teljes közöny mutatkozott, bár hazai művelésük már századunk elején világszínvonalon állt. A felszabadulás után a helyzet fokozatosan megváltozott. Egyetemeinken a matematika oktatása lényegesen nagyobb szerepet kapott, az Akadémia

* Előadta Budó Ágoston akadémikus, osztálytitkár, az 1965. április 21-én tartott nyilvános osztályülésen.

keretében megalakult a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, majd a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT. Erős matematikus bázist létesített saját keretein belül néhány kutatóintézet, és mind több matematikust igényelnek népgazdaságunk különböző területei is.

A matematika egyes fő ágait tekintve, az analízis területén a FEJÉR LIPÓT, RIESZ FRIGYES, HAAR ALFRÉD és mások által képviselt magas színvonalat egyes fontos részterületeken (valós és konstruktív függvénytan, függvényegyenletek elmélete, analitikus számelmélet, funkcionálanalízis) matematikusaink ma is tartják, más területeken viszont (parciális differenciálegyenletek és általában az analízis fizikai-technikai problémákra való alkalmazásai) kevésbé kielégítő a helyzet. — Az algebrai kutatások az utóbbi évtizedben világszerte átalakultak, és e fejlődésben a magyar matematikusok nemzetközileg elismert szerepet játszanak. — A geometriában különösen két irányt kell említeni, amelyben a nemzetközi élvonalban álló magyar iskola működik: a diszkrét geometriát és a differenciálgeometriai terek elméletét. — A topológiában viszont, bár vannak nemzetközi színvonalú eredmények, szükséges a kutatások fokozása. — A valószínűségszámítás klasszikus elméletében a felszabadulás előtt JORDAN KÁROLY végzett értékes munkát. Az elmúlt 15 évben sikerült olyan iskolát kialakítani, amely a valószínűségszámítás modern ágaiban is magas színvonalat ért el. — Számottevő a matematikai statisztika és az operációkutatás hazai művelése is. — A halmazelméleti és matematikai logikai kutatások néhány irányában (pl. a rekurzív függvények elmélete) világszínvonalon állunk, más fontos irányokban azonban elmaradtunk. — Hasonlóan sok a pótolni való a numerikus módszerek és a számítástechnika területén. A mulasztások pótlása sürgős, mert a népgazdaság szempontjából igen fontos területek műveléséről van szó. Az elmaradás csak az Akadémián belüli és külső erők kooperációjával szüntethető meg.

Hazai matematikai kutatásaink nemzetközi súlyát tanúsítják azok a sikerek is, amelyeket Actáink és idegen nyelveken megjelent könyveink érnek el.

A *fizikai tudományok* hazai fejlődésének lényegesebb vonásait a következőkben jellemezhetjük.

Egy nagy és egy kisebb méretű intézet (KFKI[1], ATOMKI[2]) alakult, egy akadémiai kutatócsoport és több tanszéki kutatóhely szervezésére került sor. — A kísérleti fizikai kutatások felszabadulás utáni fejlődését a kozmikus sugárzás korszerű vizsgálata vezette be. Az e téren dolgozó kutatók közül került ki a magfizikusok egy része és a nagyenergiájú részecskék fizikájával foglalkozó kutatók többsége. — A felszabadulás előtti debreceni kezdeményezésekre, továbbá elgondolásokra és a Szovjetunió segítségére támaszkodva kialakult a hazai magfizikai kutatás. Eredményei nemcsak az atommagok szerkezetére vonatkozó ismereteinket gazdagították, hanem hozzájárultak más tudományágakban és a gyakorlatban ma már széles körűen használatos magfizikai módszerek és mérési eljárások elterjesztéséhez. — A szilárdtestfizikai kutatásnak korábbi hazai hagyományaiból (kristályfizika, lumineszcencia) és a Szovjetunióból származó tapasztalatokból (mágnességtan) kialakult a magyar szilárdtestfizikai kutatás. Az elért eredmények mind tudományos, mind gyakorlati szempontból értékesek. — Szintén kiemelendők az atomok és atommagok statisztikus elméletére, a kvantummechanika alapjaira, a relativi-

[1] Központi Fizikai Kutató Intézet
[2] Atommag Kutató Intézet

táselméletre, az elemi részek és a molekulaszínképek elméletére vonatkozó, nemzetközileg ugyancsak jelentős és elismert vizsgálatok.

Igen kedvező körülmény, hogy a fizika néhány ágazatában sikerült koncentrált, nemzetközi együttműködésre támaszkodó kutatási tevékenységet kialakítani. Hátrányos viszont, hogy csak egyetlen nagyméretű fizikai kutatóintézet létesült, és nem követte ezt a jó példát hasonló méretű intézmény kialakulása a szilárdtestek kutatásában, amely így szétdaraboltan, több kutatóhelyen folyik. Ez a helyzet megengedhető lenne, ha léteznék egy megfelelő méretű kutatóintézet, amely a kisebb — feltétlenül szükséges — kutatóhelyek hatásfokát növelné. Célszerűnek látszik a jövőben kiemelten fejleszteni a szilárdtestfizikai kutatásokat a célból, hogy a hazai viszonyokhoz igazodó iparfejlesztési programok egyik tudományos bázisa kellő színvonalon rendelkezésre álljon. Figyelmet kell azonban fordítani a magfizikai kutatások továbbfejlesztésére is, mert e kutatásoknak fontos, közvetett szerepük van abban is, hogy más tudományágak és a gyakorlat számára korszerű módszereket adjanak át.

A *csillagászati tudományokat* a felszabadulás előtt hazánkban csak a szabadsághegyi intézetben művelték, de a főváros közelsége miatt ez is csak korlátozott mértékben működhetett. 1962-ben megépült a Mátrában a piszkéstetői obszervatórium. Ennek fő műszere, egy 90/60/180 cm-es Schmidt-teleszkóp, nemzetközi viszonylatban is jelentős távcső. Az obszervatóriumban a rendszeres kutatómunka 1964-ben indult meg, és a szupernova-kutatás terén máris szép eredményekre vezetett. A felszabadulás után csillagászaink kifejlesztették a fényelektromos megfigyelési módszereket, és az új berendezésekkel a változócsillagok vizsgálata során jelentős eredményeket értek el. 1958-ban az Akadémia Debrecenben Napfizikai Obszervatóriumot létesített, 1959-ben pedig országos hálózatot szervezett a mesterséges égitestek megfigyelésére. Ez a munka multilaterális egyezmény keretében folyik.

III.

Az Osztály testületi munkája

Az Osztály egyrészt tudósok testülete, amelyben a testület tagjai alakítják ki véleményüket és határoznak időszerű szakmai és tudománypolitikai kérdésekben. Másrészt viszont az Osztály államigazgatási szerv, amely évente több tízmillió forinttal gazdálkodik, viszonylag sok intézményt, több száz dolgozót irányít, illetőleg igazgat. Az elmút 15 év alatt kialakult e kettős jellegnek megfelelő szemlélet, kibontakoztak az új munka-, illetőleg eljárási módszerek, amelyek által a testületi és az államigazgatási tevékenység támogatja egymást. Az Osztály testületi szervei nagy erőfeszítéseket tesznek, hogy a szervezési munkán túlmenően szakmai-érdemi vonatkozásban is minél inkább gazdái legyenek tudományos életünk ama szektorának, amelyben illetékesek.

Az *Osztályvezetőség* feladata, hogy az Akadémia Közgyűlése és az Elnökség által megszabott irányelvek keretében kidolgozza az Osztály működésének tudománypolitikai irányelveit, fő vonalaiban irányítsa és ellenőrizze a hozzá tartozó intézmények működését, megvitassa és jóváhagyja a kutatási terveket és beszámolókat, valamint a fejlesztési terveket, határozzon az egész Osztályt érintő anyagi ügyekben, valamint az anyagi eszközök felosztásának arányairól.

Az Osztályvezetőség munkája az elmúlt években jelentősen fejlődött. Az eléje kerülő ügyek nagy részét igyekszik sokoldalúan megvitatni és megfelelő, következetes tudománypolitikát folytatni. Mindamellett vannak még az Osztályvezetőség munkájának nem elhallgatható hiányosságai is. Az Osztályvezetőségnek foglalkoznia kell speciális szaktudományi kérdésekkel is, bár természetesen konkrét tudományos problémák vonatkozásában nem teheti ezt oly mélységben, mint a szakbizottságok. Az Osztályvezetőség nagy erőfeszítéseket tesz a matematika, a fizika és a csillagászat terveinek és beszámolóinak érdemleges megvitatására, ezeknek a sikere azonban nem kielégítő. A tervek jóváhagyása, az eredmények értékelése és a kutatás fő vonalakban való irányítása még sok esetben formális. Az Osztályvezetőség feladata a szakbizottságok munkáját úgy irányítani, hogy tőlük olyan mélységű és részletességű, kritikailag értékelő javaslatokat kapjon, amelyek annyi, de csak annyi információt tartalmaznak, amennyi az Osztályvezetőség szintjének megfelelő mélységű és részletességű elhatározásokhoz szükséges és elegendő. A kutatómunka napjainkban egyre nagyobb mértékben válik komplexszé, növekszik tehát az Osztályvezetőség felelőssége a különböző tudományos osztályokhoz tartozó kutatók tervszerű együttműködésének előmozdítása terén.

A *szakbizottságok* bizonyos vonatkozásban kulcshelyzetet foglalnak el az Osztályon. Az Osztályvezetőségnek tett javaslataik minőségétől nagymértékben függ az Osztályvezetőség tevékenységének az eredményessége. A szaktudományok leghozzáértőbb szervei, a szakbizottságok, évente alaposan megvitatják és megbírálják — előre kijelölt opponensek véleménye alapján — a kutatási terveket, a beszámolókat és alakítják ki az állásfoglalásokat. Több esetben meglátogatják a kutatóhelyeket, üléseiket a kutatóhelyeken rendezik meg.

Az Osztályvezetőség az Osztály bizottsági hálózatát az elmúlt évi Közgyűlés határozatának megfelelően újjáalakította.

A MATEMATIKAI BIZOTTSÁG szervezete az új összetételben is változatlan maradt, ti. továbbra is egy bizottság fogja össze a matematika egész területét, beleértve a matematika alkalmazásait is.

A hazai fizikai kutatások vonatkozásában 1964 szeptemberéig a szervezést, irányítást és ellenőrzést az Osztályvezetőség az addig albizottságok nélkül működő FIZIKAI BIZOTTSÁG javaslataira, véleményére támaszkodva végezte. A hazai fizikai kutatások azonban ma már nagyon sok irányúak ahhoz, hogy egyetlen testület — a Fizikai Bizottság — valamennyi kutatási területtel kellő részletességgel foglalkozzék, és értékelésében elég mély és körültekintő lehessen. Így például gyakran megelégedtünk egy-egy eredmény tudomásulvételével, anélkül, hogy annak jelentőségét a tudomány belső összefüggéseinek tekintetbevételével, vagy a hazánkban folyó rokon jellegű, illetőleg közvetlen gyakorlati jelentőségű vizsgálatokkal összevetve értékeltük volna.

Elsősorban az említett felismerések alapján az Osztályvezetőség a fizikai kutatások területén az irányító és ellenőrző rendszerét úgy alakította át, hogy az fedje a hazai kutatások fő irányait és egyben alkalmas legyen a fokozódó nemzetközi együttműködéssel járó feladatok ellátására is. Ezért a Fizikai Bizottság tevékenységében jelenleg a mellékletben feltüntetett albizottságokra, illetőleg komplex bizottságokra támaszkodik.

Ezen a helyen külön említést kívánunk tenni arról, az Osztály életében igen megtisztelő és fontos feladatot jelentő tényről, hogy az Akadémia Elnöksége 1964. évi október 30-i határozatával a kiemelt kutatási területek közül a „Szilárdtestek kutatása" felelőséül a III. Osztályt jelölte ki; 1964. évi november 13-i határozatával pedig az említett kiemelt kutatási területen — a III. és a VI. Osztály közös javaslatával egyetértve — *Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság*ot létesített. A Bizottság már a megalakulása óta eltelt rövid idő alatt is igen élénk tevékenységet fejtett ki.

A tárgyilagos véleményalkotáshoz, a kutatási irányok helyes meghatározásához stb. elengedhetetlenül szükséges, hogy a kellő információ rendelkezésre álljon. Ennek érdekében a fizikai komplex, illetőleg albizottságok

a) összeállítják a kutatók személyére és tudományos eredményeikre vonatkozó adatokat;

b) összegyűjtik a nagyobb értéket képviselő berendezések, műszerek fontosabb adatait;

c) elkészítik a kutatóktól eddig megjelent tudományos közlemények bibliográfiáját;

d) összegyűjtik a szóban forgó kutatásokra eddig fordított beruházási és költségvetési adatokat.

Az említett testületek elhatározták, hogy megtekintik mindazokat az intézményeket, amelyekben hozzájuk tartozó kutatások folynak, és a helyszíni szemlék során jobban megismerik az ott folyó munkákat és a munkakörülményeket. A tervezett és már folyamatban is levő látogatások után a testületek értékelik a szóban forgó kutatások hazai helyzetét, és kialakítják a fejlesztésre vonatkozó javaslataikat.

A CSILLAGÁSZATI BIZOTTSÁG szervezetében változás nem történt; ez az újjáalakított testület a szakbizottsági feladatok mellett változatlanul ellátja a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET és a NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM tudományos kollégiumának feladatkörét is.

Az Osztályvezetőség tervbe vette, hogy a közeljövőben más tudományos osztályokkal közösen OPERÁCIÓKUTATÁSI KOMPLEX BIZOTTSÁGot alakít. Itt említjük, hogy az I. Osztály az elmúlt év végén MATEMATIKAI NYELVÉSZETI KOMPLEX BIZOTTSÁGot hozott létre, amelynek munkájában több matematikus vesz részt.

IV.

A kutatási hálózat fejlesztése

Az Osztály tudományszervezési elveinek egyik jellemző vonása volt az elmúlt 15 évben, hogy 7 önálló kutatóintézmény létesítése mellett jelentős mértékben támaszkodott a tanszéki kutatásokra. Az Osztály 1960-ig 17 tanszéken irányította és támogatta a kutatást műszerekkel, kutatási költségek fedezésével és álláshelyek rendelkezésre bocsátásával. Ez lehetővé tette a kutatások kibővítését, és elősegítette a tanszéki kutatómunka színvonalának emelését. Miután 1961-ben a Művelődésügyi Minisztérium a tanszékeknek kötelezően előírta a tudományos kutatást, az Osztály 11 tanszék kutatómunkájának az irányítását és gondozását átadta a Minisztériumnak. 1964-ben az Osztály már csak 6 tanszéken irányította és támogatta a kutatást (beleértve a 4 tanszéki kutatócsoportot is). Ezzel lehetővé vált, hogy az Osztály az utóbbi 4 évben koncentrálja a tanszéki kutatások céljaira rendelkezésre álló erőket.

A tanszéki akadémiai kutatásoknak az Osztály változatlanul kiemelkedő jelentőséget tulajdonít abból a felismerésből kiindulva, hogy kis országban nem célszerű, de nincs is lehetőség minden fontos tudományágra kiterjedő kutatóintézeti hálózatot létrehozni. Arra törekszünk, hogy az akadémiai tanszéki kutatóhelyek olyan intézetszerű egységekké fejlődjenek, amelyek az Akadémia önálló intézeteihez hasonlók, a bennük folyó kutatómunkát is hasonlóan lehet tervezni, irányítani, és személyi és dologi szükségleteikről is ugyanúgy lehet gondoskodni.

. Minthogy azonban a tanszéki kutatások volumene erősen korlátozott, már csak emiatt is tovább kell fejleszteni az elkövetkező években az Osztályra háruló feladatok megoldásához szükséges intézeti hálózatot. Az Osztályvezetőség 1963. és 1964. évi tudománypolitikai jellegű tevékenysége középpontjában éppen az erre vonatkozó tervek álltak, amelyeket beható elemzés előzött meg. Fejlesztési javaslataink tekintetében azonban eddig még végleges döntés nem történt.

V.

A tudományos káderutánpótlás

Ismeretes, hogy az aspirantúrával és a tudományos minősítéssel kapcsolatos szakmai és szervezési ügyekkel mintegy másfél éve már nem az Akadémia osztályai, hanem a TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG és annak szakbizottságai foglalkoznak. Az Osztályvezetőségnek e szakbizottságokkal való fokozottabb együttműködése igen kívánatos. Az együttműködés kisebb kezdeti nehézségeire itt nem térünk ki, hanem inkább azt tartjuk feladatunknak, hogy rövid áttekintést nyújtsunk a káderfejlesztés terén az elmúlt években elért eredményekről.

Az aspirantúrával és a tudományos fokozatok odaítélésével kapcsolatos rendeletek megjelenésük (1950—51) óta többször módosultak, de az alapvető célkitűzések lényegében változatlanok maradtak. Az Osztályhoz tartozó tudományterületeken az 1950-es évek elején, amikor intenzívebben megindult a tudományos kutatások fejlesztése, viszonylag csak kis létszámú egyetemi oktató gárdára támaszkodhattunk, és ebből kerültek ki megalakuló intézeteink első munkatársai. Csakhamar azonban a fiatal egyetemi oktatók és a tanulmányaikat befejező, tehetségesnek mutatkozó egyetemi hallgatók közül a bel- és külföldi aspirantúra különböző formái révén sokan kaptak lehetőséget arra, hogy vezető tudósok irányításával, viszonylag kedvező körülmények között tudományos munkával foglalkozzanak. Közülük kerültek ki jelentős számban kutatóintézeteink és az egyetemi tanszékek vezető munkatársai is.

Az aspiránsképzés megindulását követő 5—6 évben minden arra alkalmas pályázót, választott kutatási területétől függetlenül, felvételre javasoltunk, abból kiindulva, hogy a hozzánk tartozó szakterületek mindegyikében káderhiány van. Az utóbbi években — igazodva a távlati kutatási tervekhez és az újabban jelentkező igényekhez — e téren is fokoztuk a tervszerűséget. A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG az osztályok javaslatai alapján évről évre a legfontosabbnak ítélt kutatási területeket hirdette meg. Az aspiránsi pályázatoknak ez a rendszere ma is érvényben van, és ez megfelelőnek tartható annál is inkább, mert aspirantúrán kívül bármely kutatási területről be lehet nyújtani disszertációt kandidátusi fokozat elnyerése céljából.

Szép számmal szereztek az elmúlt években tudományos fokozatot az Osztály tudományterületein olyan szakemberek, akik nagyobbrészt a fiatalabb korosztályhoz tartoznak. Számszerű adatokat a melléklet tartalmaz. Az utóbbi években megvédett disszertációk között szép számmal vannak olyan dolgozatok, amelyek a kiemelt kutatási területekhez kapcsolódnak vagy az alkalmazások szempontjából is fontosak (a szilárdtestfizika különböző területei, a valószínűségszámítás, matematikai programozás stb.). Többen készítettek disszertációt olyan kutatási területekről, amelyek nem kiemelt területek, ill. közvetlen alkalmazási lehetőségük egyelőre nincsen, de a perspektivikus kutatás szempontjából jelentősek (pl. geometria, az analízis egyes fejezetei, magfizika, az elméleti fizika különböző ágai stb.).

A bel- és külföldi aspirantúrában jelenleg 24 matematikus vesz részt, akik közül 8-an matematikai és gépi programozással, 4-en differenciálegyenletekkel, 2-en funkcionálanalízissel foglalkoznak, a további 10 aspiráns témái megoszlanak a matematika más fejezetei között.

A fizikus aspiránsképzésben az a célkitűzés érvényesült, hogy tovább kell fejleszteni a szilárdtestfizika káderellátottságát. Ennek megfelelően a bel- és külföldi aspirantúra ösztöndíjas és levelező formáján tanuló 14 aspiráns közül 8 szilárdtestfizikával, további 6 pedig a fizika más ágaival foglalkozik. A még nem végzett fizikus önálló aspiránsok zöme magfizikával foglalkozik, néhányan pedig szilárdtestfizikával, ill. a fizika más területeivel.

A csillagászat területén 2 aspiráns képzése folyik, de többen készítik kandidátusi disszertációjukat aspirantúrán kívül.

Külön is szeretnénk megemlíteni, hogy a belföldi aspirantúrán kívül 10 fő szerezte meg a kandidátusi fokozatot a Szovjetunióban, elsősorban olyan területeken, amelyeken a hazai képzés lehetősége egyáltalán nem, vagy csak kevésbé kedvezően volt biztosítva.

Jelentős azon kutatók száma, akik az 1950-es évek elején aspiránsként kezdték tudományos munkájukat és ma már a tudományok doktora fokozatot is megszerezték.

Megállapítható, hogy a tudományos fokozatok bevezetése és az azzal járó erkölcsi és anyagi elismerés ösztönzőleg hat kutatóink tudományos tevékenységére. Ezzel kapcsolatban azt is megállapíthatjuk, hogy az Osztály tudományterületein készült kandidátusi és doktori disszertációk döntő többségükben nemcsak elérték, de túl is haladták azt a színvonalat, amelyet a rendelkezések előírtak.

Úgy véljük, hogy az aspiránsképzés és a tudományos minősítések terén a fejlődés és színvonalemelés lehetősége továbbra is adva van, mert e munka irányításában és végrehajtásában az Osztály tagjai, továbbá tudományos fokozattal rendelkező munkatársai nagy számban és lelkiismeretesen tevékenykednek.

Jelentősen elősegítette kutatóink fejlődését az utóbbi években a külföldi — különösen a hosszú időtartamú — tanulmányutak lehetősége is. Itt szintén arra törekedtünk, hogy elsősorban a fejlesztendő kutatási területek művelői részesüljenek előnyben.

Örvendetesen megnövekedett az érdeklődés kutatóink körében az ideológiai kérdések iránt. Az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETBEN a MARXIZMUS—LENINIZMUS ESTI EGYETEMnek kihelyezett tagozata működik. Több intézetünkből számos hallgatója van a MARXIZMUS—LENINIZMUS ESTI EGYETEMnek. A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETben, a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTban és a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETben filozófiai konferenciákat rendeztek, más intézetek és tanszéki kutatócsoportok kutatói pedig az egyetemi ideológiai oktatásba kapcsolódtak be. Sokan az aspiránsképzés keretében vesznek részt ideológiai továbbképzésben. Ezen túlmenően szinte minden intézetünkben rendeztek speciális szakmai filozófiai előadásokat a kutatók részére.

Végül röviden néhány olyan problémára szeretnénk a figyelmet felhívni, amelyek fokozzák a káderhiányt intézeteinkben, ill. gátolják kutatóink fejlődését. A matematikus és fizikus egyetemi hallgatók létszáma a szükségletekhez képest kicsiny és így intézeteink indokolt igényeit sem tudjuk kielégíteni. Ezt a nehézséget még fokozza az is, hogy az ipar a hallgatók amúgy is kis létszámából jelentős hányadot leköt társadalmi ösztöndíjakkal.

Sok helyen, különösen a tanszékeken gátolja kutatóink fejlődését a megfelelő felszerelések és műszerek hiánya; az ipari intézmények felszerelése általában jóval kedvezőbb, és az utóbbi intézményeket ez is vonzóbbakká teszi.

VI.

Könyv- és folyóiratkiadás

A könyv- és folyóiratkiadás az Osztály tudományos, tudománypolitikai és tudományszervezői tevékenységének jelentős részét képezi. E téren az elmúlt 15 évben igen nagy előrehaladás történt, de számos probléma megoldásra vár.

Az Osztály könyvkiadási tevékenysége az ötvenes évek elején döntően idegen nyelvből lefordított művek kiadására korlátozódott, mert a kutatások bővülésének egyik feltétele az volt, hogy a hézagpótló munkák mielőbb magyar nyelven megjelenjenek, továbbá ebben az időszakban még kevés kutató vállalkozott könyvírásra, sokan tankönyvírással voltak elfoglalva.

A feltételek javulásával fokozatosan előtérbe került az eredeti művek kiadása, és ennek eredménye, hogy könyvkiadási tervünk ma már döntően magyar szerzők munkáit tartalmazza. Örömmel állapíthatjuk meg, hogy könyveink szinte kivétel nélkül jelentős hazai és nemzetközi sikereket aratnak. Másik örvendetes tény, hogy vezető tudósaink mellett szép számmal — de még nem elegen — vállalkoznak és kapnak megbízást könyv írására a fiatalabb kutatók is.

Könyveink többségét kiadják a Szovjetunióban és gyakran más országokban is. Könyvkiadási tevékenységünk az utóbbi években a tervszerűség tekintetében is tovább fejlődött: a könyvügyekkel szakbizottságaink ma már sokkal alaposabban foglalkoznak, mint korábban. A MATEMATIKAI BIZOTTSÁG két év óta, a FIZIKAI BIZOTTSÁG, ill. annak albizottságai pedig a múlt évtől kezdődően a spontán könyvkiadási javaslatok helyett felmérik, hogy a hozzájuk tartozó területeken milyen igények merülnek fel, és hogy a szükségesnek tartott könyvek megírásának megvannak-e a személyi és egyéb feltételei.

Könyvkiadásunk számszerű eredményeiről itt nem kívánunk tájékoztatást adni, mert a megjelent művek jegyzékét a beszámoló melléklete tartalmazza.

Az eredmények mellett röviden említést szeretnénk tenni könyvkiadásunk néhány nehézségéről is. Az egyik az, hogy egyes fontos területeken — pl. a differenciálegyenletek elmélete, az információelmélet, a szilárdtestek fizikájának bizonyos területei stb. — általában nem vállalkoznak kutatóink könyv írására, pedig megítélésünk szerint ehhez a személyi és más szükséges feltételek már adva vannak. Ezért kénytelenek vagyunk egyes esetekben továbbra is idegen nyelvű munkák lefordítására és kiadására javaslatot tenni. Másik problémánk, hogy a már kiadásra jóváhagyott művek kéziratai is igen hosszú ideig készülnek, aminek többnyire a szerzők sokirányú elfoglaltsága az oka.

Folyóiratkiadási tevékenységünk eredményei miatt sem kell szégyenkeznünk, és az itt jelentkező nehézségek egy része még örvendetesnek is mondható, mert többnyire a kutatómunka fejlődéséből adódik.

A folyóiratok színvonala megfelelő; ezt mutatja jelentős publicitásukon kívül az is, hogy Actáinkban külföldi kutatók is nagy számban publikálnak (az *Acta Mathematica*nál a külföldi szerzők dolgozatainak aránya kb. 50%). A publicitásra vonatkozóan megemlítjük, hogy 1964-ben az *Acta Mathematica* 1200 példányából 800—850 példány, az *Acta Physica* nem egészen 1300 példányából pedig 900 példány kerül külföldre előfizetés, ill. csere formájában.

Az *Osztály Közleményei* — amely az Akadémia újjászervezését követő első években az Osztály egyetlen magyar nyelvű folyóirata volt — 1953 óta főleg a matematika területéről közöl dolgozatokat, továbbá a „Külföldi szakirodalomból" c. rovatában külföldi szerzők szélesebb érdeklődésre számottartó cikkeinek, előadásainak fordítását tartalmazza. 1953-ban megindult a *Magyar Fizikai Folyóirat*, amely az utóbbi időben főleg összefoglaló jellegű cikkeket közöl, elősegítve ezzel a tájékoztatást elsősorban a hazánkban is művelt kutatási területekről. Emellett a lap „Klasszikus irodalomból" c. rovata rendszeresen tartalmaz egy-egy téma köré csoportosított, klasszikussá vált cikket.

Folyóiratkiadásunk problémái részben — mint azt az előbb említettük — a kutatómunka fejlődéséből adódnak. Folyóirataink terjedelme megindulásuk óta nem változott, viszont lényegesen növekedett hazánkban az alkotó tudományos tevékenységet folytató és így publikációs igénnyel jelentkező kutatók száma. Részben ez az oka annak is, hogy a dolgozatok átfutási ideje meglehetősen hosszú. A megoldás érdekében az Osztály javaslatot tett az Elnökségnek az *Acta Mathematica* és a *Magyar Fizikai Folyóirat* terjedelmének növelésére, továbbá foglalkozik az Osztály az *Acta Physica* supplementumának kiadására vonatkozó javaslattal, amely lehetőséget teremtene összefoglaló cikkek idegen nyelvű publikálására is.

VII.

Nemzetközi kapcsolatok

Az Osztály nemzetközi kapcsolatait illetően minden vonatkozásban fejlődésről számolhatunk be. (A számszerű adatokat a melléklet tartalmazza.)

Az Osztályhoz tartozó intézmények elsősorban a szocialista országokkal való együttműködésre támaszkodnak, de felhasználják a tőkés országokkal adódó kedvező lehetőségeket is; nagyon sajnálatos, hogy e téren az utóbbi időben egy-két visszaélés is előfordult. Az Osztály részt kér továbbá azokból a feladatokból, amelyeket Magyarország a fejlődő országok megsegítésében vállal, és hozzá kíván járulni az időszerű nemzetközi tudománypolitikai feladatok megoldásához is.

A szocialista országok tudományos akadémiáinak *többoldalú együttműködése* keretében az Osztályt közvetlenül 3 témakör érinti. Kívánatos, hogy a megkezdett kapcsolatokat az eddiginél intenzívebben és tervszerűbben műveljük anélkül, hogy kötelezettségeinket általunk nehezen teljesíthető új feladatokkal bővítenénk.

A baráti országok akadémiai egyezményeiben rögzített *kétoldalú témákban* 14 matematikai, 5 fizikai és 5 csillagászati téma szerepel. A matematika terén tehát nagyszámú, egyezményben rögzített együttműködés van, de megítélésünk szerint ezek nem mindegyike takar valóban eredményes együttműködést. Egyik jövőbeli feladata az Osztályvezetőségnek, hogy fokozatosan megszüntesse a kétoldalú közös kutatási témák terén még fellelhető formalizmust. Bár az 1963. évben történt felmérés során javulás következett be, még mindig szükség van arra, hogy a nem eléggé meggondoltan vállalt közös feladatok törlésével, a helyesen kiválasztott feladatoknak pedig kölcsönös kiküldések útján történő művelésével a tényleges kutatásokat előbbre vigyük, és erőinket ezekre összpontosítsuk. A külföldi intézményekkel való közös kutatásoknak sok akadálya is van (pl. az egyezményes kiküldetési keretek alacsony volta, a felesleges adminisztráció).

Megállapítható, hogy a magyar matematikusoknak, fizikusoknak és csillagászoknak külföldi tudósokkal való kapcsolatai igen eredményesek. Sok külföldi szakember látogat el hazánkba, és tart előadásokat, szép számmal jelennek meg közös publikációk hazai és külföldi kutatók társszerzőségében; magyar matematikusok neves külföldi intézményektől kapnak meghívást, és azokban értékes előadásokat tartanak.

Az Osztálynak jelenleg nincs kellő áttekintése a KGST-n belüli és az Osztályt érintő tudományos együttműködésről, valamint a tárgyalásokon történt megállapodásokról. Ezeket a kérdéseket a jövőben rendezni kívánjuk.

Fejlődés mutatkozik a kiutazások terén mind a számszerűségben, mind a kiutazás hasznosságát illetően. A kiküldetési terv összeállításakor az Osztályvezetőség azt a gyakorlatot igyekszik követni, hogy hosszabb időtartamú kiküldetésben elsősorban olyan fiatal kutatók részesüljenek, akik kiemelt témával foglalkoznak. A külföldi rendezvényeken résztvevő delegációknak az idősebb szakemberek mellett mindig tagjai fiatalok is. Az Osztályvezetőség az egyezményes külföldi kiküldetési tervek összeállításánál minősítő körülményként igyekszik figyelembe venni, hogy a kiutazásra javasoltak kutatási témaköre két- vagy többoldalú akadémiai egyezményben szerepel. Kívánatos, hogy a kiutazások tekintetében a káderfejlesztés szempontjai az eddigieknél fokozottabban érvényesüljenek.

Jelentős fejlődés mutatkozik a tőkés országokkal folytatott kapcsolatokban is; ezek egyre inkább szervezett formát öltenek.

Az Osztály nemzetközi szervezetekben 5 kollektív és 4 egyéni tudományos tagsággal rendelkezik. Az utóbbi néhány évet illetően elsősorban a NEMZETKÖZI ELMÉLETI ÉS ALKALMAZOTT FIZIKAI UNIÓval (IUPAP) fennálló kapcsolatainkban számolhatunk be jelentős fejlődésről. Az Osztály kezdeményezésére 1963-ban megindult a baráti országok IUPAP bizottságainak együttműködése, és részben ennek eredményeképpen az 1963-ban tartott IUPAP közgyűlés három magyar kutatót beválasztott a IUPAP különböző bizottságaiba. A baráti országok képviselői megállapodtak abban, hogy a IUPAP titkárok évente megvitatják a nemzetközi tudománypolitikai kérdéseket; az ez évi értekezletet Budapesten rendeztük meg néhány nappal ezelőtt.

A NEMZETKÖZI MATEMATIKAI UNIÓ több ízben kért fel központi előadókat a magyar matematikusok közül tudományos rendezvényeire.

Csillagászaink aktívan részt vesznek a NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓ tevékenységében; többen tagjai az UNIÓnak és a VÁLTOZÓCSILLAG SZEKCIÓnak is. A hazai csillagászati kutatások elismerését jelenti az UNIÓ részéről, hogy a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETet bízták meg az INFORMATION BULLETIN ON VARIABLE STARS című nemzetközi kiadvány elkészítésével.

Megfelelő kapcsolat alakult ki a kiküldetések terén az ORSZÁGOS ATOMENERGIA BIZOTTSÁGGal, és ennek többek között az volt az eredménye, hogy az Akadémia, ill. a III. Osztály kiküldöttei részt vettek csaknem minden, számukra jelentős dubnai tudományos rendezvényen. Az Osztályhoz tartozó kutatók közül többen dolgoznak jelenleg is Dubnában, és több tudományos munkatárs kiküldetése folyamatban van.

VIII.

Rendezvények

Az elmúlt 15 évben tartott tudományos rendezvények jegyzékét a beszámoló melléklete tartalmazza. Ezen időszakban az Osztály önállóan, illetőleg a BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULATtal vagy az EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULATtal közösen 30 matematikai, 34 fizikai és 1 csillagászati tárgykörű ülésszakot rendezett. Ezek megrendezésével az Osztálynak az volt a célja, hogy kutatóinak alkalmat nyújtson arra, hogy néhány napot zavartalanul a folyamatban levő tudományos kutatások megvitatásának szentelhessenek. A rendezvényeken nemcsak befejezett eredmények, hanem folyamatban levő kutatások ismertetésére, megvitatására és megoldatlan problémák kitűzésére is alkalom nyílott.

Megállapítható, hogy rendezvényeink többsége igen eredményes volt.

Egyik kiemelkedő rendezvény volt az 1960-ban Budapesten tartott *II. Magyar Matematikai Kongresszus.* Célkitűzései a következők voltak: méltó formában megemlékezni BOLYAI JÁNOS halálának 100. évfordulójáról, képet adni a magyar matematika 10 éves fejlődéséről és kiszélesíteni a magyar matematikusok nemzetközi kapcsolatait. A kongresszuson — amely 10 szekcióban működött — 409 hazai és 219 külföldi matematikus vett részt.

Összehasonlítva az *I. Magyar Matematikai Kongresszus*sal, a következő számokat érdemes megjegyezni:

Az *I. Magyar Matematikai Kongresszus*on 5 szekcióban 63 előadás (36 magyar és 27 külföldi előadó), a *II. Magyar Matematikai Kongresszus*on pedig 10 szekció keretében 309 előadás (130 magyar és 179 külföldi előadó) hangzott el. Megemlítjük, hogy a II. Kongresszus olyan fontos témakörökkel is foglalkozott, mint pl. az elektronikus számológépek, a matematika alkalmazásai, közelebbről annak közgazdasági alkalmazásai, a matematika oktatása és története.

Kiemelendőnek tartjuk a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET által az 1963/64. években tartott *UNESCO matematikai tanfolyamot,* amelyet az Intézet az UNESCO felkérésére a fejlődő ázsiai, afrikai és délamerikai országok szakembereinek továbbképzése céljából tartott.

Az 1963. évre esett az Akadémia eddigi legnagyobb méretű tudományos rendezvénye, a *VII. Európai Molekula Spektroszkópiai Kongresszus* is, amelynek szervezési munkáját az Osztály végezte. A kongresszuson, amelyet a IUPAP felkérésére rendeztünk meg — közel 500 külföldi vett részt. Ez volt az első eset, hogy a IUPAP a 2 évenként rendszeresen tartott kongresszusát szocialista országban rendezte meg.

A NEMZETKÖZI MATEMATIKAI UNIÓ felkérésére és támogatásával 1963-ban nemzetközi kollokviumot rendeztünk az *Abel-csoportok* témakörben. Itt említjük meg, hogy a IUPAP hozzájárulásával 1966-ban Budapesten az Osztály *Nemzetközi Lumineszcens Kongresszust* fog szervezni.

IX.

A kutatási eredmények gyakorlati alkalmazása

Sokáig nem volt egyértelmű álláspont kutatóink körében azzal kapcsolatban, hogy alapkutatásokat folytató intézményeinknek mi a feladata kutatási eredményeik sorsát illetően. Ezért határozta el az 1963. évi akadémiai közgyűlés azt, hogy az intézetek vezetőinek kötelességévé kell tenni az olyan eredmények számontartását, amelyek felhasználásra alkalmasak, és hogy azok alkalmazása érdekében a vezetők tegyék meg a szükséges lépéseket. A szocialista építés általános érdeke, hogy e tekintetben még tovább menjünk. Nem olyan irányban, hogy az alapkutatásokat elhanyagolva valamilyen prakticista kutatási programot állítsunk össze, hanem a felé kell haladnunk, hogy általában tekintsük aladémiai feladatnak alapkutatásaink szervezett kapcsolatának erősítését az alkalmazott és fejlesztési kutatásokkal és magával a gyakorlattal.

E tekintetben az utóbbi években intézeteinkben már születtek eredmények. Ki kell emelni ilyen vonatkozásban a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETet, a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTot, a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETet és az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETet. A részleteket illetően a mellékletre utalunk.

Meg kell azonban említenünk azt is, hogy az alapkutatásnak gyakorlati bevezetésre ajánlott eredményei nincsenek mindig e célra eléggé kidolgozva, továbbá — ami sokkal gyakoribb —, hogy az üzemek idegenkednek a kutatások új eredményeinek alkalmazásától.

X.

A kutatások anyagi feltételei. A kutatásokat gátló tényezők

Az anyagi feltételek bővítése együtt járt egész tudománypolitikánk előrehaladásával. Érthető azonban az is, hogy az igények a rendelkezésre álló kereteket meghaladták, és állandóan az elosztás gondjaival kellett küzdenünk. Meg kell mondanunk, hogy műszerellátottságunk, különösen import műszerekben, aggasztóan szűkös, ami több területen már a súlyos lemaradás veszélyét idézi fel. Az Osztállyal szemben jogosan támasztott alapkutatási igényeket a jelenlegi kutatóintézeti hálózat a felszereltség hiányosságai és az intézeti hálózat bővítésének elmaradása miatt alig képes kielégíteni. Igényeinket jól ismerjük, (hogy a jelenlegi intézetek milyen további felszerelésére, milyen újabb intézetek létesítésére volna szükség) reális intézetfejlesztési terv készítéséhez azonban ez nem elegendő, hanem tudnunk kellene azt is, hogy milyen mértékű beruházásra számíthatunk a következő időszakokban. Az Akadémiának mindent el kell követnie, hogy a műszer- és építési beruházások kereteinek megállapítása ne egyoldalúan, a közvetlen termelési érdekek túlzott előtérbe állításával, hanem a jövő tartós fejlődését elősegítő módon történjék.

Az elmúlt másfél évtizedben létesültek olyan kutatási intézmények az Osztály keretében, amelyek ma már kifejlődtek, és hozzávetőleg elérték optimális nagyságukat. Ezeket a jövőben elsősorban minőségileg kell fejleszteni felszerelés tekintetében. Létesültek továbbá olyan kutatóintézmények, amelyek még befejezetlenek; ezeket a minőségi fejlesztés mellett mennyiségileg is tovább kell fejleszteni optimális munkaterületi terjedelmük eléréséig.

XI.

Az Osztályvezetőség ebben az évben sem kívánta túlságosan hosszú szóbeli beszámolóval igénybe venni az Osztályülés idejét, ezért az Osztálynak és az intézeteknek a felszabadulás óta, ill. az Akadémia újjászervezése óta folytatott tevékenységéről, a kutatómunka eredményeiről szóló részletesebb beszámolót mellékletként írásban küldte el a jelenlevőknek. Az Osztályülést az Osztályvezetőség főleg arra kívánta felhasználni, hogy a figyelmet a tudománypolitikai és tudományszervezési kérdésekre irányítsa, annak érdekében, hogy ezzel is elősegítse az Osztály előtt álló sokrétű, fontos feladatok minél eredményesebb megoldását.

MELLÉKLET

I. Bevezetés

Az Akadémia átszervezésekor a kémia és egyes geo-területek leválasztása után 1951-ben alakult ki a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának mai szervezete. Az Osztályra elsősorban az a feladat hárult, hogy összefogja és intézmények létrehozásával kiszélesítse a matematikai, fizikai és csillagászati kutatásokat, meghatározza a kutatásokkal kapcsolatos főbb célkitűzéseket és biztosítsa a tudományos kutatók nevelésének lehetőségeit. E feladatok megvalósítása érdekében került sor 1950-ben az Alkalmazott Matematikai Intézet és a Központi Fizikai Kutató Intézet megalakítására. Az Alkalmazott Matematikai Intézet létrehozásával az Osztály biztosítani kívánta az alkalmazott matematikai tudományok művelését és a matematika eredményeinek a termelésben való alkalmazását. A Központi Fizikai Kutató Intézet megalakításának célja az volt, hogy az addig szétszórtan, egyetemi tanszékeken folyó fizikai kutatásokat központosítsa és a korszerű kísérleti fizikai módszerek, eljárások kifejlesztésével új alapokat és lehetőségeket biztosítson a hazai fizikai kutatások számára.

Az 1929-ben létesített és a Közoktatásügyi Minisztériumhoz tartozó Csillagvizsgáló Intézetet az Akadémia 1951-ben átvette és a III. Osztály irányítása alá helyezte. 1954-ben — leválasztva a Központi Fizikai Kutató Intézet Elméleti Fizikai Osztályát — az Osztály létrehozta az Elméleti Fizikai Kutató Csoportot. Ugyancsak 1954-ben — a debreceni Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében kialakult magfizikai iskolára alapítva — megalakult az Atommag Kutató Intézet.

1956-ban műszaki kibernetikai kutatások megindítására az Osztály Kibernetikai Kutató Csoportot létesített. Időközben azonban tisztázódott, hogy a Csoportban a műszaki kibernetikai kutatások folytatására a szükséges feltételek nincsenek meg, ugyanakkor rendkívül nagy szükség mutatkozott a korszerű számítástechnika alkalmazásával kapcsolatos kutatások megindítására. Ezért az Osztály a Csoportot ilyen jellegű feladatok elvégzésére 1960-ban Számítástechnikai Központtá szervezte át.

A Csillagvizsgáló Intézet Napfizikai Osztályát az Osztály 1958-ban Debrecenbe helyezte és ott ebből a részlegből önálló Napfizikai Obszervatóriumot létesített.

Az Osztály 1951—1960-ig 17 egyetemi intézetben, ill. tanszéken folytatott kutatómunkát részesített anyagi és részben személyi támogatásban. 1960-ban az Osztály elhatározta, hogy ezt az anyagi és személyi támogatást koncentrálja. Ennek megfelelően 1960-ban 11 egyetemi intézet, ill. tanszék támogatását — közös megállapodás alapján — átadta a Művelődésügyi Minisztériumnak és egyidejűleg 4 egyetemi fizikai intézetben akadémiai tanszéki kutatócsoportot létesített, továbbá megtartotta a budapesti és a szegedi Tudományegyetemeken levő matematikai intézetek anyagi támogatását. 1959-ben közös megállapodással a Központi Fizikai Kutató Intézet kettős felügyelet alá került azáltal, hogy ezen idő óta a személyi és gazdasági ügyekben a felügyeletet az Országos Atomenergia Bizottság, a tudományos irányítást pedig a Magyar Tudományos Akadémia és az Országos Atomenergia Bizottság együttesen látja el.

Az Osztály nagy gondot fordított arra, hogy a hozzá tartozó intézmények feladatköre megfelelőképpen alakuljon ki. Ennek a gondoskodásnak az eredménye, hogy az Atommag Kutató Intézet és a Számítástechnikai Központ feladatköre is az elmúlt évek során megfelelőképpen alakult ki. Az Osztály gondot fordított arra is, hogy a meglevő intézmények az igényeknek és lehetőségeknek megfelelően fejlődjenek. Így pl. a rendszeres személyi és költségvetési fejlesztésen túlmenően jelentősen fejlődött a csillagászati kutatás azáltal, hogy a Mátrában mintegy 16 millió Ft-os beruházással egy új hegyi obszervatórium létesítésére került sor, amely Közép-Európa legjelentősebb obszervatóriumának tekinthető.

Az Osztály fontos feladatának tekintette a tudományos eredmények publicitásának biztosítását. Ennek érdekében 1950-ben az Acta Mathematica és az Acta Physica, majd az Osztály Közleményei mellett 1953-tól a Magyar Fizikai Folyóirat megindítására került sor. Actáink nemzetközileg elismert folyóiratokká váltak. Az elmúlt 15 év alatt jelentős fejlődést ért el az Osztály a könyvkiadás területén is, különösen a matematikai művek vonatkozásában.

Az Akadémia újjászervezése óta eltelt 15 év alatt végzett munkáról a továbbiakban intézményenként adunk áttekintést.

II. Az Osztályhoz tartozó intézmények

1. Matematikai Kutató Intézet

A magyar matematikusok már a felszabadulás előtt jelentős és nemzetközileg elismert eredményeket értek el, kialakult a magyar matematikai iskola. A fasizmus és a háború igen nagy számban szedte áldozatait a matematikusok soraiból, a felszabadulás mégis jól képzett matematikus gárdát talált Magyarországon.

Így vált lehetővé az Akadémia 1949-ben történt átszervezése nyomán, a kutatóintézeti hálózat kiépítése során, hogy az elsők között alakuljon meg 1950-ben az *MTA Alkalmazott Matematikai Intézete.* Korábban a magyar ipar és általában az egész magyar társadalom elmaradottsága miatt nem igényelte jelentős mértékben a matematika felhasználását; az új viszonyok között pedig az intézet létrehozása volt a matematikusok és az Akadémia részéről az első intézményes szervezett kísérlet a matematika alkalmazásainak művelésére, módszereinek elterjesztésére és népszerűsítésére, valamint tényleges gyakorlati felhasználására. Ez a törekvés a dolog természeténél fogva csak olyan mértékben járhatott sikerrel, amennyiben a hazai tudományos élet és a népgazdaság érett volt annak befogadására. A termelés, az elosztás, a közegészségügy, a közigazgatás, a tudományos és kulturális élet fejlődése, a matematika alkalmazásai iránt támasztott igények alakulása szabta meg a lehetőségek határait.

Az intézet tevékenysége eleinte főként olyan problémák megoldására irányult, amelyek ismert matematikai apparátus felhasználásával voltak megoldhatók. A fejlődés során ekkor előtérbe került az a vélemény, hogy az intézet főfeladata az alapkutatások terén van, és az alkalmazások vonatkozásában is csak ez teszi lehetővé a magasabb színvonalú és eredményes munkát. Új helyzetet teremtett az is, hogy korunkban a matematika számos elvont és régebben a gyakorlattal kapcsolatban nem álló ága válik az alkalmazások eszközévé és hogy a matematika alkalmazásainak területe nagymértékben kibővült.

E megfontolások alapján alakult ki az a nézet, hogy az intézetben a korábbinál tágabb körben és szélesebb alapokon kell az alapkutatásokat folytatni és otthont kell biztosítani az elméleti és gyakorlati szempontból fontos kutatásoknak egyaránt. Ettől az elgondolástól vezetve szervezte át az Akadémia az intézetet 1955-ben az *MTA Matematikai Kutató Intézetévé*. Az intézet korábbi feladatkörének kibővítésével a Szovjetunió és a népi demokráciák akadémiáinak példáját is követtük, hiszen ezekben az országokban már a kezdetben is matematikai kutatóintézetek alakultak, kifejezve ezáltal az elmélet és a gyakorlat szoros kapcsolatát, továbbá azt a helyes felfogást, hogy a matematikai alapkutatásoknak mindenekelőtt akadémiai kutatóintézetekben kell folyniok.

Az 1955 óta eltelt csaknem 10 esztendő az átszervezés helyességét igazolta. Az intézet fejlődését természetesen nagymértékben befolyásolta gazdasági és társadalmi életünk kedvező alakulása, ami új lehetőségeket nyitott meg a matematikai kutatás terén is, és életre hívott számos új, a matematika alkalmazásai és elméleti művelése szempontjából fontos intézményt, vagy intézmények által foglalkoztatott matematikai csoportot. Ez a körülmény elősegítette és kiegészítette az intézet munkáját és ma egészséges munkamegosztás kezd kialakulni a matematikai kutatással és a matematika alkalmazásaival foglalkozó különböző intézmények és szervek között. Ily módon az MTA Matematikai Kutató Intézetének az alkalmazásokat illetően elsősorban az elvi jelentőségű, komoly matematikai nehézségek leküzdését igénylő problémákkal kell foglalkoznia.

Az elméleti kutatások területén az intézetben a matematika számos olyan ágának művelése honosodott meg, olyan irányokban alakultak ki aktív munkaközösségek, sőt iskolák, amelyekkel a felszabadulás előtt vagy egyáltalán nem, vagy csak alig foglalkoztak a magyar matematikusok. Emellett az intézet a magyar matematika hagyományos, sikerekben gazdag fejezeteit is igyekezett művelni és ennek során ezek a fejezetek is új, elismerést keltő eredményekkel gyarapodtak.

Tovább fejlődtek a Fejér Lipót által meghonosított konstruktív és komplex függvénytani kutatások, valamint a Riesz Frigyes nyomdokait követő valós függvénytani és funkcionálanalízis területére eső vizsgálatok. A differenciálegyenletek elméletében a felszabadulás előtt nem alakult ki számottevő magyar iskola. Az intézet erőfeszítéseket tett a helyzet felszámolására. A differenciálegyenletek matrixelméleti módszerekkel való megoldásai, továbbá a differenciálegyenletek osztályán elért egyes eredmények új színfolttal gazdagították a hazai matematikai kutatásokat. Ehhez járultak újabban a differenciálegyenleteknek operátorszámítás útján történő megoldásában elért eredmények. A klasszikus geometriai vizsgálatokat differenciálgeometriai és diszkrét geometriai kutatások egészítették ki. Már a háború előtt megkezdődött, de csak a felszabadulás után érte el igazi virágzását az analitikus számelmélet és a gráfelmélet művelése. Új irányzatok a magyar matematikai életben — bár egy-egy jeles képviselőjük a múltban is akadt — a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika, amelyek ugrásszerű hazai kifejlődésében az intézet jelentős kezdeményező és irányító szerepet töltött és tölt be. A matematikának több új ága hazánkban csak a felszabadulás után lépett a kibontakozás útjára. Ilyenek pl. a biometria és az operációkutatás, amelyek meghonosításában az intézet kezdeményezéseivel és munkájával hasznos eredményeket ért el. Elismerésre méltó eredmények születtek az algebrai kutatásokban. Megindultak a kutatások a matematikai logika és a matematikai gépek területén is, bár még itt sok a tennivaló. Hasonló fontos és kifejlesztést igényel a numerikus analízis, amellyel eddig számottevően nem foglalkoztak. Sikereket értek el az intézetben a topológiai vizsgálatok területén is, de kevés az e problémakörrel foglalkozó kutatók száma. Említésre méltóak még az intézetben folyó matematikatörténeti kutatások, továbbá a matematika oktatására vonatkozó vizsgálatok.

Az elmondottak illusztrálására néhány adat az intézet fejlődéséről:

1964-ben az intézetben 11 osztály működött: 1. *Valószínűségszámítási osztály*, 2. *Matematikai statisztikai osztály*, 3. *Biometriai osztály*, 4. *Numerikus, grafikus és gépi módszerek osztálya*, 5. *Differenciálegyenletek osztálya*, 6. *Valós függvénytani osztály*, 7. *Komplex függvénytani osztály*, 8. *Funkcionálanalízis osztály*, 9. *Matematikai logika és alkalmazásai osztály*, 10. *Algebrai osztály*, 11. *Geometriai osztály*. Részben az osztályok keretében, részben ezen kereteken kívül az alábbi 6 csoport működött: a) *A matematika közgazdasági alkalmazásainak csoportja*, b) *Topológiai csoport*, c) *Konstruktív függvénytani csoport*, d) *Algebrai osztály budapesti csoportja*, e) *Differenciálgeometriai csoport*, f) *Didaktikai csoport*.

1964-ben az intézet tudományos munkatársai közül 7 akadémikus, 2 levelező tag, 9 a tudományok doktora és 23 kandidátus volt. A 7 akadémikus osztályvezetői tisztséget tölt be, négy osztály vezetője kandidátus. Az említett 6 csoport vezetői közül 1 levelező tag, 4 a tudományok doktcra, 1 kandidátus. Besorolás szerint az intézet kutatói közül 10 főmunkatárs, 40 munkatárs, 5 segédmunkatárs és 1 tudományos gyakornok.

Az intézet a megalakulása óta eltelt 15 év alatt különböző szervek és intézmények részére oldott meg problémákat, ezek közül 19 akadémiai, 77 ipari vagy minisztériumi kutatóintézet, 68 egyetemi tanszék, laboratórium, klinika, 21 tervezőintézet, 14 kórház, 7 tudományos egyesület ill. könyvtár, 9 tudományos folyóirat szerkesztősége, 24 főhatóság, 45 hivatal és 94 üzem volt. A felsorolt intézmények közül többen ismételten is fordultak az intézethez megbízásaikkal.

Az intézet kutatóinak eredményei rendszerint tudományos publikációk, könyvek formájában jelentek meg. E dolgozatok egy részét az *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*ben tették közzé magyar nyelven 1952—53—54-ben három kötetben, majd 1956-tól 1964-ig 9 kötet jelent meg az *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* címen; egy-egy kötet 4 füzetből áll, amelyek közül 1960 óta 3 idegen, egy pedig magyar nyelvű. A magyar nyelvű szám a matematika alkalmazásaival közvetlenül kapcsolatos eredményeket ismerteti. 15 év alatt az intézet közleményeiben megjelent 430 cikk. Ebből 304 cikket az intézet munkatársai írtak, 49-et magyar és 8-at külföldi társszerzővel. Ezeken kívül 80 magyar (nem intézeti kutató) és 46 külföldi szerző dolgozata jelent meg az intézeti közleményekben.

Más matematikai folyóiratokban az intézet munkatársai 889 dolgozatot publikáltak; ebben a számban nem szerepelnek a tankönyvek, népszerűsítő művek stb. Így az intézet munkatársai összesen 1192 tudományos dolgozatot írtak az eltelt 15 év alatt.

Az intézet Közleményeiben, ill. az intézet munkatársai által írt, máshol publikált dolgozatok megoszlása a következő: függvény-, differenciál-, integrálegyenletek, integráltranszformációk 122; matematikai fizika, műszaki matematika 62; valószínűségszámítás, matematikai statisztika, biometria 393; numerikus és grafikus módszerek 41; valós és konstruktív függvénytan, végtelen sorok 158; mátrixelmélet 65; halmazelmélet 6; számelmélet, aritmetika, kombinatorika 84; komplex függvénytan 50; geometria és gráfelmélet 94; funkcionálanalízis 56; algebra 120; operációkutatás, közgazdasági matematika 31; matematikai logika, matematikai nyelvészet 37; topológia 16; matematika története 25.

Az intézet munkatársainak önálló tudományos eredményeit tartalmazó publikációk száma:

1950—1954-ig	211	
1955—1959-ig	442	
1960—1964-ig	539	
összesen	1192	publikáció

Az intézet munkatársai az elmúlt 15 évben 22 könyvet írtak. Ebből 7 idegen nyelvű tudományos monográfia (két munka három, egy munka két, a többi egy idegen nyelven jelent meg), összesen 3569 oldal terjedelemben; 4 mű idegen nyelven írott tankönyv, 1642 oldal terjedelemben; 11 munka magyar nyelvű tankönyv, 4314 oldal terjedelemben.

Az intézeti Közleményekért cserébe 1964-ben 212 féle folyóiratot, periodikus kiadványt stb. kapott az intézet.

Az intézet munkájának egyik fő segítője a könyvtár, amely a háború utáni modern kiadványok tekintetében igen jól ellátottnak mondható, viszont számos nagy értékű régebbi mű és folyóiratsorozat hiányzik, aminek pótlása csak fokozatosan történhet meg. A könyvtár jelenlegi állománya kereken 25 000 kötet, amelyből 14 000 könyv és 11 000 folyóiratkötet. A könyvtár állandó kölcsönzőinek száma az intézet munkatársaival együtt megközelíti a 300-at.

Az intézet tudományos munkája mellett a matematikai káderek képzésével is foglalkozott és engedett át más szerveknek az intézetben gyakorlatra szert tett matematikusokat. Fennállása óta az intézet állományából 12 fő került az egyetemi oktatásba, 5 a középiskolai oktatásba, 12 üzembe, ill. hivatalba, 15 pedig kutatóintézetbe került át.

Az intézet kutatóinak munkája számos formában nyert elismerést, amelyek közül kettőt kell kiemelni: az egyik az, hogy az intézet munkatársai évről évre egyre több külföldi meghívást kapnak külföldi tudományos rendezvényekre (1964-ben pl. 118 előadást tartottak az intézet kutatói külföldön); a másik, hogy több egyéb kitüntetés mellett az intézet munkatársai közül 13-at tüntettek ki Kossuth-díjjal, 5-öt két alkalommal is. Az intézet létszáma 92 fő, amelyből tudományos dolgozó 72 fő.

2. Számítástechnikai Központ

A Központ 1956-ban alakult *Kibernetikai Kutató Csoport* néven. Alakuláskor a Csoport profilja műszaki-kibernetikai kutatások végzése lett volna. A munka az M-3 nevű elektronikus számológép megépítésével indult meg, amelyet 1959-ben helyeztek üzembe. Ez volt az első elektronikus számológép az országban. Rendeltetése ennek megfelelően az volt, hogy segítségével elterjesszék, propagálják az elektronikus számológépen alapuló modern számítástechnikát. Az eltelt öt év alatt több mint száz megbízó részére végeztek számításokat, sok feladattípust több éven át rendszeresen számoltak. (Pl. Magyar Optikai Művek: lencserendszerek tervezése, Országos Tervhivatal: sakktábla-mérleg, optimális tervszámítások, Országos Árhivatal: ártípusszámítások stb.). Amikor az országban megjelentek más, megbízhatóbb és egyszerűbben programozható elektronikus számológépek is, a külső megbízók száma fokozatosan csökkent.

Nagy szerepe volt az M-3 gépnek a szakemberek képzésében is, így a Központban kiképzett szakemberek átadásával is segítették a megalakuló számítástechnikai központokat.

Időközben a Központ feladatköre megváltozott, 1960-ban az Osztály a Kibernetikai Kutató Csoportot *Számítástechnikai Központtá* szervezte át és feladatául a korszerű számítástechnika alkalmazásával kapcsolatos kutatásokat, valamint az Akadémiához tartozó intézmények számítástechnikai igényének kielégítését tűzte ki. Ennek megfelelően a Központ struktúrájának fokozatos átalakítására került sor; ezen a területen több gátló tényező miatt a kívánt struktúra csak 1964-ben alakult ki.

A Központ főbb célkitűzései: konkrét feladatok modelljének elkészítésével, megoldási eljárások kidolgozásával, gépi programok elkészítésével és a megfelelő számítások elvégzésével támogatni az akadémiai kutatóintézeteket és egy-két ipari, gazdasági intézményt, s ezen kívül kutatásokat végezni a numerikus matematika, a számítástechnika és a matematikai kibernetika területén.

A Központnak eddig nem sikerült a felmerült igényeket kielégítő, korszerű számítógépet kapnia, ami jelentősen csökkenti a munka hatékonyságát. Az M-3 gép ez évben a szegedi József Attila Tudományegyetemhez kerül át és az új, már most elavult Ural-2 gépének a felszerelése most van folyamatban.

A munka nagy késéssel indult meg, kb. 10 éves lemaradást kellett felszámolnia a Központnak; emellett az erők — összehasonlítva a nagy külföldi kutatócsoportokkal — csak arra elegendők, hogy néhány kisebb területen önálló kutatást folytassanak. Ennek megfelelően a következő, szorosan a jelenlegi és későbbi gyakorlati problémákhoz tartozó területeken indult meg a Központban a munka:

a) Egy csoport a formális gépi nyelvekkel, a programozás automatizálásával foglalkozik. Részt vesznek a baráti országok tudományos akadémiáinak együttműködése keretében kidolgozandó formális gépi nyelv megalkotásában.

b) Megindult és növekvő intenzitással folyik a gépi fordítási munkák előkészítése, ennek keretében kutatások folynak a matematikai nyelvészet egyes területein (grammatika-elmélet, az orosz és magyar nyelv strukturális elemzése a gépi fordítás szempontjából, fordító algoritmusok szerkesztése stb.). E területen külföldi visszhangot is keltett eredmények születtek a Központban.

c) A gazdasági alkalmazások területén egyfelől lineáris programozási modellek szerkesztése, másfelől megoldási eljárások kidolgozása folyik. A Központ irányításával indult meg egy nagy jelentőségű munka: a teljes népgazdasági terv optimalizálási módszerének kidolgozása és a feladat számítása. Eredményes kutatások folynak az ügyvitelgépesítés módszereinek kidolgozása területén is.

d) Megindult az oktatás gépesítésével kapcsolatos kutatómunka is, amelynek keretében egy egyszerűbb típusú programozott oktatógép készül a Központban.

e) A numerikus módszerek területén nagyméretű lineáris feladatok, közönséges és parciális differenciálegyenletek, sajátérték problémák megoldásának új, az eddigieknél hatékonyabb és jobb hibastatisztikájú módszerek keresésével foglalkoznak. Megkezdték a munkát az optimális numerikus módszerek kiválasztásának elvi megalapozásával kapcsolatban és foglalkoznak az egyre fontosabbá váló numerikus stabilitási problémákkal is.

f) Az automaták elmélete és konstrukciója területén a redukált automaták elektronikus számológépekkel történő tervezésének elvi és gyakorlati kérdéseivel foglalkoznak a Központban. A KGST együttműködés keretében megindultak a kutatások a diszkrét és folytonos automaták egységes elméletének és a sztochasztikus automaták elméletének kidolgozására. Együttműködik a Központ az *MTA Automatizálási Kutató Intézeté*vel a tanuló-, illetőleg szituáció-felismerő automatákkal kapcsolatos kutatásokban és az optimális folyamatok elmélete gyakorlati módszereinek kifejlesztésében. Ugyancsak az Automatizálási Kutató Intézettel együttműködve indultak meg a vizsgálatok a nagy rendszerek megbízhatósági problémáival kapcsolatos területen is.

A Központ munkatársainak tollából 1956—1959-ig 13, 1960—64-ig pedig 60 önálló eredményeket tartalmazó publikáció jelent meg. A Központ munkatársai 1956—1964-ig 11 tudományos, illetőleg tankönyvet írtak 220 ív terjedelemben.

3. Központi Fizikai Kutató Intézet

Az intézet eddig fejlődése során (1950—1958) tisztán alapkutatással foglalkozó fizikai kutatóintézetből az atomenergia békés felhasználását célzó kutatásokkal foglalkozó központtá vált (1958—1963), amelyben sokrétű alap és alkalmazott kutatási munka folyik. Az intézet létrehozását követő időkben az elsődleges feladatot

a) a tudományos kutatásban járatos szakemberek kiképzése;
b) a színvonalas kutatáshoz szükséges műszaki alapfeltételek megteremtése és
c) a korszerű kutatás alapjainak lerakása

jelentette.

Az 1950—1955-ig terjedő időszakban lényegében az első két célkitűzés elérésére koncentrálta az intézet az erőket. Ennek eredményeként 1955-ben már rendelkeztek azzal a kezdeti felkészültséggel, hogy hozzákezdhettek a Szovjetunió segítségével a harmadik célkitűzés megvalósításához.

Az intézet egyes kutatási irányai (a fizika egyes alapkérdéseinek elméleti és kísérleti vizsgálata, a kozmikus sugárzási kutatások) már az első periódusban (1950—1955) kialakultak és mind a szakemberképzésnek, mind pedig a korszerű kísérleti technika megteremtésének alapjául szolgáltak. A magfizikai kutatások fejlesztésére viszonylag korán gondoltak az intézetben, mivel a magfizikai kutatások fontosságát az atomkutatáson belül lényegében időben felismerték, azonban jelentős fejlődés csak 1955 után — a Szovjetunió által nyújtott segítség következtében — bontakozott ki. A szovjet segítséggel felépített kutatóreaktor nemcsak a magfizikai kutatások fejlődésének nyitott utat, hanem egy jóval általánosabb műszaki fejlődés tudományos alapjainak lerakását is elősegítette. A kutatóreaktor adta új lehetőség az intézetben már korábban megindult szilárdtestfizikai kutatások fejlődési irányát a magfizikai és atomfizikai módszerek alkalmazása felé terelte; felvetette a szükségességét a hazai magkémiai kutatások (sugárzó izotópok előállítása) megindításának és megteremtette az alapokat a reaktorkutatás számára is.

Az 1958—1959-ig terjedő időben megtörténtek az előkészületek a fentiekben vázolt kutatási tevékenység megkezdéséhez. A kísérleti tevékenység zöme ebben az időszakban az alapkutatások területére koncentrálódott, mivel a kialakulás időszakában nem látszott célszerűnek a költségesebb berendezéseket és nagyobb ipari hátteret igénylő alkalmazott kutatási tevékenység elkezdése.

Az 1959—1963-ig terjedő időben az intézet egyes szakterületein már túljutott a reprodukció színvonalán, önálló, új tudományos eredményeket ért el, amelyek zöme az első időben kialakult adottságok folytán ugyancsak az alapkutatás területén jelentkezett.

Legfontosabb eredmények

A fizika egyes alapkérdéseinek elméleti és kísérleti vizsgálata terén jelentős eredmények születtek a fény mikroszerkezetével kapcsolatban. Ezeket az eredményeket külföldi és belföldi tankönyvekben egyaránt idézik. A kozmikus sugárzási vizsgálatok értékes megállapításokkal gazdagították a nagyenergiájú, magkölcsönhatás természetére vonatkozó ismereteket, egyéb vonatkozásai pedig asztrofizikai szempontból mutatkoztak értékesnek. A nagyenergiájú részecskék fizikája terén a *dubnai Egyesített Atomkutató Intézet*tel való együttműködésben értékes eredmények születtek az elemi részecskék belső szerkezetének vizsgálata területén.

Ezeknek a tisztán alapkutatásnak minősülő vizsgálatoknak a jelentősége gyakorlati szempontból is figyelemre méltó, mert mind az atomkutatásban résztvevő szakemberek kiképzésében, mind pedig a mérőberendezések fejlesztésében döntő szerepet játszottak.

A magfizikai kutatások területén értékes eredmények születtek egyes magreakciók mechanizmusának tisztázásával kapcsolatban. Szembetűnő módon jelentkezett az alapvető magfizikai kutatásoknak az a hatása, hogy rendkívül serkentőleg hatott a korszerű mérőberendezések (nukleáris műszerek) fejlesztésének megindítására és hatásosan alkalmazható módszereket szolgáltatott más tudományágak (reaktorkutatás, szilárdtestfizika, magkémia stb.) számára.

A szilárdtestfizikai kutatások terén figyelemre méltó eredmények születtek a mágneses anyagok szerkezetével, valamint különböző ötvözetek fizikai tulajdonságait meghatározó tényezők felismerésével kapcsolatban. Ezek a vizsgálatok egyre jobban kihasználják az atomkutatás nyújtotta módszertani lehetőségeket és több vonatkozásban gyakorlati szempontból is hasznosnak bizonyultak.

1959-től kezdődően jelentkeztek a — lényegében alkalmazott kutatásnak minősülő — reaktorkutatás, magkémiai kutatás és műszerkutatás konkrét eredményei is.

A reaktorkutatás területén az adottságok és a helyzet figyelembevételével az intézet két alapvető célt tűzött ki:

a) reaktorszakismeretekben jártas szakemberek kiképzése;

b) a gyakorlat számára a hazai viszonyok között szükséges kutatási bázis létrehozása.

Eredményeket értek el az intézetben a reaktorok tervezéséhez szükséges reaktorfizikai paraméterek meghatározásának, a sokszorozó rendszerek vizsgálatának, a hűtőközegek hőtechnikai és áramlástani tanulmányozásának területén. Kiemelkedők azok az elméleti és kísérleti eredmények, amelyek a neutron-láncreakciók valószínűségi vizsgálatával kapcsolatosak. Eredményeket értek el továbbá a hazai uránércek kémiai vizsgálatában és segítséget nyújtottak az ipar számára uránkémiai módszerek kidolgozásában. Módszereket dolgoztak ki reaktortisztaságú uránvegyületek hazai érckoncentrátumból történő előállítására és kifejlesztették a kísérleti fűtőelemek céljaira alkalmas UO_2 keramikus tabletták előállítási technológiáját.

A 2 MW hőteljesítményű $2 \cdot 10^{13}$ neutron/cm^2 sec termikus fluxusú kutatóreaktor közel 5 éve van üzemben. A reaktor magfizikai, magkémiai, szilárdtestfizikai, sugárhatáskémiai kutatások fontos centrumává vált és egyre fokozódó mértékű izotópgyártási programot teljesít. A besugárzások számának növekedésére jellemző adat, hogy 1960-ban mintegy 200, 1963-ban már több mint 1000 besugárzásra került sor.

A magkémiai kutatásoknak hazánkban nemigen voltak tradíciói, ezért különösen értékesnek mondhatók azok az eredmények, amelyek lehetővé tették a hazai izotóptermelés megindítását. Számos új izotópelőállítási módszert dolgoztak ki az intézetben, eredményeiket külföldön is számos elismerés illeti. Tudományos szempontból figyelemre méltóak azok az eredmények, amelyeket az izotópeffektusok tanulmányozásával kapcsolatban értek el.

A kémiai analitikai vizsgálatok során összegyült tapasztalatok alapján megteremtődtek egy országos aktivációs analitikai kutatási és szolgáltatási központ megalakításának feltételei. A neutronaktivációs módszer alkalmazására a hazai félvezetőgyártás, valamint a nagytisztaságú fémek előállítása területén értékes elemző eljárásnak bizonyul.

Az intézet tudományos teljesítményének megítéléséhez feltétlenül hozzátartozik a nukleáris regisztráló-, mérő-, és adatfeldolgozó-műszerek kifejlesztésével kapcsolatos tudományos tevékenység is. Ezen a területen az intézet helyzete a baráti országokéhoz viszonyítva kifejezetten jónak mondható és ez a jó helyzet azzal magyarázható, hogy a nukleáris műszerkutatás szervesen a tudományos kutatás igényei alapján bontakozott ki. Az elektronikus műszerfejlesztésre és gyártásra kettős feladat hárult:

a) a magfizikai kutatás megfelelő műszerekkel történő ellátásának biztosítása; másrészt

b) törekedjék hasznosítani a készülékek megalkotása során végzett fejlesztési munka eredményeit a népgazdaság, az ipar számára.

E feladat megoldása során 1962—1963-ra már kialakult a nukleáris műszerek és mérőrendszerek fejlesztésében korszerű felkészültséggel rendelkező elektronikus kutató és kísérleti gyártó bázis. A kifejlesztett gyártmányok a fizikai kutatás, az izotóptechnika különböző területein, hazai és baráti országok intézeteiben nyertek felhasználást, eleget téve többek között a KGST-n belüli munkamegosztás alapján a sokcsatornás analizátorok fejlesztésében és gyártásában Magyarországra háruló kötelezettségeknek. A hazai és baráti országok intézeteiben üzembe helyezett 128 csatornás csöves analizátor konstrukciós és felhasználói tapasztalataira támaszkodva kifejlesztésre került a korszerű, félvezető elemekből felépített 256 csatornás analizátor-rendszer, amely számos vonatkozásban már nemcsak megközelíti, de el is éri a világszínvonalat.

Ma már minden területen, így az atomkutatás területén is nélkülözhetetlen az alkalmazott és a gépi matematikai módszerek széles körű alkalmazása. Az alkalmazott matematikai módszerek közül az elmúlt évek során különösen a matematikai statisztikában, a valószínűségszámításban és a közelítő számítások területén születtek értékes eredmények. Az intézet rendelkezésére álló egyetlen kisteljesítményű elektronikus számológép (Ural-1) nagy segítséget jelentett a kutatómunka minden területén. A számológépet évek óta maximálisan kihasználják, de ma már messzemenően nem elégíti ki az igényeket. A meglevő kutatási bázis jobb kihasználása érdekében egy új, nagyteljesítményű számológép beszerzése van folyamatban, amelynek segítségével a számítási és adatfeldolgozási feladatokat számos kísérletnél automatizálni lehet.

Az intézetben 1960-ban megalakult a *Sugárvédelmi Osztály.* Az osztály munkája a személyi ellenőrzésre, a munkahelyek időszakos ellenőrzésére, a közterület és az intézet környékének folyamatos vizsgálatára, valamint az izotóptárolás és hulladékkezelés ellátására irányul. Munkájuk eredményeként a laboratóriumok sugárbiztonsága megjavult. Az intézetben a legtöbb veszélyt a nyitott izotópok inkorporációja és a neutronsugárzás jelenti. Ennek megfelelően a sugárvédelmi tudományos tevékenység erre a két területre irányul. 1964 júniusában üzembe helyezték az emberi testből származó radioaktív anyagok közvetlen meghatározására alkalmas egész-test számlálóberendezést.

4. Atommag Kutató Intézet

A felszabadulás után a magfizikai kutatások újult erővel indultak meg Debrecenben az *egyetemi Kísérleti Fizikai Intézet*ben. Ebben az időben főleg a hazai urán feltárásához vezető kőzetradiológiai vizsgálatok folytak és megkezdődött a fundamentális magfizikai munka előfeltételeinek a megteremtése is a magspektroszkópia és a magreakciók területén. A Debrecenben folyó magfizikai kutatásnak az Atommag Kutató Intézet megalakulása adott nagy lendületet. A felszabadulás óta eltelt 20 év alatt Debrecenben részben a már korábban megindult kezdeményezésekre, részben pedig új elgondolásokra támaszkodva kialakult a hazai kísérleti magfizikai kutatás egyik iskolája. Az intézet főfeladata az alacsonyenergiájú kísérleti magfizikai kutatások végzése.

Az intézet fennállásának kezdeti szakaszában az alapvető műszerpark megteremtése mellett a kevés felszereléssel is korszerűen végezhető urán geokémiai migrációjának vizsgálatával foglalkoztak, különös tekintettel az organikus anyagok szerepére. Az első fundamentális magfizikai eredményt a *Wilson*-kamrával végzett He^6 visszalökési kísérletek hozták, amelyek a neutrinó létének közvetett, de szemmel látható bizonyítékát adták.

Intenzív módszeres magfizikai vizsgálatokat folytattak az intézetben a magspektroszkópia területén. Ennek keretében sikerült tisztázni a Po-21 alfa-spektrumának finom-szerkezetét, kiegészítették a Nd-147 és a J-131 magok bomlási sémáját. Meghatározták a Cl-36 és a S-36 másodrendben tiltott bomlásában az elektronbefogást és a pozitron-emittálási viszonyt, eredményesen vizsgálták a belső fékezési sugárzást. E vizsgálatok és az időközben épített vagy beszerzett berendezések révén az intézet lett hazánkban a radioaktív magokon folyó magspektroszkópiai kutatások központja.

Az intézetben az első reakciókra vonatkozó vizsgálatokat a Po-alfa sugaraival a Po preparálási technikával készült pontszerű alfa-forrással, az alfa-részek energia-homogenitását biztosító gömbszimmetrikus geometriával végezték. E technikával végeztek eredményes vizsgálatokat Mg, szeparált Mg-25, Mg-26 és Na-23 céltárgyon. Sikeresen végeztek magvisszalökési kísérleteket és izomerhatáskeresztmetszet-viszony meghatározást. Elvégezték a Be-9 (d, n) B-10 reakció gerjesztési függvényének neutron energia-független módszerrel történt felvételét.

Az intézetben kifejlesztett fotoemulziós technikával végzett vizsgálatok közül kiemelkedik a Po-Be neutronforrás spektrumának pontos meghatározása.

Az utóbbi években a méréstechnika is erőteljesen fejlődésnek indult az intézetben: a nukleáris elektronikában bevezették a nanoszekundomos módszereket, kidolgozták a jelalak diszkriminálását, eredményesen alkalmazzák a félvezető detektorokat, amelyekkel az egyik intézeti csoport Dubnában kiemelkedő eredményeket ért el az alfa-spektroszkópiában.

Az alkalmazott kutatások terén is szép eredmények születtek az intézetben. A humin-savaknak az urán megkötésében játszott szerepének tisztázása az atomiparban alkalmazható eredményhez vezetett és kiderült, hogy a hasadási termékek döntő többsége megkötődik a tőzegpreparátumon. Jelentős volt a radioaktív izotópok orvos-biológiai alkalmazása. Jelenleg is fontos munkát végez az intézet a tömegspektroszkópiai módszereknek a geológiában való alkalmazásával, különösen a kőzetek életkormeghatározásával kapcsolatban.

Az intézet létszáma 115 fő, ebből kutató 30 fő, segédszemélyzet 66 fő. Tudományos fokozattal 8 fő rendelkezik: 1 akadémikus és 7 kandidátus.

Az intézet munkatársai az elmúlt 15 évben:

1950—1954-ig	49
1955—1959-ig	99
1960—1964-ig	220
összesen	368

önálló eredményeket tartalmazó tudományos közleményt publikáltak külföldi és hazai folyóiratokban, valamint az intézeti kiadványban. Az intézet munkatársaitól a fenti időszakban könyv nem jelent meg.

5. Elméleti Fizikai Kutató Csoport

A Csoport feladata az atomok és atomi rendszerek statisztikus elméletével, a kvantumkémiával, a szilárdtestek elméletével, az atommagok elméletével, a kvantumkémiai soktestprobléma közelítő módszereivel, az elemi részecskék elméletével és a relativitáselmélettel kapcsolatos vizsgálatok folytatása.

Az atomok és atomi rendszerek statisztikus elméletének célja egy olyan hullámmechanikai alapokon nyugvó, mégis szemléletes és könnyen kezelhető atommodell kiépítése, mely a tapasztalattal egybehangzóan írja le az atomok és atomi rendszerek tulajdonságait. Ez irányú kutatásokkal a Csoport néhány munkatársa már a Csoport megalakulása előtt is foglalkozott a *Műszaki Egyetem Fizikai Intézeté*ben.

A Csoport megalakulása után a munkatársaknak a *Thomas—Fermi—Weizsäcker*-féle statisztikus atommodell egyik alapvető hiányosságát kiküszöbölő korrekciót sikerült levezetni. A korrekció bevezetésével a statisztikus atommodellel számított energiaértékek és elektronsűrűség-értékek nagyságrendileg jobban megközelítik a megfelelő hullámmechanikai értékeket, mint az eredeti *Thomas—Fermi—Weizsäcker* modell esetén.

A Csoport munkatársai kidolgozták az elektronok főkvantumszám szerinti csoportosításával bővített statisztikus atommodellt. A modell az első a statisztikus modellek sorában, mely az atomok számos kémiai és spektroszkópiai fontosságú egyedi sajátságáról is számot tud adni. Az elektrongáz korrelációs energiájára nyert interpolációs formula segítségével bővített statisztikus atommodell kidolgozására került sor, mely az atomok sok tulajdonságáról felvilágosítást nyújt. Általánosították és továbbfejlesztették a statisztikus elméletben az általuk már korábban bevezetett perturbációs eljárást. Rámutattak a statisztikus egyenletek és a *Schrödinger*-egyenlet egy fontos analógiájára, mely fontos következtetéseket tesz lehetővé. Eredményes vizsgálatokat végeztek a kvantum-állapotoknak a periódusos rendszerben észlelt betöltődési sorrendjének értelmezésére vonatkozóan. A WKB módszer alkalmazásával módszert vezettek le, mellyel az atomok termértékei egyszerűen és nagy pontossággal meghatározhatók. Értelmezni tudták a főkvantumszámot a statisztikus modell keretében. Ez lehetőséget adott a statisztikus modellel elérhető pontosság növelésére. A statisztikus modellt eredményesen alkalmazták a HJ molekula szerkezetének vizsgálatára. Eredményesen alkalmazták a statisztikus elméletet számos kvantumkémiai érdekességű kérdés vizsgálatánál.

A kvantumkémiai vizsgálatok keretében a Csoport munkatársai alapvetően finomították a molekulák egyesített atommodelljét. Ez a modell különösen a többatomos hidridek tárgyalására alkalmas és a mai napig az erre a célra használható egyik legpontosabb módszer. A módszerrel számos hidrid hullámfüggvényét határozták meg. Eredményesen foglalkoztak a lokalizált elektroncsoportokból álló rendszerek elméletével. A *Hartree—Fock* elmélet olyan általánosításait vezették le, melyek megoldásai erősen ortogonális többrészecskefüggvények. Az ilyen függvényekből felépített teljes hullámfüggvény jó közelítést ad, ha a rendszer olyan elektroncsoportokból áll, melyek különböző térrészekre vannak lokalizálva. Ebben a közelítésben az energia mindig felső korlát és mindig jobb, mint a megfelelő *Hartree—Fock* energia, a rendszer bizonyos fizikai sajátságai pedig additív tevődnek össze az egyes csoportok járulékaiból. Emellett AH_4 típusú molekulák hullámfüggvényét határozták meg egycentrum-közelítésben. A módszer kitűnik matematikai egyszerűségével és segítségével a molekulák számos sajátsága a tapasztalattal jó egyezésben meghatározható. Az újabb, elektronikus számológépekkel végzett pontosabb számítások az egycentrum modell teljesítőképességére vonatkozó következtetéseit mindenben igazolták.

A *szilárdtestek elméletére* vonatkozó kutatások során a statisztikus elmélet felhasználásával értelmezték a Csoportban a nagy nyomás alatt álló anyagok számos fontos tulajdonságát. Ezeknek az eredményeknek elsősorban a csillagok belső szerkezetének tisztázásában van fontos szerepe. Az általuk régebben kidolgozott fémmodellt általánosították és kidolgozták az Ag fém elméletét. Eredményeket értek el a kristályok hibahelyeinek vizsgálatában. A statisztikus fémmodell általánosításával többek között kidolgozták az alumínium fém elméletét és a tapasztalattal jól egyező eredményeket sikerült kapni. A komplikált elektronszerkezetű fémekben ez volt az első elmélet. Figyelembe véve az egyes atomok helyén uralkodó kristálytér szimmetriáját, sikerrel értelmezni tudták a szelén- és tellurkristályok elektromos és optikai anizotrópiáját.

Az *atommagok elméletének* kutatása terén a munkatársak a statisztikus elmélet alapján magmodellt dolgoztak ki, mely az atommagok számos fontos sajátságáról számot tud adni. A modellt sok probléma megoldására sikerrel alkalmazták. A tapasztalattal jól egyező modellt dolgoztak ki a $C^{12}-C^{12}$ magmolekula szerkezetére. A Csoportban levezetett statisztikus magmodellt alkalmazva értelmezték a magok számos fontos sajátságát. Megállapították, hogy az elmélet szerint — a tapasztalattal jó egyezésben — a 266 tömegszámú és 107 magtöltésű magoknál nehezebb magok nem stabilak spontán maghasadással szemben. Ugyancsak a tapasztalattal jól egyező eredményeket kaptak az atommagok kollektív rezgéseinek vizsgálata során is.

Az utóbbi években intenzív vizsgálatok folytak a Csoportban a *kvantumkémiai soktestprobléma közelítő módszereire* vonatkozólag. Ennek keretében az elektronok mellékkvantumszám szerinti csoportosításával bővített statisztikus atommodellből a *Pauli*-elvet helyettesítő nem-klasszikus taszítópotenciálra a régebben levezetett kifejezéseknél pontosabb kifejezést vezettek le. A konstans sűrűségű elektrongáz korrelációs energiájára *Brueckner*, *Gell-Mann*, *Bohm*, *Pines* és *Wigner* által levezetett kifejezéseket közös interpolációs formulába foglalták össze. Megmutatták, hogy a semleges, izolált, alapállapotban levő atomokban az elektronokra ható effektív potenciál jobb közelítésben írható le egy — lineáris transzformációktól eltekintve — univerzális potenciálfüggvénnyel, mint ahogy az a *Thomas—Fermi* modellből következik. Az univerzális potenciálfüggvényt számos atom közelítő egyrészecske hullámfüggvényeinek meghatározására alkalmazták. Az elektronok mellékkvantumszám szerinti csoportosításával bővített statisztikus atommodellből származtatott, a *Pauli*-elvet helyettesítő nem-klasszikus taszítópotenciál alkalmazhatóságát kiterjesztették nem-impulzusmomentum sajátállapotban levő függvényekre. A *Hellmann—Feymann*-tétel felhasználásával kimutatták, hogy atomok korrelációs energiája egy izoelektromos soron belül jó közelítéssel állandó és ugyanez áll molekulákra is, egy, a magkonfigurációtól függő tag figyelembe vétele esetén. Megmutatták, hogy zérus hőmérsékletű kvantumfolyadékok sűrűségkorrelációs függvényét — mely lassú neutronok rugalmatlan szórásának leírására szolgál — a *Bogoljubov*-féle kanonikus transzformációk segítségével egyszerűen ki lehet számítani. Az az eredmény adódott, hogy míg a *Bose*-rendszereknél a neutronszóródás folyamán egy vagy kétfononos gerjesztések fordulhatnak elő, a *Fermi*-rendszereknél csak két, egymással ellentétes spinű kvázirészecske gerjesztése az egyedüli folyamat, ami rugalmatlan szóródást eredményez.

Az *elemi részecskék elméletével* kapcsolatos vizsgálatok során a munkatársak az elemi részecskék *Heisenberg*-féle nem-lineáris spinor-elméletéhez csatlakozva a relativisztikus *Fock*-módszer általánosításával self-consistent módszert dolgoztak ki, mely alkalmas elemi részecskék tömegének, csatolási állandóknak és relativisztikus amplitúdóknak a közelítő meghatározására.

A Csoport létszáma 20 fő, ebből kutató 14 fő, segédszemélyzet 1 fő. Tudományos fokozattal 6 fő rendelkezik: 2 akadémikus, 1 a tudományok doktora, 3 kandidátus.

A Csoport munkatársainak önálló tudományos eredményeit tartalmazó publikációk száma:

1954-ben	8
1955—1959-ig	61
1960—1964-ig	62
összesen	131 publikáció.

1956-ban egy tudományos könyvet jelentettek meg külföldön, 122 oldal terjedelemben.

6. Csillagvizsgáló Intézet

A felszabaduláskor hazánk egyetlen csillagászati obszervatóriuma a Szabadsághegyen volt. Ez az intézet az első világháború után alakult és kifejlesztése 1929-ben befejeződött, azóta 1945-ig lényeges fejlesztést nem kapott. Műszerfelszerelése nagy részben még az ógyallai obszervatóriumból elhozott, teljesen elavult távcsövekből állott, egyetlen új műszere, a 60 cm-es *Newton—Cassegrain*-rendszerű tükörteleszkópja sem volt modernnek tekinthető, mert még az első világháború előtti tervek szerint készült, a csak kisebb amatőrtávcsövek készítésében járatos drezdai *Heyde*-cégnél. Az obszervatóriumnak csupán könyvtára volt megfelelő, sőt már akkor is kitűnő.

Az obszervatórium a felszabaduláskor a budapesti egyetemhez tartozott, de az oktatásban nem vett részt. Az egyetem bölcsészettudományi karán volt egy külön, a csillagászati tanszékhez tartozó intézet, amely azonban kutatómunkát nem végzett. A szabadsághegyi obszervatórium a felszabadulás előtt a változócsillagok kutatása és a kisbolygó-megfigyelések területén szerzett nemzetközi hírnevet. Személyzete mindössze 3—4 kutatóból és 1—2 segédszemélyzetből állott.

Az 1945-ben alakult ideiglenes Magyar Természettudományi Akadémia támogatása lehetővé tette, hogy a kutatómunka már 1945 őszén megindulhasson a régi keretek között. 1946-ban már fejlesztésre is sor került, megindult egy napfizikai osztály kialakítása és 1947-ben ennek keretében vetették meg tulajdonképpen az alapját a később a Meteorológiai Intézethez került ionoszférakutató állomásnak is.

1948-ban az intézet nélkülözhető műszereiből a városban bemutató csillagdát létesítettek, ebből alakult ki a TIT Uránia csillagvizsgálója.

Ugyancsak 1948-ban megindult az intézet asztrofizikai megfigyelési módszereinek modernizálása, elsősorban fényelektromos mérőberendezések konstrukciója útján. Már 1951-től a változócsillag-kutatás túlnyomórészt fényelektromos módszerekkel folytatódott, és különösen az RR *Lyrae*-csillagok területén nemzetközileg is jelentős eredményeket értek el az intézetben.

Az intézet nagyobb arányú fejlesztése az MTA által 1951-ben történt átvétellel indult meg. Minthogy az intézet megfigyelő munkáját a főváros fejlődése és a környék beépülése mindjobban zavarta, mindjárt az átvétel után megkezdődött egy, a fővárostól távol fekvő hegyi állomás létesítésének tervezése. Az új létesítmény helyéül, hosszabb terep- és légköri vizsgálatok után, a Mátra-hegységben levő Piszkéstetőt jelölték ki. 1957-ben megrendelték a jénai *Zeiss*-művektől az új létesítmény főműszerét, egy 90/60/180 cm-es *Schmidt*-teleszkópot és ehhez egy 60 cm-es 5° törőszögű objektívprizmát.

A hegyi állomás kiépítése 1959-ben indult meg 16 millió forintos beruházással. 1962 nyarán felállították a *Schmidt*-teleszkópot, amely különösen a hozzátartozó objektívprizma révén, nemzetközi viszonylatban is jelentős csillagászati távcső. A felvételek kiértékeléséhez szükséges laboratóriumi műszereket is beszerezték az 1959—63. évek folyamán. A rendszeres kutatómunka a *Schmidt*-teleszkóppal 1963/64 telén indult meg és a szupernóva-kutatás terén máris szép sikereket értek el. A műszer mind optikai, mind mechanikai tekintetben elsőrendűen sikerült.

Ez év februárjában érkezett az állomásra egy új 50 cm-es *Cassegrain*-tükörteleszkóp, szintén a *Zeiss*-művektől és ez még ez évben felállításra kerül. Ezzel befejeződik a piszkéstetői obszervatórium kifejlesztésének első része. A hazai csillagászat most először jutott teljesen korszerű, nagyteljesítményű berendezéshez. Hozzávéve a berendezés kedvező elhelyezését, a piszkéstetői állomás a tautenburgi után Közép-Európa legjelentősebb obszervatóriumának tekinthető.

Az új *Cassegrain*-teleszkóp felállításával a szabadsághegyi obszervatórium főmunkaterülete, a változócsillagok vizsgálata is az eddiginél lényegesen jobb körülmények közt lesz folytatható a piszkéstetői hegyi állomáson. A távcsőhöz szükséges fényelektromos berendezések az intézet műhelyében már elkészültek és alkalmasak lesznek polarizációs mérésekre is. A *Schmidt*-teleszkóp a kutatási témák szinte korlátlan kibővítését tette lehetővé. A szupernóva-kutatás mellett nyílthalmazok háromszín fotometriáját és gyenge fényű csillagok spektrálklasszifikációját végzik nemzetközi kooperációban. Az új obszervatórium iránt külföldről is nagy az érdeklődés és már több külföldi csillagász dolgozott hosszabb-rövidebb ideig Piszkéstetőn.

Az intézet személyzete jelenleg háromszorosa az 1945. évinek és négy kutatási csoportra tagozódik: a) *változócsillag*, b) *stellárstatisztika*, c) *mesterséges égitestek*, d) *elméleti csoport*. A c) témakörben az intézet vezeti az MTA által 1959-ben létesített országos szputnyikmegfigyelő hálózatot. Ehhez jelenleg négy állomás tartozik: a budapesti, bajai, szombathelyi és a miskolci. Ezek munkája multilaterális egyezmény keretében folyik. Az elméleti csoport főleg magnetohidrodinamikai és kozmológiai témákkal foglalkozik.

Az intézet létszáma 34 fő, ebből kutató 11 fő, segédszemélyzet 13 fő. Tudományos fokozattal 3 fő rendelkezik: 1 akadémikus, 1 a fizikai tudományok doktora, 1 a fizikai tudományok kandidátusa.

Az intézet főkiadványából — *Mitteilungen der Sternwarte Budapest-Szabadsághegy* — a felszabadulás óta 45 (előtte 14) szám jelent meg. Ezzel csereviszonyban áll az intézet az összes külföldi csillagdával. Ezenkívül 1961 óta a NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓ változócsillag-szakosztályának felkérésére az „*Information Bulletin on Variable Stars*" című nemzetközi kiadványt jelenteti meg az intézet, amelyből eddig 85 szám jelent meg.

1964 óta lényegében az intézet személyzetének kezében van a budapesti egyetemi csillagászati káderképzés. Az egyetemen szervezés alatt áll egy csillagászati kutatólaboratórium berendezése, részben az MTA Csillagvizsgáló Intézet műszereiből. Ennek munkája főleg a piszkéstetői obszervatóriumban készülő fényképfelvételek kiértékelése lesz majd. Ezzel egyrészt megindulhat majd a kutatómunka a *Csillagászati Tanszéken*, másrészt megoldódik a megfelelő csillagászati káderképzés, amelyben éppen a megfigyelő csillagászat terén erős akadályt jelentett a főobszervatóriumok nagy távolsága az egyetemtől.

Az intézet munkatársai az elmúlt 15 évben:

1950—1954-ig	20
1955—1959-ig	32
1960—1964-ig	72
összesen	124

önálló eredményeket tartalmazó tudományos közleményt publikáltak külföldi és hazai folyóiratokban, valamint intézeti kiadványban.

Ezenkívül az intézetben ideiglenesen dolgozó külföldi csillagászok itteni munkájuk eredményeképpen intézeti kiadványokban 1960 óta 8 publikációt jelentettek meg.

Könyvet az intézet munkatársai nem írtak az elmúlt 15 évben.

7. Napfizikai Obszervatórium

A napfizikai kutatások jelentősége abban áll, hogy a Nap az egyetlen csillag, amely „egészen közelről" figyelhető meg, és a Naptól, annak sokrétű változásaitól származik csaknem minden behatás, amely a Földet a Földön kívüli világból éri, ezért a napfizikai kutatások a földi élet szempontjából fontosak.

Az Obszervatórium feladata a napfoltok, a nap-protuberanciák és a napfoltokat körülvevő napfáklyák vizsgálata. Az Obszervatórium elsősorban az említett objektumok héliografikus pozícióinak és látszólagos területeinek mérési adatai alapján az egyes objektumok keletkezésének, fejlődésének és eloszlásának, továbbá mozgásainak és gyakoriságának kutatásaival foglalkozik. A lassú lefolyású, évtizedes és éves változásokat régebbi magyar és külföldi megfigyelési adatok új szempontból történő kiértékelésével, a rövidebb idejű eseményeket pedig a saját észlelési adatok felhasználásával tanulmányozzák.

A napfoltok szerkezetével kapcsolatban az Obszervatórium munkatársai rámutattak arra, hogy az umbra-penumbra napfolt-területek aránya a napfoltjelenség egy fontos paramétere. Ezen paraméter időbeli változásait vizsgálva megállapították, hogy ennek értéke hogyan változik a hetek-napok alatt az umbra nagyságával, és az évek folyamán a 11 éves napciklus fázisával. Felismerték, hogy az említett paraméter főleg a napfoltok, illetve napfoltcsoportok fejlődésétől függ, így akár órák alatt jelentősen megváltozhat és bebizonyították, hogy az átlagértékek egy szekulárisnak nevezhető, de valószínűleg 80 évnél hosszabb periódusú ingadozást is mutatnak, amelynek amplitúdója nagyobb, mint a 11 éves napcikluson belüli változásé és éppen ez volt az oka annak, hogy korábban nem sikerült a 11 éves napciklussal párhuzamosan jelentkező törvényszerűséget meggyőzően kimutatni.

Más vizsgálatokkal kapcsolatban az Obszervatórium munkatársai arra a következtetésre jutottak, hogy az eddig teljesen különböző eredetűnek tartott észlelési-effektusok: a „fizikai" foreshartening, a *Wilson*-effektus és a szoláris E—W asszimetria a napfáklyáktól ered és a fákylák igen nagy fényabszorbeáló-képességére vezethetők vissza. Ezen felismerés által a szóban forgó effektusok a közvetlenül csak igen nehezen és korlátozott mértékben észlelhető napfáklyák vizsgálatánál hasznosíthatók.

Az Obszervatórium létszáma 7 fő, ebből kutató 5 fő, segédszemélyzet 2 fő. Tudományos fokozattal 1 fő rendelkezik: a fizikai tudományok kandidátusa.

Az Obszervatórium munkatársainak tollából egy önálló eredményt tartalmazó publikáció megjelent, három publikáció pedig nyomdában van.

III. Az Osztályhoz tartozó Akadémiai Tanszéki Kutató Csoportok

1. ELMÉLETI FIZIKAI ALAPKUTATÓ CSOPORT
(ELTE Elméleti Fizikai Intézet)

A felszabadulás utáni években a kutatómunka elsősorban a *relativitáselmélet* területén folyt. A szigetelő közegekben kialakuló elektromágneses tér energia-impulzus viszonyainak részletes tanulmányozásával sikerült egyértelműen meghatározni a szigetelőre ható ponderomotoros erő kifejezését és ezzel a mintegy fél évszázados tudományos vitát lezárni. Az elemi részecskék klasszikus relativisztikus mozgásproblémái, valamint az általános relativitáselmélet elvi kérdései körében nemzetközileg is elismert eredményeket értek el az intézményben.

A relativitáselmélet mellett a *kvantumelmélet és az elemi részek elméletének* aktuális problémái álltak a tudományos vizsgálatok homlokterében. A kvantummechanika klasszikus mechanikán alapuló megalapozása volt e területen az egyik leglényegesebb eredmény. A kvantumtérelmélet matematikai szerkezetének feltárása ma is a legaktuálisabb témák egyike. Itt a munkatársak olyan leegyszerűsített modelltereket vizsgáltak, amelyeken a matematikai analízis elvégezhető. Az indefinit metrikájú *Hilbert*-terekkel kapcsolatos eredményekre sok külföldi kutató felfigyelt és azokról elismeréssel nyilatkozott.

Az ötvenes évek közepétől kezdve a csoport legfontosabb kutatási területe az elemi részek elméletével kapcsolatos. Ezek között is különösen jelentős szerepet játszanak az elemi részek ún. gyenge kölcsönhatásaival foglalkozó vizsgálatok. A legszebb eredmény e téren az ún. leptonszám megmaradásának felismerése. E természettörvényt 1953—54-ben egymástól függetlenül, szinte egy időben ismerték fel magyar, szovjet és amerikai kutatók. Az elméletileg megsejtett törvényt négy évvel később a tapasztalat igazolta.

Az utóbbi néhány évben a neutrinóval kapcsolatos vizsgálatok képezik a csoport egyik legfontosabb kutatási témáját. E témakörben a neutrinó csillagászati vonatkozásait és a néhány évvel ezelőtt felfedezett ún. műneutrinó fizikai sajátosságait tanulmányozták. Elsőként jutottak arra a következtetésre, hogy a műneutrinó nyugalmi tömege feltehetően nem zérus. A jelenlegi kísérleti adatok ezt igazolni látszanak.

Az intézet kutatásai között mindig szerepeltek magfizikai vizsgálatok és néhány év óta a kutatási terület kiterjed a fizikai soktestprobléma és plazmafizika területére is. Az e területen elért eredményekre máris több külföldi kutató felfigyelt.

Az elmúlt két évtized alatt tehetséges fiatal kutatókból tudományos iskola fejlődött ki az intézetben. Az intézet létszáma 17 fő; 12 egyetemi oktató és 5 akadémiai állású kutató. Ezek közül 12 főnek van tudományos fokozata: 1 akadémikus, 5 tudományok doktora, 6 kandidátus.

Az intézet munkatársainak tollából az elmúlt 15 évben megjelent publikációk száma:

1950—1954-ig	89
1955—1959-ig	181
1960—1964-ig	172
összesen	442.

Ebből idegen nyelvű tudományos közlemény 170. Az intézet munkatársai az elmúlt 15 év alatt összesen 8 könyvet írtak, amelyből 6 egyetemi tankönyv, 2 pedig ismeretterjesztő könyv.

2. Kristálynövekedési Kutató Csoport
(ÉKME Kísérleti Fizikai Intézet)

Az elmúlt másfél évtizedben az intézet munkatársai a kristálymagképződés, kristálynövekedés és a kristályhibák vizsgálatával foglalkoztak. Kiemelkedő eredményeket értek el a mesterséges kvarckristályok, továbbá a tűkristályok előállítására és azok mechanikai tulajdonságaira vonatkozó kutatások során. Eredményesek voltak a rekristallizációval kapcsolatos vizsgálatok és különösen a rekristallizációs foszforok tulajdonságaira vonatkozó felismeréseket idézik az irodalomban. Más irányú vizsgálatok további fényt derítettek a félig rendezett határréteg tulajdonságaira.

Sikeresen foglalkoztak a Csoport munkatársai a diszlokációk vizsgálatával, így pl. kidolgozták az extrém finomságú NaCl tűkristályok növesztését és a tűkristályok növekedésére és a diszlokáció tartalmára vonatkozólag születtek értékes felismerések. Megvizsgálták a *Gyulai—Hartley* nyomás-effektust a plasztikus deformáció újabb, diszlokációs elmélete szempontjából és ezzel a külföldi kutatókkal egy időben kezdtek foglalkozni a töltött diszlokációkkal az ionkristályok esetében. E kísérletek és más, diszlokációk vizsgálatával kapcsolatos munkák eredményei nemzetközi sikereket értek el.

A Csoportban néhány éve a kristálymagképződés közelebbi megismerése céljából kiterjedt kutatások folynak. Az e vizsgálatok keretében elért eredmény, az ún. lavina-jelenség felfedezése a telített oldatok kicsapó kristályosodásánál igen figyelemre méltó.

A Csoport létszáma 18 fő, ebből egyetemi oktató 13 fő, akadémiai álláson levő kutató 5 fő, segédszemélyzet 13 fő. Tudományos fokozattal 4 fő rendelkezik, 1 akadémikus, 1 a tudományok doktora, 2 kandidátus.

Az intézet munkatársai	1950—1954-ig	37
	1955—1959-ig	63
	1960—1964-ig	67
	összesen	167

önálló eredményt tartalmazó publikációt jelentettek meg hazai és külföldi szaklapokban. Az intézetben két tudománytörténeti könyvet írtak magyar nyelven, összesen 1000 oldal terjedelemben.

3. Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutató Csoport
(József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézet)

A kutatási tevékenység két fő területre, a molekuláris lumineszcenciának, valamint a félvezetők elektromos és fotoelektromos tulajdonságainak vizsgálatára összpontosul.

A lumineszcencia-kutatások kezdetben főleg a zselatinba ágyazott organikus festékek vizsgálatával voltak kapcsolatosak, és e tárgykörben az intézet munkatársai szép eredményeket értek el.

Mivel a háborús rongálódások során sok műszer tönkrement, több pedig elavult, szükségessé vált új, megfelelő pontosságú méréseket lehetővé tevő berendezések szerkesztése és építése. Mindezt a gyors ütemben növekvő oktatási feladatok, ill. követelmények teljesítésével és az intézet személyi állományának fejlesztésével egy időben kellett biztosítani. Az erőfeszítések 1953-tól kezdték megmutatni hatásukat, amikorra kialakultak az intézetben azok a berendezések és eljárások, amelyekkel az oldatok valódi fluoreszcencia-jellemzőit (a fluoreszcencia-spektrumot, az abszolút kvantumhatásfokot és a polarizációs fokot) a korábbinál lényegesen pontosabban lehetett meghatározni. E kutatások leglényegesebb eredménye a szekundér-fluoreszcencia különböző hatásainak felderítése volt.

Az utóbbi témakörhöz csatlakozóan vizsgálat tárgyává tették az intézet munkatársai az oldatokban és a keverékoldatokban lejátszódó energiaátadási folyamatokat is, és így sikerült egyrészt a sugárzás nélküli energiaátadásnak a korábbinál lényegesen szemléletesebb és amellett egzakt értelmezését megadni, másrészt pedig a lumineszcencia-polarizációval kapcsolatban is jelentős kísérleti és elméleti eredményeket felmutatni.

A lumineszcencia-kioltásra vonatkozó intézeti kutatások eredményeképpen ma már pontosabb képet lehet alkotni a nem abszorbeáló idegen anyagokkal való kioltás mechanizmusáról is. A lumineszcencia és a hőmérsékleti sugárzás kapcsolatának tanulmányozása egyrészt a lumineszcencia-hatásfok felső korlátjára vonatkozóan, másrészt az emissziós spektrum a *Planck*-féle emissziós koefficiens és a hatásfok-függvény kapcsolatára vonatkozóan szolgáltatott értékes felvilágosításokat.

Az intézet több ízben nyújtott segítséget más intézményeknek ipari és orvostudományi vonatkozású lumineszcencia-vizsgálatok elvégzéséhez is.

A félvezető-kutatások kezdetben a zselatinfoszforok vezetési tulajdonságainak felderítésével voltak kapcsolatban. Később a vizsgálatok az ólomszulfid és szelenid elektromos és fényelektromos tulajdonságainak a vizsgálatára irányultak: a félvezető-kutatórészleg megállapította az említett anyagokból készült preparátumokban a töltéshordozók sűrűségét, mozgékonyságát stb. Ezekből az anyagokból az intézetben olyan fotoelemek, ill. fotoellenállások készültek, amelyek a gyakorlati alkalmazás szempontjából is számításba jöhetnek.

A fenti vizsgálatoknál szerzett tapasztalatokat jól tudta értékesíteni a részleg a Konverta Gyárral kötött kutatási szerződés keretében, amely szerződés a szelénegyenirányítók gyártási technológiájának tökéletesítését célozta.

Az utóbbi időben eredményeket ért el a félvezető-részleg a germániumból és más félvezetőkből készült preparátumok felületén lejátszódó rekombinációs folyamatoknak a „mozgó fényfolt" módszerével való tanulmányozása útján is.

A lumineszcencia- és félvezető-kutatásokon kívül az intézetben rendszeres szakmódszertani vizsgálatok is folynak a fizikaoktatással kapcsolatban és ezek több szempontból figyelemre méltó eredményekkel jártak.

Az intézet munkatársainak tollából

1950–1954-ig	30
1955–1959-ig	48
1960–1964-ig	42
összesen	120

önálló eredményeket tartalmazó publikáció jelent meg.

Az intézet munkatársainak tollából belföldön megjelent 4, külföldön pedig 1 könyv; ezek közül 3 több kiadásban, összesen 2235 oldal terjedelemben, valamennyi egyetemi tankönyv, ill. tanári segédkönyv.

Az intézet szerkeszti az *Acta Physica et Chemica Universitatis Szegediensis* tudományos folyóiratot.

A Csoportban jelenleg az intézet 24 oktatóján kívül 3 akadémiai állású kutató és 10 technikai segéderő működik.

A tudományos fokozatokat tekintve, az intézet tagjai közül 1 akadémikus, 2 a fizikai tudományok doktora, 2 a fizikai tudományok kandidátusa, ketten benyújtották kandidátusi disszertációjukat és 6 munkatárs kandidátusi disszertációja előkészületben van.

4. Kristályfizikai Kutató Laboratórium

(Budapesti Orvostudományi Egyetem Orvosi Fizikai Intézet)

Az intézetben sugárzások és különböző közegek kölcsönhatásának tanulmányozásával foglalkoznak. A vizsgálatok részben szilárdtesteken (kristályokon), részben biológiai objektumokon folynak, és ennek megfelelően az intézet tevékenysége két területre osztható: szilárdtest-fizikai és orvosi vonatkozású, ill. biofizikai vizsgálatokra.

A szilárdtesteken végbemenő sugárhatások tanulmányozása szempontjából értékes eredményeket ígérő modellanyagok az alkalihalogenid kristályok. Az elmúlt években több jelenséget figyeltek meg, írtak le és értelmeztek az intézetben, amelyek különböző előéletű (optikai, termikus, mechanikai előkezelés) alkalihalogenid kristályokban ionizáló sugárzások (főként röntgen- és gammasugárzás) hatására keletkező hibahelyek (szincentrumok) tulajdonságaival, továbbá ezeknek egyéb hibahelyekkel (ionhiányok, szennyeződések stb.) való kölcsönhatásaival függnek össze.

Eredményeket értek el a kristálynövekedés, valamint az alkalihalogenid kristályok felületi struktúrájának vizsgálata területén. Több gyakorlati eredmény is fűződik az intézet munkásságához, pl. magsugárzások mérésére szolgáló szerves (naftalin antracén) és szervetlen (talliummal aktivált NaJ, KJ és CsJ) szcintillátorok előállítása. Az eljárásokat az iparilag legfejlettebb országokkal egy időben sikerült kidolgozni. A NaJ/Tl detektorokat már néhány éve iparunk állítja elő (A KGST által Prágában rendezett nemzetközi versenyen a magyar készítmények minőségükkel tűntek ki).

Az orvosi vonatkozású fizikai és biofizikai kutatások egyik csoportjába a radioaktív izotópok elméleti orvosi, diagnosztikai és terápiás felhasználásaival kapcsolatos fizikai és műszerezettségi problémák sorolhatók. Több mérési eljárást, mérőkészüléket, berendezést dolgoztak ki, amelyek közül egyik-másik nemzetközi viszonylatban is jelentős. Így pl. az élő szervezet izotóptartalmának automatikus feltérképezésére szolgáló berendezés a KGST államokban magyar profillá vált. A zárt és nyitott csőrendszerben végbemenő folyadékáramlás jellemző térfogat- és időadatainak radioaktív izotópokkal történő meghatározására vonatkozó vizsgálatok a radiocirkulográfia pontos, megbízható végzéséhez szolgáltattak adatokat.

Az ionizáló sugárzásoknak az élő szervezetre gyakorolt hatásaival kapcsolatos vizsgálatok közül említésre méltó a sugársérülések korai felismerése érdekében az élő szervezetekben egésztest besugárzás után jelentkező egyes elváltozások idő- és dózisfüggésére vonatkozó kutatások. A bakteriofágok ultraibolya fény hatására bekövetkező inaktiválódásának több oldalról végzett vizsgálata a sugárhatás mechanizmusának közelebbi megismeréséhez vezetett. Egy másik témában eredményesen vizsgálták a központi idegrendszerre ható gyógyszereknek a pajzsmirigy jódtárolására és hormonszekréciójára gyakorolt mellékhatásait.

A biofizikai vizsgálatok körébe tartozik az ultrahang hatásmechanizmusának vizsgálata biológiai objektumokon. Ide sorolhatók azok a munkák, amelyek az ultrahang diffúziónövelő szerepével, az izom káliumfelvételére és leadására gyakorolt hatásával, deszorpciós és penetrációs folyamatokra kifejtett hatásával, továbbá az ultrahangnak sarjadzó gombákra, gombavakcinákra stb. való hatásaival foglalkoznak.

A tudományos közlemények száma:

1950—1954-ig	12	
1955—1959-ig	75	
1960—1964-ig	84	
összesen	171	dolgozat.

A laboratórium munkatársainak tollából az elmúlt 15 év alatt 21 egyetemi, ill. középiskolai tankönyv jelent meg magyar nyelven 3600 oldal terjedelemben.

Az intézetben 16 oktatón kívül 3 akadémiai állású kutató és 11 technikai segéderő működik. A tudományos fokozatot tekintve az intézet tagjai közül 4 a fizikai tudományok kandidátusa.

IV. Olyan egyetemi intézetek, amelyek jelenleg is a III. Osztálytól kapnak céltámogatást

1. ELTE MATEMATIKAI INTÉZET

Az Intézetben jelenleg hat tanszék működik. A matematikai tanszékek oktatói létszámának rohamos növekedése a felszabadulás óta eltelt két évtizedben lehetővé tette a tudományos kutatómunka megindítását a matematikának számos olyan területén, amelyek a budapesti Tudományegyetemen, sőt legnagyobbrészt az egész országban sem voltak a felszabadulás előtt művelve. Ezek némelyike ma már egy-egy tanszék oktatóinak nagyobb csoportját s másutt működő kutatókat is foglalkoztat, úgyhogy komoly nemzetközi tekintélyt kivívott tudományos iskolák kialakulásáról lehet beszélni (valószínűségszámítás, algebra, analitikus számelmélet). Kiemelkedő aktivitású munkásságot folytatnak az Intézet munkatársai részben a felszabadulás előtti hazai matematikai kutatások spektrumából hiányzó területeken (általános topológia, halmazelmélet, szintetikus geometria és csoportelmélet, variációszámítás, diszkrét geometria, matematikai logika, nem euklideszi geometria). A tanszékeken működő kutatók tollából számos nagy sikert aratott tudományos monográfia került ki a felszabadulás óta. Ezek között is egészen kiemelkedő helyet foglal el RIESZ FRIGYESnek SZŐKEFALVI-NAGY BÉLÁval közösen írt *Leçons d'Analyse fonctionnelle* c. munkája, amely 1952-ben való megjelenése óta számos újabb kiadásban és számos nyelvre lefordítva a nemzetközi tudományos könyvpiac egyik bestsellerévé vált. A tudományos cikkek, népszerűsítő munkák stb. százai kerültek ki az utolsó két évtizedben a tanszékekről.

A számos pozitívum mellett meg kell állapítani, hogy a tudományos munka még nagyobb intenzitását igen nagymértékben akadályozza az oktatók túlnyomó részének rendkívül erős oktatási elfoglaltsága. Ennek tulajdonítható, hogy a fiatal oktatók nagy része csak igen lassan kapcsolódik be a kutatómunkába, sokan egyáltalán nem jutnak el tudományos fokozat megszerzéséig. Az oktatói terhelések jelentékeny csökkentésére volna szükség valamennyi tanszéken annak érdekében, hogy az oktatók munkaidejüknek akárcsak egy részét is a tudományos munkára fordíthassák.

Számottevően nehezíti a tudományos munkát egyes területeken az is, hogy a matematika bizonyos fontos ágainak nincs a karon tanszékük, úgy, hogy az ezekkel kapcsolatos oktatási és kutatási feladatok ellátása alapvetően más profilú tanszékekre hárul. Így a numerikus matematika és a matematikai gépek témakörének gondozása jelenleg a Geometria tanszékre, a matematika alapjai az Analízis I. és részben az Algebra és számelmélet tanszékre, a topológiáé az Analízis I. és a Geometria tanszékre hárul.

2. József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete

Az Intézetben algebrai, funkcionálanalízis, valós függvénytani, konstruktív függvénytani, matematikai logikai és matematikai kibernetikai kutatások folynak.

Az Intézet munkatársai az *algebrai* számelméletben bevezették a feltételes *Artin*-féle szimbólum fogalmát, s ennek alkalmazását adták a másodfokú számtest osztálycsoportjának páros részére és a Pell-féle egyenletekre. A gyűrűelméletben a holomorf fogalom megalapozását adták. Lényegesek továbbá bizonyos ferde szorzatokkal leírható véges csoportokkal, a legfeljebb másodfokú nem-kommutatív csoportokkal, valamint a véges *Abel*-csoportok elméletében *Hajós* alaptételének általánosításával kapcsolatos vizsgálataik. A gyűrűk olyan tulajdonságait állapították meg, amelyek az egységelemes gyűrűbővítéssel szemben öröklődnek. Bevezették a gyűrűben és félcsoportban a kváziideál fogalmát, és vizsgálták ezek szerepét a *Wedderburn—Artin*-féle struktúra-tételekben. Az Intézetben indultak meg a véges *Abel*-csoportok elméletébe vágó kutatások. Az algebrai vizsgálatok kapcsán a munkatársak tollából a felszabadulás óta mintegy 100 önálló eredményt tartalmazó publikáció és 4 tudományos könyv jelent meg. A funkcionálanalízis, de általában az analízis területén nemzetközi jelentőségű volt a már említett Riesz Frigyes—Szőkefalvi-Nagy Béla „*Leçons d'Analyse fonctionnelle*" című könyv. Az Intézet munkatársai a kvantummechanikai perturbációszámítás matematikai szigorúsága, hibabecsléssel ellátott tárgyalását adták analitikus perturbáció esetén; lényegesek az úgynevezett egyenletesen korlátos operátorokra vonatkozó tételek, valamint a *Hilbert*-tér kontrakcióinak unitér dilatációira vonatkozó alaptétel és ennek alkalmazásai a *Hilbert*-tér általános típusú operátorai szerkezetének vizsgálatában, továbbá az ilyen operátorokra vonatkozó funkcionálkalkulus kiépítésében. Újabb vizsgálataik során az operátorok úgynevezett karakterisztikus függvénye fogalmának teljes kiépítését és e fogalomnak számos alkalmazását adták.

A valós függvénytani és konstruktív függvénytani vizsgálatok keretében lényeges eredményeket értek el a *Fejér*-féle és rokon típusú összegezési eljárások approximációs tulajdonságainak vizsgálata során *Fourier*-sorok esetében; függvények és *Fourier*-transzformáltjaik integrálhatósági viszonyai közötti kapcsolatokat állapítottak meg monotonsági feltételek mellett, valamint bizonyos függvényklasszisok esetén a megközelítés mértékére alsó becsléseket nyertek. Számos eredményt értek el az ortogonális sorok konvergencia elméletében, az ortogonális sorok abszolútszummációjára, erős szummációjára, valamint ortogonális sorok konvergenciájára vonatkozó együttható- és strukturális feltételek közötti kapcsolatok vizsgálatában.

A felszabadulás után a matematikai logikával kapcsolatos kutatásokban jelentős fellendülés következett be. Az intézet munkatársai számos eredményt értek el e kutatási területen és a kutatások alkalmazásaként továbbfejlesztették a logikai gépet és az alkalmazások keretében eredményesen foglalkoztak műszaki elvek kidolgozásával, továbbá kibernetikai és nyelvészeti kutatásokkal. Többek között megterveztek egy ún. formula-vezérlésű elektronikus számológépet, amely feleslegessé teszi a hagyományos értelemben vett programozási munkát, ide számítva a formula-fordító programok készítését is.

Jelentős eredményeket értek el az Intézet munkatársai a halmazleképezésekkel és a differenciálgeometriai vizsgálatok során. A szegedi matematikai élet fellendülése szempontjából jelentős volt az, hogy Szegeden a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének osztályai létesültek (a *Matematikai Logika és Alkalmazásai*, a *Funkcionálanalízis és Alkalmazásai*, valamint az *Algebrai Osztály*ok).

V. Olyan egyetemi intézetek és tanszékek, amelyek korábban a III. Osztálytól, jelenleg pedig a Művelődésügyi Minisztériumtól kapják a céltámogatást

1. Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete

Az Intézet kutatási irányai az elmúlt 15 évben a következők voltak: általános differenciálgeometriai terek elmélete, hiperbolikus algebra axiomatikus felépítésének néhány kérdése, *Abel*-féle csoportok elmélete, *Artin*-féle gyűrűk vizsgálata, a függvényegyenletek elmélete és alkalmazása a geometriai objektumok elméletére, a valószínűségszámítás, az információelmélet és közgazdasági folyamatok matematikai elemzése, mátrixelméletben a *Toeplitz*-féle formák vizsgálata, továbbá matematikatörténeti kutatások.

Az Intézet munkatársai által elért eredmények közül kiemelkedők a geometriában a *Finsler*-terek általános elméletében elért eredmények, az *Abel*-csoportok elméletében a bázisalcsoport és az indirekt összeg vizsgálata, a speciális tulajdonságú *Abel*-csoportokra vonatkozó kutatások. Említésre méltóak a modulusok és gyűrűk elméletében és az *Artin*-gyűrűk struktúrájának vizsgálatára vonatkozó eredmények. Nemzetközi elismerést váltottak ki azok az eredmények, amelyek a függvényegyenletek modern elméletének szisztematikus kiépítésére vonatkoznak, továbbá ezen eredmények alkalmazása a geometriai objektumok elméletében, a valószínűségszámításban, az információelméletben és a közgazdasági folyamatok matematikai elemzésében. E témakörből egy monográfia is megjelent.

Valószínűségszámításban figyelemre méltóak a sztochasztikus folyamatok elméletében elért eredmények, főként a mátrix-értékű sztochasztikus folyamatok elméletében az az eredmény, amely U. Grenander eredményeit általánosítja. Ugyancsak nevezetesek a *Toeplitz*-féle formák általánosítására vonatkozó eredmények, amelyek Szegő Gábor klasszikus eredményeit általánosítják.

2. Budapesti Műszaki Egyetem III. Matematikai Tanszéke

A Tanszék munkatársai főként approximáció-elmélettel és a topologikus terek elméletével foglalkoztak. Az approximáció-elmélet igen szép és eredményes fejlődést ért el a Tanszék munkája alapján. Így pl. teljes sikerrel foglalkoztak a *Lipschitz* osztályok approximáció-elméleti jellemzésével, jelentős eredményeket értek el a törtrendű integrálok és deriváltak approximáció-elméleti vizsgálatában; ez utóbbi eredményeket továbbfejlesztették és egészen általános elemi jellegű sorelméleti segédtételekre támaszkodva általánosították a törtrendű integrál fogalmát és a reá vonatkozó approximációs tételeket.

Az approximáció-elméletben fontos szerepet játszik az erős szummáció, amelyekre vonatkozólag mindeddig csupán általános jellegű konvergencia-tételek voltak ismeretesek. A tanszék munkatársainak sikerült trigonometrikus *Fourier*-sorokra, valamint bizonyos ortogonális polinomrendszerekre vonatkozóan approximációs eredményt elérni az erős szummációkra vonatkozólag. Ezzel a régebbi *Bernstein*-féle eredményeket messzemenően általánosították.

Az általános ortogonális sorfejtések elméletében a Tanszék munkatársai egészen új szempontokat vittek bele a kutatásba és így sikerült hosszú évek óta megoldatlan kérdéseket teljesen megoldaniok és ezzel az elmélet bizonyos részeinek lezárt jelleget adtak.

3. Budapesti Műszaki Egyetem IV. Matematikai Tanszéke

A Tanszéken 1959 óta elektronikus számológépekkel foglalkozó laboratórium működik. A gépi számítástechnikai kutatások eredményeként orvosi, vegyészeti és anyagvizsgálati célokat szolgáló logikai és analógiás számológépek matematikai elméletének kifejlesztése mellett konkrét gépkonstrukciós munkák is folynak a laboratóriumban. Hat speciális számológépnek, illetve segédberendezésnek készült el a terve, ezek közül több meg is épült. Egy találmányra — az elektroklasszifikátorra — szabadalmat kapott a Tanszék.

Eredményes kutatásokat folytattak a Tanszék munkatársai a matematika különböző ágaiban, így pl. a funkcionálanalízisben, az integrálegyenletek elméletében, a konstruktív függvénytanban, a gráfelméletben, a differenciálgeometriában és a matematikai statisztikában.

4. Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Matematikai Tanszéke

A Tanszék munkáját az 50-es években a műszaki problémák matematikai tárgyalásának elmélyítése felé való törekvés jellemezte. A tanszéken tudományos iskola alakult ki a mátrixszámítás műszaki alkalmazása terén.

A Tanszéken folyó kutatómunka néhány évvel ezelőtt differenciálgelmetriai vizsgálatokkal bővült. Az utóbbi 20 évben a differenciálgeometriai vizsgálatok tárgyát a különböző típusú differenciálgeometriai terek képezték. A tanszék munkássága e problémakörhöz kapcsolódott. Így pl. eredményesen foglalkoztak a *Finsler*-tér, a *Cartan*-tér, valamint az általános metrikus vonalelemterek megalapozásának kérdésével, továbbá e terek affin általánosítására vonatkozó ekvivalencia elmélettel. Meghatározták a differenciálinvariánsok teljes rendszerét, a *Finsler*-, a *Cartan*-, valamint a *Kawaguchi*-féle terekben. Ugyancsak meghatározták *Finsler*-féle terek mozgási, homotetikus és affin csoportjait.

5. Veszprémi Nehézvegyipari Egyetem Matematikai Tanszéke

A Tanszéken folyó kutatómunka fő irányai a következők voltak:

Sokszögek-, soklapok- és politópokkal kapcsolatos szélsőérték problémák.
Fedési és elhelyezési kérdések.
Görbék approximációja sokszögekkel.
Cellarendszerekre vonatkozó izoperimetrikus problémák.
Térfogatmérés nem euklideszi terekben.
Extremális pontrendszerek a gömbön.
Az affin ívhossz különböző tulajdonságai.
Integrálgeometria.

A Tanszék hét dolgozójától mintegy 75 dolgozat jelent meg. Megjelent továbbá két monográfia is; az első 1953-ban németül, majd 1958-ban orosz fordításban, a második 1964-ben angolul és 1965-ben német fordításban.

Ezek a publikációk és monográfiák nagy visszhangot váltottak ki mind bel-, mind külföldön. Egyik sokat idézett, pregnáns eredmény azt mondja ki, hogy centrálisan szimmetrikus, egybevágó konvex lemezek semmilyen elhelyezésének sűrűsége sem lépheti túl a legsűrűbb rácsszerű elhelyezés sűrűségét.

6. Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézete

Az Intézet munkatársai *kvantumkémiai és szilárdtestek fizikája* elméleti kérdéseinek vizsgálatával foglalkoztak. A *Hartree—Fock* elmélet atomokra vonatkozó egyenletei szolgáltatják az atomokra a legjobb egyelektron hullámfüggvényeket és energiaértékeket. Az Intézet munkatársainak sikerült levezetni a *Hartree*-módszer és a statisztikus elmélet segítségével egy olyan igen egyszerű analitikus egyelektron potenciált, amelynek sajátértékei és hullámfüggvényei igen jól megközelítik a *Hartree—Fock* elmélet megfelelő mennyiségének értékeit. Az univerzális potenciállal széles körben végeztek és végeznek vizsgálatokat (román, holland, francia, lengyel, szovjet és amerikai kutatókkal közösen), amelyek eredményeit felhasználták fémelméleti vizsgálatoknál, atomalaktényezők meghatározásánál, szórás-elméleti vizsgálatoknál és kezdő függvényekül self-consistent field számításokhoz.

A molekulaelméleti vizsgálatok egyrészt új módszerek felkutatását tűzték ki célul. Ilyen vizsgálatokkal állandóan foglalkoztak az Intézetben. Az egyesített atommodellel kapcsolatos kutatások a hidrid molekulák új kvantumkémiai modelljéhez vezettek. Konzekvens módon számolva ez a modell igen jó eredményeket szolgáltatott a kötésenergiákra, protoaffinitásokra és molekula alakfaktorra. Vizsgálataikba szovjet kutatók is bekapcsolódtak s több közös munka jelent meg az XH_n típusú hidridek s köztük az igen fontos vízmolekula kötésével kapcsolatban. Az egyesített atommodell igen alkalmasnak bizonyult gerjesztett állapotok tárgyalására is. Igen bonyolult probléma volt a technikai alkalmazások szempontjából rendkívül fontos szerepet játszó szelén és tellúr félvezetők elektronszerkezetének tisztázása. Ezt a feladatot a kristálytér helyi szimmetriájának figyelembevételével csoportelméleti módszerekkel oldották meg. Az így nyert négysávos modell ezeknek a félvezetőknek a legtöbb tulajdonságát kvalitatíve igen jól magyarázza, s mind szélesebb körben használják a kísérleti eredmények analízisénél.

A pszeudopotenciálok segítségével a Tanszék munkatársai kidolgoztak egy módszert a szilárdtestek elektronjai sávos energiaspektrumának meghatározására. Ezt a módszert a Tanszék munkatársai az alumínium, ezüst és réz, csehszlovák kutatók a szilícium és germánium elektronszerkezetének a tanulmányozására, angol kutatók pedig az interpolációra használták fel.

Az Intézetben folyó szóráselméleti vizsgálatok két irányúak. Több dolgozatban a nemes gázatomok egymáson való szóródásának elméletét dolgozták ki és megállapították a szórási potenciálok interpolációjának a módszereit is. Folyamatban van a pszeudopotenciálok szóráselméleti szerepének a tisztázása is. Ide tartoznak az elektronaffinitás meghatározására végzett vizsgálatok is, amelyek asztrofizikai szempontból érdekesek.

Az Intézetben végzett legújabb kutatások a korrelációs energia rendszámtól való függését vizsgálják. Kimutatták, hogy az izoelektronos korrelációs energia a rendszámtól igen jó közelítésben független. A tételt sikerült molekulákra is általánosítani. A korrelációs energia és korrelált hullámfüggvény vizsgálatára régen ismert módszer a konfigurációs kölcsönhatás módszere. Megmutatták, hogy megfelelően választott modell-potenciál felhasználása új lehetőséget nyújt a konfigurációs kölcsönhatás módszerénél a konvergencia megjavítására.

7. Kossuth Lajos Tudományegyetem Alkalmazott Fizikai Intézete

Az Intézetben fundamentális röntgenfizikai és röntgenfotokémiai vizsgálatokkal foglalkoztak. Eredményesen vizsgálták a röntgensugarak visszaverődését, a masszív antikatód folytonos röntgensugárzását, valamint ezen sugárzás által keltett szekundersugárzás polarizációfokának szögtől, feszültségtől, előszűréstől és a szórótest anyagi minőségétől való függését. Sikerült a röntgensugarak kettős és hármas visszaverődésének észlelése, s a tünemény létrejötte feltételeinek tisztázása.

8. Budapesti Műszaki Egyetem Atomfizikai Tanszéke

A spektroszkópiai kutatások a Tanszéken akadémiai kutatócsoport keretében indultak meg, eléggé széles profillal (emissziós, abszorpciós és molekula-spektroszkópia). A kutatócsoport 1951 elején a Központi Fizikai Kutató Intézethez került, s mint annak *Spektroszkópiai Osztálya*, a Kozmikus-sugárzási Osztály mellett az akkor alakult intézet bázisát képezte. Ilyen körülmények között a Tanszéken a kutatómunka abbamaradt. 1958-ban a Spektroszkópiai Osztály működése a KFKI-ban megszünt, így a spektroszkópiai kutatások a Központi Fizikai Kutató Intézetben abbamaradtak, a kutatók szétszóródtak és a műszerek egy része ismét visszakerült az Atomfizikai Tanszékre. Súlyos csapást jelentett a spektroszkópiai kutatásokra, hogy ezzel egy időben nem történt gondoskodás egy kisebb kutatócsoport felállításáról, és így a szép hagyományokkal rendelkező kísérleti molekulaspektroszkópiai kutatások gyakorlatilag majdnem teljesen abbamaradtak az utóbbi nyolc évben.

1957 után minimális akadémiai támogatással, egészen csekély tanszéki létszámmal, meglehetősen elszigetelten, újból megindultak a Tanszéken a molekulaspektroszkópiai elméleti vizsgálatok. Ezek a vizsgálatok azonban csak belföldi viszonylatban voltak elszigeteltek. A kialakult eleven és pezsgő külföldi kapcsolatok nyomán az *Európai Molekula-Spektroszkópiai Csoport* 1961-ben úgy határozott, hogy magyar javaslatra az 1963. évi *VII. Európai Molekulaspektroszkópiai Kongresszus*t Budapesten rendezik meg. Ez a kongresszus mind tudományos, mind társadalmi, mind pedig politikai szempontból igen jól sikerült.

A Tanszéken folyó elméleti spektroszkópiai kutatások tárgya a kétatomos molekulák belső szerkezetének feltárása a színképek által szolgáltatott adatok alapján. Ennek kapcsán vizsgálat tárgyává tették a spin-pálya és a spin-spin kölcsönhatások befolyását a multiplett felbomlásokra és ennek segítségével számos molekulán (NH, PH, TiO, CO, O_2^+, HgH, YO, N_2, MnH) észlelt anomáliákat sikerült elméletileg értelmezni. Különböző intenzitás eloszlások elméleti formuláit számították ki és hasonlították össze a tapasztalattal. Különleges perturbációs problémákat oldottak meg.

9. ELTE KÍSÉRLETI FIZIKAI INTÉZET

A Tanszéken 1957-től kezdve végeznek szilárdtestfizikai vizsgálatokat. A Tanszék munkatársai eredményeket értek el a fémek és ötvözetek rácshibáinak tanulmányozása, keletkezésük és mozgásuk vizsgálata során. Leglényegesebb eredménynek tekinthető az igen nagy plasztikus alakváltozások vizsgálata, a deformáció, feszültség, valamint a hibastruktúra kapcsolatának elsőkénti tisztázása.

10. ELTE ATOMFIZIKAI TANSZÉK

A Tanszék 1957-ben alakult. A Tanszék dolgozói eredményeket értek el a *Mössbauer*-effektus tanulmányozása, az alacsony hőmérsékletfizika vizsgálata és a nagyenergiájú részecskék kölcsönhatásának kutatása területén.

11. JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZET

Az Intézet munkatársai részben térelméleti, részben pedig kvantumkémiai kutatásokkal fogalkoztak. A térelméleti kutatások keretében a fizikai terek klasszikus és kvantum-elmélete, ez elemi részek elmélete és újabban a kvantummechanikai többtestprobléma modern elmélete terén értek el eredményeket. A kvantumkémiai kutatások elsősorban a kvantummechanikai többtestprobléma közelítőmódszereinek a tanulmányozására és továbbfejlesztésére, illetőleg komplex molekulák elektronszerkezetének és abszorpciós spektrumának a felderítésére koncentrálódtak.

VI. Könyv- és folyóiratkiadás

Az elmúlt 15 évben a következő művek jelentek meg az Osztály könyvkiadási tervének keretében:

a) MATEMATIKAI TÁRGYÚ MŰVEK

AHIJEZER, N. I.: *Előadások az approximáció elméletéről.*
(1951.)

ALEKSZANDROV, P. SZ.—KOLMOGOROV, A. N.: *Bevezetés a halmazelméletbe és a függvénytanba.*
I. rész. *Alekszandrov, P. Sz.: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe.*
(1952.)

ALEXITS GYÖRGY: *Convergence Problems of Orthogonal Series.*
(1961. Közös kiadás az oxfordi Pergamon-Press-szel.)

ALEXITS GYÖRGY: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen.*
(1960. Közös kiadás a berlini VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften-nel.)

BOLYAI JÁNOS: *Appendix.*
(1952. *Kárteszi Ferenc* bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítésével.)

Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups.
(1964.)

CSÁSZÁR ÁKOS: *Fondements de la topologie générale.*
(1960. Közös kiadás a párizsi Gauthier—Villars kiadóval.)

CSÁSZÁR ÁKOS: *Foundations of General Topology.*
(1963. Közös kiadás az oxfordi Pergamon Press-szel.)

CSÁSZÁR ÁKOS: *Grundlagen der Allgemeinen Topologie.*
(1963. Közös kiadás a lipcsei B. G. Teubner Verlagsgesellschafttal.)

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois. — Second Hungarian Mathematical Congress. — Zweiter Ungarischer Mathematischer Kongress.
(1961. Két kötetben.)

Az első magyar matematikai kongresszus közleményei.
(1952.)

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Regular Figures.*
(1964. Közös kiadás a Pergamon Press-szel.)

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Regulären Figuren.*
(1965.)

FUCHS LÁSZLÓ: *Abelian Groups.*
(1958. Ugyanez megjelent a londoni Pergamon Press számára készült kiadásban is.)

FUCHS LÁSZLÓ: *Partially Ordered Algebraic Systems.*
(1963. Közös kiadás az oxfordi Pergamon Press-szel.)

GELFAND, I. M.: *Előadások a lineáris algebráról.*
(1955.)

GELFOND, A. O.: *Differenciaszámítás.*
(1954.)

GNYEGYENKO, B. V.—KOLMOGOROV, A. N.: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.*
(1951.)

GUTENMAHER, L. I.: *Elektromos modellek.*
(1951.)

HAAR ALFRÉD *összegyűjtött munkái. — Gesammelte Arbeiten.*
(1959.)

HINCSIN, A. J.: *A statisztikai mechanika analitikus módszerei.*
(1951.)

HUA LO-KENG: *A törzsszámok additív elmélete.*
(1959.)

JANOVSZKAJA, SZ. A.: *Lobacsevszkij haladó eszméi.*
Az idealizmus elleni harc eszközei a matematikában.
(1952.)

JORDAN KÁROLY: *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból.*
(1956.)
KANTOROVICS, L. V.—KRÜLOV, V. I.: *A felsőbb analízis közelítő módszerei.*
(1953.)
KERÉKJÁRTÓ BÉLA: *Les fondements de la gèomètrie.*
I. köt. *Az euklidesi geometria elemi felépítése.*
(1955.)
KUROS, A. G.: *Csoportelmélet.*
Függelék: NEUMANN, B. H.: *Csoportok általánosított szabad szorzatai.*
(1955.)
LAVRENTYEV, M. A.—LJUSZTYERNYIK, L. A.: *Variációszámítás.*
(1953.)
LOBACSEVSZKIJ, N. I.: *Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből.*
(1951.)
MEDGYESSY PÁL: *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*
(1961.)
MIHLIN, SZ. G.: *Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira.*
(1953.)
NATANSZON, I. P.: *Konstruktív függvénytan.*
(1952.)
PENTKOVSZKIJ, M. N.: *Nomográfia.*
(1959.)
PÉTER RÓZSA: *Rekursive Funktionen.*
(1951.)
PÉTER RÓZSA: *Rekursive Funktionen.*
II. kiadás.
(1957. Közös kiadás a berlini Akademie Verlag-gal.)
PETROVSZKIJ, I. G.: *Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről.*
(1951.)
PETROVSZKIJ, I. G.: *Előadások a parciális differenciálegyenletekről.*
(1955.)
PONTRJAGIN, L. SZ.: *Kombinatorikus topológia.*
(1955.)
RÉDEI LÁSZLÓ: *Algebra.*
I. kötet.
(1954.)
RÉDEI LÁSZLÓ: *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen.*
(1963. Közös kiadás a lipcsei B. G. Teubner Verlagsgesellschafttal és a würzburgi Physica-Verlag-gal.)
RIESZ FRIGYES: *Összegyűjtött munkái. — Oeuvres completes. — Gesammelte Arbeiten.* Két kötetben.
(1960. Közös kiadás a párizsi Gauthier—Villars kiadóval.)
RIESZ FRIGYES—SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Leçons d'Analyse fonctionnelle.*
(1952.)
RIESZ FRIGYES—SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Leçons d'Analyse fonctionnelle.*
(Második kiadás. 1953.)

RIESZ FRIGYES—SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Leçons d'Analyse fonctionnelle.* (Harmadik kiadás. 1955. Közös kiadás a párizsi Gauthier—Villars kiadóval.)
SURÁNYI JÁNOS: *Reduktiontheorie des Entscheidungsproblems in Prädikatenkalkül der ersten Stufe.* (1959. Közös kiadásban a berlini VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften-nel.)
SZÁSZ GÁBOR: *Bevezetés a hálóelméletbe.* (1959.)
SZÁSZ GÁBOR: *Einführung in die Verbandstheorie.* (1962. Közös kiadás a lipcsei B. G. Teubner Verlagsgesellschafttal.)
SZÁSZ GÁBOR: *Introduction to Lattice Theory.* (1963. Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.)
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Introduction to real functions and orthogonal expansions.* (1964. Közös kiadás az oxfordi University Press-szel.)
TURÁN PÁL: *Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól.* (1953.)
TURÁN PÁL: *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen.* (1953.)
TYIHONOV, A. N.—SZAMARSZKIJ, A. A.: *A matematikai fizika differenciálegyenletei.* (1956.)

b) FIZIKAI TÁRGYÚ MŰVEK:

Absorption Spectra in the Ultraviolet and Visible Region. LÁNG LÁSZLÓ szerkesztésében. (Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.) 1959-től eddig az Atlasz 5 kötete, továbbá az 5 kötet mutató kötete jelent meg. Egyes kötetek több kiadásban jelentek meg.
AHIJEZER, A.—BERESZTYECKIJ, V.: *Kvantumelektrodinamika.* (1961.)
AHIJEZER, A.—POMERANCSUK, I.: *Fejezetek az elméleti magfizika köréből.* (1954.)
BONCS-BRUJEVICS, A. M.: *Az elektroncső fizikai alkalmazásai.* (1952.)
BRODA, ENGELBERT: *A radiokémia újabb eredményei.* (1952.)
DOBRECOV, L. N.: *Elektron- és ionemisszió.* (1956.)
DUSHMAN, S.: *A vákuumtechnika tudományos alapjai.* (1959.)
EÖTVÖS LORÁND: *Gesammelte Arbeiten. — Összegyűjtött munkái.* (1953.)
FARAGÓ PÉTER—PÓCZA JENŐ: *Elektronfizika.* (1954.)
FENYVES ERVIN: *Atomsugárzások mérése.* (1956.)

FENYVES ERVIN—HAIMANN OTTÓ: *Die Physikalischen Grundlagen der Kernstrahlung-Messungen.*
(1965.)
FRENKEL JA. I.: *Bevezetés a fémek elméletébe.*
(1951.)
GOMBÁS PÁL: *Az atom statisztikus elmélete és alkalmazásai.*
(1955.)
GROSEV, L. V.—SAPIRO, I. SZ.: *Atommag-spektroszkópia.*
(1958.)
HEITLER, W.: *A sugárzás kvantumelmélete.*
(1959.)
HERZBERG, GERHARD: *Molekulaszínképek és molekulaszerkezet.*
I. köt. *Kétatomos molekulák színképe.*
(1956.)
II. köt. *Többatomos molekulák infravörös és Ramanszínképe.*
(1959.)
International Symposium on Luminescence.
(1962.)
IVANENKO, D.—SZOKOLOV, A.: *Klasszikus térelmélet.*
(1955.)
KEREKES ISTVÁNNÉ: *Tables for Emission Spectrographic Analysis of Rare Earth Elements.*
(1964.)
KUDRJAVCEV, P. SZ.: *A fizika története.*
Az antik fizikától Mengyelejevig.
(1951.)
LJOVSIN, V. L.: *Folyékony és szilárd anyagok fotolumineszcenciája.*
(1956.)
NOVOBÁTZKY KÁROLY: *A fizikai megismerés úttörői.*
(1959.)
Proceedings of the Symposium on Electron and Vacuum Physics, Hungary 1962.
(1963.)
SLATER, J. C.: *Mikrohullámú elektronika.*
(1954.)
SPOLSZKIJ, E. V.: *Atomfizika.*
I. köt. *Bevezetés az atomfizikába.*
(1954.)
II. köt. *Az atom elektronburka és az atommag.*
(1958.)
SPOLSZKIJ, E. V.: *Atomfizika.*
I. köt. *Bevezetés az atomfizikába.*
2. javított kiadás (1956).
SZKANAVI, G. I.: *A dielektrikumok fizikája.*
(1953.)
TARNÓCZY TAMÁS: *Akusztika.*
Fizikai akusztika.
(1963.)

UMANSZKIJ, J. SZ.—FINKELSTEIN, B. H.—BLANTER, M. E.: *A metallográfia fizikai alapjai.* (Az ötvözetek atomos szerkezete.)
(1952.)
VAVILOV, SZ. I.: *A fény mikrostruktúrája.*
(1955.)
VEKSZLER, V.—GROSEV, L.—ISZAJEV, B.: *Sugárzások vizsgálata ionizációs módszerekkel.*
(1952.)
VLASZOV, V. F.: *Vákuumcsövek.*
(1955.)
VONSZOVSZKIJ, SZ. V.: *Korszerű mágnességtan.*
(1956.)
WHITEHOUSE, W. J.—PUTMAN, J. L.: *Radioaktív izotópok. Bevezetés a radioaktív izotópok előállításába, mérésébe és alkalmazásába.*
(1955.)
ZEMPLÉN JOLÁN: *A magyarországi fizika története 1711-ig.*
(1961.)
ZEMPLÉN JOLÁN: *A magyarországi fizika története a XVIII. században.*
(1964.)
A II. Osztály gondozásában 1963-ban jelent meg JÁNOSSY LAJOS—ELEK TIBOR „*A relativitáselmélet filozófiai problémái*" című könyv.

c) CSILLAGÁSZATI TÁRGYÚ MŰ:

SCHMIDT, O. J.: *Négy előadás a Föld keletkezéséről.*
(1952.)

VII. Rendezvények

Az Osztály az elmúlt 15 évben a felolvasó üléseken kívül, részben a *Bolyai János Matematikai Társulat*tal, ill. az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat*tal közösen, részben pedig önállóan a következő tudományos ülésszakokat rendezte:

MATEMATIKA

I. Magyar Matematikai Kongresszus
(1950, Budapest)
Bolyai ülésszak
(1952, Budapest)
Konstruktív függvénytani kollokvium
(1953, Eger)
Valószínűségszámítási kollokvium
(1953, Balatonföldvár)
Geometriai kollokvium
(1953, Eger)
Differenciál-, integrál- és függvényegyenletekkel foglalkozó kollokvium
(1954, Balatonvilágos)
Algebrai kollokvium
(1954, Balatonvilágos)

Matematikai statisztikai kollokvium
(1954, Jósvafő)
Topológiai kollokvium
(1956, Balatonvilágos)
Geometriai kollokvium
(1956, Balatonvilágos)
Halmazelméleti, matematikai logika- és matematikai gépekkel foglalkozó kollokvium
(1956, Balatonvilágos)
Funkcionálanalízis kollokvium
(1958, Balatonvilágos)
A diofantikus approximáció kollokviuma
(1958, Balatonvilágos)
Monte-Carlo módszer kollokvium
(1958, Balatonvilágos)
Mátrixelmélet és alkalmazásai kollokvium
(1959, Budapest)
Biometriai szimpózium
(1959, Budapest)
Csoportok és általánosításaik kollokvium
(1959, Lajosforrás)
Sorelméleti kollokvium
(1959, Budapest)
Gráfelmélet kollokvium
(1959, Dobogókő)
II. Magyar Matematikai Kongresszus
(1960, Budapest)
Differenciál-, integrál- és függvényegyenletekkel foglalkozó kollokvium
(1961, Balatonvilágos)
Geometriai kollokvium
(1961, Balatonvilágos)
A matematika alapjai, matematikai gépek és alkalmazásaik kollokvium
(1962, Tihany)
Számelméleti kollokvium
(1962, Balatonvilágos)
A matematika közgazdasági alkalmazásai kollokvium
(1963, Budapest)
Abel-csoportok kollokvium
(1963, Tihany)
UNESCO tanfolyam
(1964, Budapest)
Topológiai kollokvium
(1964, Tihany)
A matematikai statisztika ipari alkalmazásai kollokvium
(1964, Budapest)
Lineáris terek és lineáris operátorok kollokvium
(1964, Balatonföldvár)

Fizika

I. Magyar Fizikus Vándorgyűlés
(1951, Pécs)
I. Magyar Fizikus Kongresszus
(1953, Budapest)
Relativitáselméleti kollokvium
(1955, Dobogókő)
Magfizikai kollokvium
(1955, Mátraháza)
Akusztika és ultrahang kollokvium
(1955, Budapest)
Spektroszkópiai ankét
(1956, Szeged)
Atommag fizikai kísérleti eszközök kollokvium
(1956, Debrecen)
Elektronfizikai kollokvium
(1956, Dobogókő)
Kozmikus sugárzási konferencia
(1956, Budapest)
Elemi részek fizikája kollokvium
(1957, Balatonvilágos)
Magfizikai kollokvium
(1957, Mátraháza)
Kristályfizikai előadássorozat
(1957, Mátraháza)
Elemi részek fizikája kollokvium
(1958, Balatonvilágos)
Gázkisülések fizikája kollokvium
(1958, Balatonvilágos)
Spektroszkópiai kollokvium
(1958, Budapest)
Szilárdtestfizikai kollokvium
(1959, Balatonfüred)
Magfizikai kollokvium
(1960, Balatonöszöd)
A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alkalmazása a fizikában kollokvium
(1960, Mátrafüred)
Lumineszcens kollokvium
(1961, Balatonvilágos)
Elméleti fizikai kollokvium
(1961, Balatonföldvár)
Soktestprobléma szeminárium
(1960-tól évenként folyamatosan Budapesten)
Magyar elméleti fizikai nyári iskola
(1962, Visegrád)

Nemzetközi nagyenergiájú fizikai konferencia
(1962, Tihany)
Elektron- és vákuumfizikai kollokvium
(1962, Balatonföldvár)
Plazmafizikai kollokvium
(1963, Balatonszabadi)
Elméleti fizikai nyári iskola
(1963, Mátrafüred)
VII. Európai Molekula-Spektroszkópiai Kongresszus
(1963, Budapest)
Alacsonyenergiájú magfizikai kollokvium
(1963, Tihany)
Sugárvédelmi kollokvium
(1963, Budapest)
Szilárdtestfizikai kollokvium
(1963, NDK)
A valószínűségszámítás fizikai alkalmazásai kollokvium
(1964, Mátrafüred)
A sokszabadsági-fokú rendszerek kvantumelmélete tárgykörű konferencia
(1964, Keszthely)
Félvezető nyári iskola
(1964, Balatonvilágos)
Elméleti fizikai nyári iskola
(1964, Mátrafüred)

CSILLAGÁSZAT

Változócsillag konferencia
(1956, Budapest)

VIII. Nemzetközi kapcsolatok

A külföldre történő kiutazások (tanulmányút, rendezvényeken való részvétel, meghívás stb.) megoszlása az elmúlt 15 évben évenként:

1950-ben	9 fő
1951-ben	2 fő
1952-ben	7 fő
1953-ban	18 fő
1954-ben	40 fő
1955-ben	53 fő
1956-ban	114 fő
1957-ben	118 fő
1958-ban	86 fő
1959-ben	109 fő
1960-ban	131 fő
1961-ben	199 fő
1962-ben	151 fő
1963-ban	145 fő
1964-ben	150 fő.

Az Osztálynak az utóbbi években egyre több lehetősége van arra, hogy akadémiai költségen kiemelkedő külföldi tudósokat hívjon meg előadások tartására. Így pl. 1964-ben akadémiai költségen hazánkat 27 matematikus, 24 fizikus és 7 csillagász tudós látogatta meg.

A szocialista országok akadémiáival kötött kétoldalú együttműködési egyezményben 1964-ben 14 matematikai, 5 fizikai és 5 csillagászati tárgyú téma szerepelt, amelyekben 1964-ben közös kutatások indultak meg vagy folytatódtak.

Az Osztály a következő többoldalú akadémiai közös kutatási témákban érdekelt:

a) A föld mesterséges bolygóinak megfigyelése.
b) A számítástechnika tudományos kérdései.
c) Félvezetők fizikája.

Kapcsolataink a nyugati világ tudósaival részben azoknak a nemzetközi szervezeteknek a keretei között bővültek, amelyekben nemzeti bizottsággal, ill. egyéni tagsággal rendelkezünk (*Nemzetközi Matematikai Unió, Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió, Nemzetközi Csillagászati Unió* stb.).

IX. A tudományos káderutánpótlás

1952-ben az egyszerűsített minősítések során tudományos fokozatot kapott:

matematikai tud. doktora	2 fő
matematikai tud. kandidátusa	15 fő
fizikai tud. doktora	1 fő
fizikai tud. kandidátusa	21 fő

A *csillagászok* közül:

tudományok doktora	1 fő
tudományok kandidátusa	2 fő

Tudományos minősítéssel rendelkezők száma 1965. március 1-ig:

matematikai tud. doktora	18 fő
matematikai tud. kandidátusa	54 fő
fizikai tud. doktora	15 fő
fizikai tud. kandidátusa	63 fő

*Csillagász*ok közül:

tudományok doktora	1 fő
tudományok kandidátusa	3 fő

Az osztályhoz tartozó tudományterületeken az *aspiránsok* száma jelenleg a következő:

belföldi ösztöndíjas és levelező aspiránsok	33 fő,
külföldi ösztöndíjas és levelező aspiránsok	7 fő.

X. Az Osztály testületei

Az Osztály munkájában az elmúlt években az az irányelv érvényesült, hogy az osztályvezetés minden elvi jelentőségű vagy általános kihatású ügyekben — szervezeti, gazdasági és személyi ügyekben is — a vezető testületnek, az Osztályülésnek, ill. az Osztályvezetőségnek, vagy a szakbizottságoknak kell állást foglalnia.

Az Osztály keretében az Osztályvezetőségen kívül jelenleg a következő testületek működnek:

Matematikai Bizottság,
Fizikai Bizottság,
Csillagászati Bizottság,
Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság (a VI. Osztállyal közös testület),
Nagyenergiájú és elemi részecskék fizikájának albizottsága (a Fizikai Bizottsághoz tartozik),
Magfizikai Albizottság (a Fizikai Bizottsághoz tartozik),
Atomhéjfizikai Albizottság (a Fizikai Bizottsághoz tartozik),
Spektroszkópiai Albizottság (a VI. és VII. Osztállyal közös testület),
Szputnyikmegfigyelési Albizottság (a Csillagászati Bizottsághoz tartozik).

XI. Az Osztály anyagi ellátottsága

Az Osztályhoz tartozó intézményekben dolgozók létszáma 1964. december 31-én összesen 386 fő volt. Ebből akadémiai intézetekben 335 fő, 51 fő pedig tanszéki kutatóhelyeken dolgozik. A költségvetés összege 1964-ben 20,7 millió Ft. Ebből akadémiai intézmények költségvetése 18,4 millió Ft, a tanszéki kutatóhelyek költségvetése pedig 2,4 millió Ft. Ebből az összegből 900,000 Ft volt az ún. céltámogatás összege.

Az 1964. évi beruházás összege: 8,221,000 Ft volt. Ebből kutatóintézeti beruházás 6,366,000 Ft, tanszéki beruházás pedig 1,855,000 Ft.

FÜGGELÉK

az Osztályvezetőség 1965. évi beszámoló-mellékletéhez

(A III. Osztályhoz tartozó akadémiai intézmények és az Osztály által anyagilag támogatott egyetemi intézetek 1964. évi kutatási eredményei.)

Matematikai Kutató Intézet

Az Intézetben 1964-ben 42 tudományos kutatási témával foglalkoztak. Valamennyi témában sikerült legalábbis részeredményeket elérni. A kutatási eredmények legnagyobbrészt tudományos cikkekben, közleményekben és tudományos tanácskozásokon elhangzott előadásokban öltöttek testet. A felkérésre folytatott munkáknál a munka eredményét zárójelentésben rögzítették; egyes esetekben pedig szolgálati találmányok formájában értékesült a kutatómunka.

A kutatómunka a következő témakörök köré csoportosult; valószínűségszámítás és annak közgazdasági alkalmazása, matematikai statisztika, biometria, numerikus, grafikus és gépi módszerek, differenciálegyenletek, valós függvénytan, konstruktív függvénytan, komplex függvénytan, funkcionálanalízis, matematikai logika és alkalmazásai, algebra, geometria, didaktika és a matematika története. Az intézeti tudományos kutatómunka 1964. évi mennyiségi eredményeit a következő adatok jelzik: elkészült az év folyamán 118 tudományos dolgozat, 24 — egyetemi szintű — tankönyv, illetve jegyzet és tudományos monográfia, és ezen kívül 24 ismertető jellegű, illetve népszerűsítő cikk és könyv. Az Intézet munkatársai az év folyamán 50 tudományos előadást tartottak hazai tudományos konferenciákon, illetve tudományos egyesületekben és 118 előadást tartottak külföldön. Ehhez kapcsolódik az Intézet 16 munkatársa által különböző szervek rendezésében tartott összesen 240 előadást felölelő tudományos tanfolyami előadói tevékenysége. Ezek az adatok nem tartalmazzák az intézeti dolgozóknak az Intézetben tartott előadásait és a felsőoktatásban vállalt közreműködését, valamint intézeti munkatársak külföldi vendégprofesszori tevékenységét.

Az 1964. évben végzett munka jelentősebbnek látszó eredményei a következők:

Bebizonyították, hogy az analitikus ívű tartományokhoz tartozó *Faber*-polinomkifejtés konvergenciája nem konform invariáns.

Bebizonyították, hogy minden szintopogén struktúra izomorfan beágyazható kompakt szintopogén struktúrába. Tisztázták bizonyos L. HADDAD által bevezetett struktúráknak a szintopogén struktúrák bővítésével való kapcsolatát.

Olyan valószínűségi változók szorzatára vonatkozólag, amelyek értékei egy kompakt topologikus csoport elemei, információelméleti módszerrel bizonyítottak be határeloszlástételeket. Ez a módszer az ilyen tételek lényegesen egyszerűbb bizonyítását teszi lehetővé, mint az eddig ismert módszerek és egyben új eredmények elérésére is lehetőséget nyújt.

Bevezették az új irány-struktúra fogalmát és ennek segítségével definiáltak egy új dimenzió fogalmat. Ezenkívül általánosították a lokálisan konvex lineáris tér fogalmát.

Teljesen megoldották a legsűrűbb *Minkowski*-féle körelhelyezés problémáját és kimutatták egy, a méhek lépénél gazdaságosabb, konvex cellákból álló lép létezését.

A részben rendezett univerzális algebrák alapfogalmait tisztázták és bebizonyítottak néhány ezekre vonatkozó alapvető tételt.

Értékes eredményeket értek el a hiperbolikus mozaikok lapjainak átlagos oldalszámára vonatkozólag.

Kimutatták a normális eloszlásnak mint határeloszlásnak a fellépését véletlen együtthatójú lineáris programozási feladatoknál, ha a probléma terjedelme a végtelenhez tart.

Alsó becslést adtak tetszőleges egyszeresen összefüggő membrán alapfrekvenciájára a membrán egy geometriai jellemzője segítségével. Az irodalomban eddig számos felső és néhány konvex tartományra vonatkozó alsó becslés ismeretes. Egyszeresen összefüggő, nem szükségképpen konvex membrán esetén eddig csak az ún. *Rayleigh*-féle sejtés bizonyítása révén lehetett az alaphang egy alsó korlátját megadni.

Bebizonyították *Mikusiński* egy, az operátorok hatványsoraira vonatkozó sejtését. Ezzel kapcsolatban adódott az inverz-limes fogalmának és a *Baire*-féle kategóriatételnek egy általánosítása. Az eredmény egy kb. 10 éve nyitott kérdést válaszol meg.

Általánosították *Hajós* alaptételét. Ezzel jelentős összefüggések álltak elő az algebra és a számelmélet különböző területei (hézagos polinomok véges teste felett, elemi számelmélet, *Gauss*-féle összegek elmélete) között.

A matematikai statisztika egy alapvető problémáját az információelmélet alapján új szempontból vizsgálták és sikerült bebizonyítani, hogy a független mintavétel során az ismeretlen diszkrét paraméterre vonatkozólag nyert információ exponenciális sebességgel konvergál a paraméterre vonatkozó teljes információhoz.

Multiplikatív számelméleti függvények középértékének létezését bizonyították be az eddig ismert feltételeknél jóval általánosabb feltételek mellett.

Új eredményeket értek el a részben rendezett félcsoportok elméletében, amelyek az eddig ismert tételeket sok szempontból általánosítják.

A kutatások során sikerült az ún. karakterisztikus függvény segítségével az általános *Hilbert*-térbeli operátorok szerkezetébe betekinteni. Kiderült, hogy a karakterisztikus függvény bizonyos faktorizációi segítségével következtetni lehet az invariáns alterekre. Ezen az úton az operátorok új, eddig nem tárgyalt osztályaira sikerült invariáns altér létezését bebizonyítani.

Teljesen váratlan új eredményeket értek el a racionális függvényekkel való approximáció elméletében.

Jelentős eredményeket értek el a differenciálegyenletekkel definiált egész függvények egy osztályának értékeloszlására vonatkozóan. Az eredmények a retardált differenciálegyenletekre alkalmazhatók.

A mozgó n-él módszerét kiterjesztették általánosabb differenciálgeometriai terekre és ezáltal sikerült a hiperfelületek bizonyos osztályai mellett különböző típusú *Finsler*-tereket is jellemezni.

Egzakt előállítást adtak a *Kolmogorov—Szmirnov*-próba erőfüggvényére speciális ellenhipotézisek esetén. Ezzel a próba aszimptotikus viselkedésére vonatkozó eredmények élesítését érték el.

A beszámolás évében az Intézetben 14 osztályszeminárium működött; összesen 290 előadás hangzott el a szemináriumokon. Az előadások jórészét az Intézet kutatói tartották saját munkájukról: kész vagy félig kész eredményeiket ismertették hozzáértő szűkebb kollektíva előtt és ennek megvitatása során további munkájukhoz szempontokat kaptak.

Az osztályszemináriumok mellett ebben az évben is folytatták a tavaly megindított *intézeti* szemináriumokat. Az intézeti szemináriumban a matematika egyes ágainak legújabb eredményeit és a matematika más ágaihoz való kapcsolódásait ismertető előadások hangzottak el, azzal a céllal, hogy az egész intézeti kollektíva *általános* matematikai tájékozottságának színvonalát emeljék. Az intézeti szemináriumok keretében 1964-ben 8 előadás hangzott el.

1964-ben az Intézet 146 külső megbízás elvégzésére vállalt kötelezettséget.

A külső kapcsolatok további formáját jelenti az Intézet együttműködési szerződése a *Távközlési Kutató Intézet*tel. Ennek keretében az elmúlt évben közös szeminárium szerveződött a TÁKI és az Intézet Valószínűségszámítási Osztálya munkatársainak részvételével.

1964-ben az Intézet 36 munkatársa járt külföldön tanulmányúton, kongresszusokon és ott 118 előadást tartottak.

Az elmúlt évben 30 külföldi tudós látogatta meg az Intézetet.

Az Intézet munkatársai 1964-ben 150 referátumot készítettek nemzetközi referáló folyóiratok számára. Az Intézet egyes munkatársai több külföldi, ill. nemzetközi folyóirat szerkesztésében vesznek részt.

Az Intézet vezetősége az elmúlt években fontos feladatának tekintette, hogy megteremtse a feltételeket a differenciálegyenletek terén a kutatás megerősítéséhez. Ezt a feladatot lényegében sikerült az Intézeten belül megoldani.

Ugyanakkor előtérbe kerül a matematika egy másik ágának elhanyagoltsága és korszerűtlen állapota. Ez pedig az ún. numerikus módszerek területe, beleértve ma már az elektronikus automatákon nyugvó numerikus módszerek kérdéseit is. Hazánkban sem az analógiás, sem a digitális számítástechnikában, de a klasszikus numerikus analízis területén sem folyik kielégítő kutatómunka. Ennek a hiányosságnak a megítélésénél nem hagyható figyelmen kívül az a körülmény, hogy a matematikai módszerek gyakorlati felhasználásának minden területén végül is a dolgok numerikus problémákká válnak éspedig rendszerint nagyméretű, igen számításigényes numerikus problémákká. Az áldatlan helyzet egyik forrása az, hogy a numerikus analízisnek és a számítástechnikának nincs Magyarországon egyetemi tanszéke. Így a fiatal matematikusok az egyetemi oktatás keretei között sem kapnak kellő ösztönzést arra, hogy erre a területre specializálják magukat. Kevés a numerikus analízis iránt érdeklődő matematikus.

A numerikus analízis elhanyagolt helyzetéhez hasonló a matematikai logikai kutatások helyzete is. Pedig a matematikai logikai kutatások jelentőségét ugyancsak éppen a korszerű számítástechnika és a matematika alkalmazási területeinek kiszélesítése szempontjából nem volna szabad lebecsülni. Az Intézet Szegeden működő Matematikai logika és alkalmazásai osztálya képtelen alapvető tudományos célkitűzéseinek irányában előre lépni, mert sem tárgyi, sem káderfeltételei nincsenek meg.

Szükséges felhívni a figyelmet itt arra, hogy a matematika egyes — különösen az alkalmazásokkal kapcsolatos — kutatási területein az elmúlt évben az erők fokozódó szétforgácsolódása és a hasonló jellegű kutatások párhuzamos szervezése figyelhető meg. Különösen vonatkozik ez a számítástechnikára és a matematika közgazdasági alkalmazásaira. Indokoltnak látszik, hogy a közeljövőben az Osztály e problémát megvizsgálja és intézkedéseket tegyen a kevésszámú erők koncentrált, jobb kihasználása érdekében.

Számítástechnikai Központ

A beszámolási évben a Központ az M-3 számológépre és a NIM, valamint a KGM Elliott 803-as gépeire készített a különféle megbízóknak programokat és ezeket lefuttatta.

Az M-3 gépet — amelyet 1965-ben a *Szegedi József Attila Tudományegyetemnek* adnak át — oktatási célra is felhasználták. Az MTA-n belüli igények mindinkább nőnek. Ezen igények nagy részét főleg az Elliott gépeken kapott időkből elégítették ki. Ezeken a gépeken gépi óránként 3000,— Ft. térítést kell fizetni. Ez több esetben elszámolási nehézséget okozott, ami jelentősen megnehezíti a kutatást és az új módszerek kipróbálását. A jelenlegi helyzet alapján is feltétlenül indokolt lenne, hogy az MTA egy korszerű számológépet kapjon. A külső gépparkon való munkaszervezés, valamint a kis üzembiztonságú M-3 gép jelentősen csökkentette a munka hatékonyságát.

A Központ az M-3 gépet, mint ismeretes Ural-2 géppel cseréli fel, ezt azonban az 1964. évben sem tudták üzembe állítani, mert a helyiségek nem készültek el. A jelenlegi tervek szerint a gépet csak ez év közepén állíthatják üzembe.

A Központ 1964-ben 33 külső megbízásos feladatot oldott meg.

Kutatómunkára a Központ a teljes munkakapacitás 30%-át fordította az elmúlt évben.

Az elmúlt évben több munkatárs került áthelyezéssel más intézményhez. Ez a körülmény bizonyos szempontból aggasztó, mert a Központ teljesen tehetetlen azzal a szívóhatással szemben, amit az ipari tárcák gyakorolnak.

A Központ munkatársai közül 1964-ben 12 fő 22 alkalommal járt külföldön tanulmányúton és tudományos ülésszakon. A Központot ezen időben 36 külföldi szakember látogatta meg.

A Központ munkatársainak tollából 1964-ben 21 önálló eredményt tartalmazó dolgozat jelent meg, főleg külföldi folyóiratokban.

A Központban 8 témával foglalkoztak:

a) *Programozáselméleti kutatások*

(Témafelelős: DÖMÖLKI BÁLINT, tud. munkatárs.)

A téma keretében megkezdődött a munka egy relatív címeket használó programnyelv és egy kezelőprogramrendszer kidolgozására vonatkozóan.

b) *Nem-aritmetikai feladatok gépi programozása*

(Témafelelős: SZELEZSÁN JÁNOS, tud. munkatárs.)

Az M-3 gépre egyszerűbb tanító és játszó programot készítettek. Egy kis oktatógép építése is megkezdődött.

c) *Automaták és algoritmusok elmélete*

(Témafelelős: FREY TAMÁS, a mat. tudományok kandidátusa.)

Részeredményt értek el a részleges automaták optimalizálása módszertanával, a diszkrét és folytonos automaták egységes elmélete kidolgozásában és a determinisztikus automatákkal történő átkódolással kapcsolatban (4 dolgozat).

d) *Kibernetikai módszerek alkalmazása a nyelvészetben*

(Témafelelős: KIEFER FERENC, tud. munkatárs.)

Elkészítették az orosz morfológiai analízis teljes gépi programját és a szintaktikai elemzésre vonatkozóan néhány programot (2 dolgozat).

e) *Nagyméretű lineáris és nem-lineáris feladatok gépi numerikus módszerei*

(Témafelelős: GERGELY JÓZSEF, tud. munkatárs.)

Meghatározták a nagy rendszámú mátrixok inverzét és sajátértékeit.

f) *Gazdaságtervezési problémák vizsgálata*

(Témafelelős: KORNAI JÁNOS, a közgazdasági tud. kandidátusa.)

Több vonatkozásban eredményesen alkalmazták a korszerű matematikai módszereket a gazdaságtervezési problémák megoldására.

g) *Gazdaságigazgatási feladatok*

(Témafelelős: KISS IMRE, tud. munkatárs.)

Elkészült egy gépi adattárolási és feldolgozási módszer az igazgatási tevékenység elvégzéséhez szükséges műszaki alapinformációk vonatkozásában vertikális termékeket előállító vállalatok számára. Egyidejűleg elkészült a kódolási módszer is.

h) *Digitális berendezések rendszertechnikájának kutatása*

(Témafelelős: KOVÁCS GYŐZŐ, tud. munkatárs.)

Elvileg megoldották a ferranti gyorsbevivő *Creed* gyorskiíró berendezés illesztését. Elkészítették a stabilizált tápegység laboratóriumi példányát.

Központi Fizikai Kutató Intézet

1. *A fizika egyes alapkérdéseinek vizsgálata*

(FIZIKAI OPTIKAI LABORATÓRIUM)

A fizika egyes alapkérdéseinek területén kiemelkedik a koherens fénynyalábok intenzitáskorrelációjának részletes, a geometriai paraméterekre kiterjedő vizsgálata. Ezzel lezárult egy, a fizika alapkérdéseire vonatkozó kísérletsorozat.

Elkészült egy He-Ne gázlaser, és egy szilárdtest (rubin) laseren folytatott tanulmányok alapján megkezdődött egy hazai tervezésű rubin-laser építése is.

Figyelemre méltó eredmény született a He 3^1S és a 4^3S nívók élettartameloszlásfüggvényének a meghatározásánál.

2. *Nagyenergiájú részecskék fizikája*

(KOZMIKUS SUGÁRZÁSI LABORATÓRIUM)

Az elért eredmények közül legjelentősebb a *Regge*-pólus közelítésére vonatkozó megállapítás. Az utóbbi években az erősen kölcsönható elemi részecskék nagyenergiájú szóródásának leírására előszeretettel alkalmazták a *Regge*-pólus közelítését. Az irodalomból hozzáférhető $\pi^- - p$, $\pi^+ - p$, $K^+ - 0$, $p \to p$ rugalmas szóródási adatokat megvizsgálva és a szóródási amplitúdóra az exakt egy *Regge*-pólus hozzájárulást használva kitűnt, hogy az egy *Regge*-pólus közelítés határozottan inkonzisztens a kísérleti adatokkal. Ezek után plauzibilis, hogy általában a *Regge*-pólus közelítés nem alkalmas a rugalmas szórás leírására.

Az 1. és 2. témakörrel kapcsolatban a munkatársak tollából 13 publikáció jelent meg.

3. *Kisenergiájú magfizikai kutatások*

a) *A direkt folyamatok tanulmányozása*

Előkészítő munkát végeztek a (d, p) reakciókból származó protonok szögeloszlásának az energia függvényében történő meghatározásához.

Felvették a $C^{12}(d, p)C^{13}$ magreakció alapállapotra vezető protonjainak szögeloszlását néhány energián. Megkezdték az EG-2-es gyorsító mellett a magreakciók vizsgálatát. Megnézték a (*d, p*, gamma) szögkorrelációt a B^{10} (*d, p*, gamma) B^{11} reakció esetében és megkezdték a $Ca^{40}(d, p)$ Ca^{41} reakció kísérleti vizsgálatát. A neutronproton kölcsönhatás hatótávolságának végességét figyelembe vevő egyszerű formulát adtak meg a strippingreakció mátrixelméletének a számítására, amely jelentős új eredmény a (*d, p*) reakciók elméletében.

b) *Magspektroszkópiai kutatások*

Új rezonanciákat kerestek S^{34}(p, gamma)Cl^{35} magreakció esetén, azonban ilyen rezonanciákat, bár azok elvi megfontolások alapján várhatók voltak, nem találtak. A Ta^{181} mag gerjesztett állapota mágneses nyomatékát belső mágneses tér segítségével kívánták meghatározni. Belső teret nem tudtak kimutatni. Az Au^{198} mag esetében meghatározták belső tér segítségével a mágneses nyomatékot. Az Ir^{192} és Ir^{194} magoknál 4 további mágneses nyomaték értékét határozták meg. Az Au^{197} magon kimutatták a *Mössbauer*-effektust és azt sikerrel alkalmazták a Cu—Au ötvözet tanulmányozására. Új eredményeket adó vizsgálatokat végeztek vízben oldott ferro- és ferrisókon lefagyasztott állapotban.

Izomer hatáskeresztmetszet-viszonyt mértek termikus energián Sr^{87}(n, gamma)Sr^{188m} reakciókban. Az Atommag Kutató Intézettel kooperálva meghatározták Br^{79}(n, gamma), Br^{80}, ^{80m} reakcióban az izomer hatáskeresztmetszet-viszony energiafüggését.

c) *Maghasadási vizsgálatok*

Elkészítettek egy kettős ionizációs kamrát és megkezdték vele a hármas hasadásoknak a kettes hasadásokhoz viszonyított gyakoriságának mérését. Előzetes eredményeket kaptak az U-235 termikus neutronok hatására történő hármas hasadásának relatív gyakoriságára. Befejezték az U-235 hasadási termékeiből kirepülő, két különböző küszöbenergiájú, gammasugár szögeloszlásának, továbbá promt neutronok szög- és energiaeloszlásának mérését termikus neutronokkal történő hasadás esetén. A gammasugarak szögeloszlására vonatkozó adatok alapján következtetés vonható le a maghasadás mechanizmusára.

4. *Részecskegyorsító berendezések fejlesztése és üzemeltetése*

Megtörtént az Eg-2 berendezés töltőfeszültségének stabilizálása, majd sor került egy elektródás üzemeltetés megvalósítása mellett a koronatriódás stabilizátor beépítésére, ideiglenes próbaáramkörrel.

Elvégezték az EG-2 generátor vízszintes ioncsatornáján a beállítással kapcsolatos munkákat és a kisosztórendszer üzembe helyezéséhez szükséges előkészítő munkákat. Technológiai módszereket dolgoztak ki nagyszilárdságú gyorsítócsövek készítéséhez, és kikísérleteztek olyan elektródalakot, amelynél egy szekcióval 3 MV/m átütési szilárdságot lehetett elérni.

Kidolgoztak egy 500 órás élettartammal rendelkező nagyfrekvenciás ionforrást az EG-2 generátor számára, egy ugyancsak nagyfrekvenciás típusos, 2—400/us időtartamú impulzusokat szolgáltató ionforrást és egy vezérelhető elektronágyút az EG-1 elektrongyorsítóban történő felhasználásra. Mindezeken a berendezéseken részletes vizsgálatokat végeztek el az optimális működési paraméterekre és a részecskenyaláb minőségére vonatkozóan.

Az EG-2 generátor üzembiztosan 2 MeV-es, néhány uA-os ionnyalábot képes szolgáltatni 0,1%-nál jobb stabilitással.

A 3. témakörrel kapcsolatban a munkatársak tollából 28, a 4. témakörrel kapcsolatban pedig 5 publikáció jelent meg.

5. *Fázisátalakulások vizsgálata*

(SZILÁRDTESTFIZIKAI LABORATÓRIUM)

Megmutatták, hogy az FeRh ötvözetben az antiferromágneses és a ferromágneses fázis egy bizonyos hőmérsékleti intervallumban koegzisztál. Meghatározták Fe—Rh ötvözetek fontos termodinamikai jellemzőit: az átalakulási hőmérséklet és a látens hő koncentrációfüggését.

Az Fe—Rh ötvözet mágneses intenzitása hőmérsékletfüggésében nagyobb mágneses térerősségeknél anomáliát találtak. Ezzel kapcsolatban termodinamikai elméletet dolgoztak ki, amely a jelenséget a nagy térerősség hatására fellépő „ferde" mágneses szerkezettel magyarázza.

Meghatározták az $FeGe_2$ kristály antiferromágneses állapotában a spinelrendeződést.

Réz kvázi-egykristályon mérték a közel Fermi-energiával rendelkező vezetési elektronok által keltett lokális mágneses tér értékét az atommag helyén, és megállapították, hogy az a kristálytani iránytól független.

Kimutatták, hogy plasztikus deformáció hatására alumíniumfóliákban az atommagok mikrokörnyezetének közös szimmetriája lecsökken, hőkezelés hatására az eredeti szimmetria helyreáll.

A kutatásokkal kapcsolatban számos technológiai, technikai vizsgálatot, tervezési, ill. fejlesztési munkát végeztek.

A munkatársak a témakörrel kapcsolatos kutatási eredményeket 17 publikációban tették közzé.

Atommag Kutató Intézet

Az Intézet munkatársainak tollából 1964-ben 34 tudományos közlemény jelent meg, vendégkutató tollából pedig 1 közlemény. A közlésre beküldött dolgozatok száma 1964-ben 18.

A folyamatban levő kutatásokkal párhuzamosan a kutatómunka lehetőségeinek további biztosítása végett erőteljesen foglalkoznak az Intézetben új módszerek bevezetésével és modern mérőberendezések kifejlesztésével. Így pl. folyamatban van a töltött részecske reakciók vizsgálatánál félvezető spektrométer alkalmazása, gázcintillációs neutron-spektrométer kifejlesztése, továbbá egy 1 MV-os nyomásgenerátor építése, amely a magfizikai kihasználáson túlmenően hasznos tapasztalatot nyújthat egy nagyobb gyorsító tervezéséhez és építéséhez. A magspektroszkópiai kutatások céljaira hitelesítés alatt áll egy világviszonylatban is kiemelkedő energiafelbontású (a tervek szerint nagyságrendileg 0,01%) permanens mágneses spektográf. Elkészült egy proporcionális számláló beta-spektrométer, melynek energiafelbontása eléri az irodalomban közölt legjobb értékeket (5 KeV-nél 17%). Folyamatban van a félvezető detektor-technika alkalmazása a betaspektroszkópiában. A gyorsneutron-reakciók vizsgálatára elkészült egy teleszkóprendszerű proton-spektrométer és kifejlesztés alatt áll egy gáz-recoil neutron-spektrométer. Vizsgálatokat végeznek a tömegdiszkrimináció lehetőségére, félvezető detektoroknál. A modern elektrotechnikában mutatkozó lemaradás megszüntetésére az Intézetben Nukleáris Elektronikai Csoportot szerveztek.

Az ATOMKI külső kapcsolatai a korábbi évekhez hasonlóan 1964-ben is számottevőek voltak. A *KFKI Magfizikai Főosztály*a és az *ATOMKI Neutronfizikai Osztály*a közötti konkrét téma-kooperáció 1964-ben eredményesen befejeződött. Szoros kapcsolat áll fenn a *KFKI Sugárvédelmi Osztály*a és az ATOMKI között egyrészt a gyorsneutron dozimetria terén, másrészt közös mérés történt az elektronbefogással együttjáró belső fékezési sugárzás keletkezési mechanizmusának tisztázására vonatkozóan. A KFKI *Magfizikai Főosztályá*nak több munkatársa tapasztalatcsere látogatást tett az ATOMKI-ban. A KFKI *Gyorsító Laboratoriumá*val kölcsönös látogatások és tapasztalatcserék formájában tartja az Intézet a kapcsolatot.

Az Intézet nemzetközi kapcsolatai 1964-ben jelentősen javultak. Az Intézet *Alfa-spektroszkópiai Csoportjá*nak dubnai eredményes szereplése nagymértékben hozzájárult a két intézet kapcsolatainak elmélyüléséhez; együttműködési megállapodás történt az *ATOMKI Magspektroszkópiai Osztály*a és az *EAKI Magproblémák Laboratórium*a között magspektroszkópiai kutatások vonatkozásában. Az EAKI nyomásgenerátorainak továbbfejlesztésére és kihasználására vonatkozóan az ATOMKI együttműködési javaslatot készített, amelynek keretében a nyalábhelyzet és iránykorrigáló elektronoptikai rendszer felépítését, valamint He^{3++} ionforrás kidolgozását vállalja az Intézet. Együttműködési javaslat kidolgozása van folyamatban nukleáris elektronika terén az *EAKI Magproblémák Laboratóriumá*val.

Az Intézet két munkatársa 1965-ben két évre Dubnába utazik, ahol a protonradioaktivitás és a késleltetett protonemissziók vizsgálatát végzik. Az ATOMKI egyik munkacsoportja a rossendorfi intézettel közös témán dolgozik. Jó kapcsolat alakult ki az *ATOMKI Neutronfizikai Osztálya* és a zágrábi *R. Boskovic Intézet* között. 1964-ben egy német aspiráns kezdte meg az ATOMKI-ben végzendő hároméves aspirantúráját.

Az ATOMKI munkatársai közül 24-en vettek részt külföldi konferenciákon és tanulmányúton 1964-ben.

Az Intézetet az 1964. évben 22 külföldi fizikus látogatta meg.

Az ATOMKI közleményeket 1964-ben 156 belföldi és 99 külföldi intézménynek küldték meg rendszeresen. Az ATOMKI Közleményekért belföldi intézményektől 20 cserefolyóiratot kaptak és 27 külföldi intézménnyel állnak cserekapcsolatban.

Az Intézet a tudományos kutatómunka során kifejlesztett vákuumtechnikai berendezéseit 1964-ben felajánlotta ipari gyártásra az *Egyesült Izzó*nak. 1964-ben szocialista szerződés jött létre az ATOMKI és a *Gamma Optikai Művek* között a kutatás és termelés közötti szoros együttműködés elősegítésére a nukleáris elektrotechnika területén. Az elmúlt évben az Intézet kezdeményezte az *Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság*nál egy az ATOMKI irányítása alatt működő külső megbízásokat is vállaló műhelyrészleg létesítését. Az ATOMKI rendszeresen képez ki ipari tanulókat a saját szükségletén kívül az ipar számára is (üvegtechnikus, elektronikai műszerész, mechanikai műszerész, asztalos, fényképész).

Az intézeti szemináriumok keretében az Intézet kutatóit általánosan érdeklő problémák kerülnek előadásra, ill. megvitatásra. Az elmúlt évben pl. tranzisztortechnika, a kísérleti adatok statisztikus kiértékelése, a csoportelmélet fizikai alkalmazásai, térelméleti módszerek című szemináriumok kerültek megrendezésre.

Az Intézetben 5 témával foglalkoztak:

a) *Töltött részecskékkel létrehozott magreakciók vizsgálata*

(Témafelelős: SZALAY SÁNDOR, lev. tag.)

Befejeződött a $N^{14}(d, n)O^{15}$ reakcióból eredő gyorsneutronok szögeloszlásra és energia-spektrumára vonatkozó mérések. A fotóemulziós módszerrel végzett vizsgálatok eredményeinek feldolgozása folyamatban van. A B^{10} (p, gamma)C^{11} magreakció tanulmányozásához kidolgozták a vékony bőrrétegek előállításának technikáját. Megvizsgálták a 10 MeV energiájú polarizált protonok Se^{78} magon történő rugalmas szórását. A fotoemulziós módszerrel végzett mérések befejeződtek. A kapott kísérleti adatok végleges feldolgozásához még kontroll-mérésekre van szükség.

b) *Gyorsneutronokkal létrehozott magreakciók vizsgálata*

(Témafelelős: CSIKAI GYULA, a fizikai tudományok kandidátusa.)

Az Intézet munkatársai kísérletet végeztek az (n, He^3) reakció kimutatására. A vizsgálatot a Cs^{133} magon végezték el, a kedvező felezési idők, valamint a viszonylag egyszerű radiokémiai szétválasztási lehetőség miatt.

Tovább folytak a vizsgálatok az izomer-hatáskeresztmetszet-viszonyok meghatározására.

Kimutatták a $Mo^{92}(n, 2n)Mo^{91m}$ reakció létrejöttét 14,8 MeV neutronenergiánál. Meghatározták az izomer-hatáskeresztmetszet-viszonyt, valamint a fenti reakció hatáskeresztmetszetét.

Szerves kristályos gyorsneutron-detektorokat készítettek, amelyeknél a gamma-, valamint a kisenergiájú szórt neutronok által okozott hátteret 2—3%-ra sikerült csökkenteni. Ez lehetővé teszi a gyorsneutron totális hatáskeresztmetszet kis anyagmintán történő meghatározását, valamint várhatólag a totális hatáskeresztmetszetben jelentkező fluktuáció mérését is. A berendezés hitelesítése után a Rb és Cs magoknál meghatározták a totális hatáskeresztmetszetet 14 MeV energiájú neutronokra (az említett magokra ezek az első mérési adatok.)

A $Mo^{92}(n, 2n)Mo^{91g}$ reakció gerjesztési függvényében 13,5—14,7 MeV bombázó neutron energiatartományban finomenergia felbontás mellett fluktuációt észleltek. A gerjesztési függvényben tapasztalható fluktuációk természetének pontosabb felderítése végett az (n, 2n) reakciók hatáskeresztmetszetének energiafüggését — az említett energiatartományban — több magnál (N^{14}, F^{19}, Ni^{58}, Cu^{63}, Cu^{65}, Zn^{64}, Ag^{107}, Au^{197}) megmérték.

c) *A radioaktív bomlás során emittált könnyű részecskék spektroszkópiai vizsgálata*

(Témafelelős: BERÉNYI DÉNES, a fizikai tudományok kandidátusa.)

E témakör keretében a kutatómunka az *elektronbefogás és a pozitron emittálás közötti elágazási* viszony mérésére koncentrálódik. Az ilyen vizsgálatok eredményeitől részben az elágazás jelenségével kapcsolatos problémák tisztázása várható, részben pedig elősegítik a magstruktúra mélyebb megismerését. 1964-ben a *Co^{56}* Fe^{56} 2085 keV-os állapotába történő *1-tiltott átmenetére* vizsgálták meg az elágazási viszonyt három különböző módszerrel. Ezzel kapcsolatban bizonyos általánosabb áttekintést is végeztek és az irodalomban először mutattak rá egy olyan általános következtetés lehetőségére, hogy az elektronbefogás és a pozitron emittálás közötti elágazási viszony l-tiltott átmeneteknél nem különbözik a megengedett értéktől.

További eredmény a Cs^{133} második gerjesztett állapota élettartamának megmérése, amely hozzájárul a Cs—133 ezen egyik legproblematikusabb alacsony energiájú nívója természetének és spinjének meghatározásához.

d) *A radioaktív bomlásból származó alfa-részek spektroszkópiája*
(Témafelelős: FÉNYES TIBOR, a fizikai tudományok kandidátusa.)

A vizsgálatokat az Intézet munkatársai az *Egyesített Atomkutató Intézetben* (Dubna) végezték neutrondeficites izotópok esetében.

A Ta, ill. Au 660 MeV-es protonokkal létrehozott spallációs termékei közül a Gd-148, Gd-149, Tb-149, Tb-150 (új alfa-sugárzó) Tb-151, Dy-151, Dy-152, Dy-153, Dy-154 nuklidoknál a felezési időt, az alfa-részecske energiát és az alfa-parciális felezési időt határozták meg. A nem új alfa-sugárzóknál a a bomlásenergiát 2—15-ször, a parciális felezési időt 2—4-szer kisebb hibával sikerült meghatározni, mint a korábbi méréseknél az irodalomban. Bizonyos esetekben a teljes felezési idők hibáját is sikerült csökkenteni.

Határadatot adtak be a Tb-152 parciális felezési idejére, továbbá a Tb-151, illetve a Dy-153 finomszerkezeti vonalának relatív erősségére.

Az Intézet munkatársai a dubnai *EAKI Magproblémák Laboratóriuma Magspektroszkópiai Osztályá*nak felkérésére szovjet kollégákkal közös vizsgálatot végeztek a spallációs folyamatok szekunderreakciójával kapcsolatban. Megvizsgálták a proton-energia függvényében az At izotópok alfa-spektrumát a $Ri \underset{+}{+} p$ spallációs reakciónál keletkező alfa-részecskék által kiváltott Bi^{+}alfa reakció hozamának meghatározása céljából.

e) *Magfizikai és radioaktív módszerek alkalmazása más tudományokban*
(Témafelelős: SZALAY SÁNDOR lev. tag.)

A korábbi évek vizsgálatai igazolták, hogy az urán oldódása kőzetekből nem egyszerűen a finomszemcsézettséggel arányos sebességgel történik, hanem a kőzetvíz fázis között adszorpciós egyensúly jön létre. Az általános geokémiai törvényszerűség keresése érdekében kívánatosnak látszott a vizsgálatokat különböző eredetű gránitokon elvégezni. 1964-ben 2 hazai és 4 külföldi gránitmintánál végeztek vizsgálatokat. Az analitikai eredmények teljes mértékben igazolták a korábbi eredményeket és az általános geokémiai törvényszerűség levonására irányuló feltevéseket.

Befejezést nyert a magyarországi ólomércek izotópösszetételének vizsgálata. Vizsgálták a Kárpát-medence néhány más előfordulásából, valamint Európa más területeiről származó ólomminta izotópösszetételét is. Befejezték az ólomizotóp-arányok értelmezésére kialakított valószínűségi modell részletes kidolgozását. Megvizsgálták a Szovjetunió kutatólaboratóriumaiban radioaktív kormeghatározásoknál standardként alkalmazott urán-szurokérc- és mozanitmintákat mind kémiai összetétel, mind a bennük található ólom izotópösszetétele szempontjából.

Befejezést nyert az Intézetben az 1963 őszén Helsinkiben a Rb-87 izotóp felezési idejének meghatározását célzó munka.

Elméleti Fizikai Kutató Csoport

A Csoport élénk szakmai kapcsolatot tart fenn a budapesti *Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékével*, a *Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetével*, az *Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetével* és a *Központi Fizikai Kutató Intézettel*.

Leningrádban, Moszkvában és Okayamában szovjet és japán fizikusok a csoport kutatásaival sok tekintetben rokonvizsgálatokat végeznek. A munkatársak közül az elmúlt évben nyolcan vettek részt külföldön tartott rendezvényen, ill. külföldi tanulmányúton.

A Csoportban 8 témával foglalkoztak:

a) *Az atomok statisztikus elméletének vizsgálata*

(Témafelelős: GOMBÁS PÁL, akadémikus.)

Sikerült megállapítani atomokban az elektronok eloszlását a különböző energianívókra mind az eredeti *Thomas—Fermi* modellben, mind az elektronoknak a mellékkvantumszám szerinti csoportosításával finomított modellben. Az eredmények a *Hartree—Fock*-féle eloszlásokkal jól egyeznek. Figyelembe lett véve az elektronok kicserélődési és korrelációs kölcsönhatása a főkvantumszám szerint csoportosított statisztikus atommodellben. Így a hullámmechanikai eredményekkel való egyezés tovább javult.

Sikerült megadni a kvantumszámoknak megfelelő mennyiségek definícióját. Ennek alapján közelítő tervszámítások történtek (5 dolgozat).

b) *Az atommagok statisztikus elméletének vizsgálata*

(Témafelelős: GOMBÁS PÁL, akadémikus.)

Számítások történtek az atommagok elektromos formafaktorának meghatározására a statisztikus magmodell alapján. Vizsgálatok történtek az igen nagy nyomású és igen nagy sűrűségű, teljesen neutronokból álló anyag állapotegyenletére vonatkozólag. A vizsgálatok alapjául a statisztikus magmodell alapján megállapított félempirikus nukleon-nukleon kölcsönhatás szolgált. Az eredmények a csillagszerkezeti kutatásokban alkalmazhatók (1 dolgozat).

c) *Többvalenciás fémek és félvezetők elektronszerkezetének vizsgálata*

(Témafelelős: GÁSPÁR REZSŐ, a fizikai tudományok doktora.)

Befejezést nyert a nemesfémek atomjaira végzett számítások és a periódusos rendszer VI. oszlopában levő elemek atomjaira végzett számítások feldolgozása és publikálása. Legutolsóként a szelén atommal kapcsolatos számítások folytak. A fenti számítások megadják az egyelektron hullámfüggvényeket és a potenciált, melyek szükségesek a szilárdtestek elméleti tárgyalásához. A nemesfémek tárgyalásának előkészítését megkezdték, a kristálypotenciál meghatározása pedig folyamatban van.

Megvizsgálták az izoelektronos korrelációs energiára vonatkozó tétel kiterjeszthetőségét molekulákra. A számítások azt mutatják, hogy az izoelektromos korrelációs energiát egy az atommagok számított konfigurációjával összefüggő taggal kiegészítve, az atomok, illetve ionokra vonatkozó tételhez hasonló tétel adható meg molekulákra is.

Sikerült a konfigurációs kölcsönhatás módszerének továbbfejlesztése. A *Schmidt*-féle ortogonalizálás helyett modell *Hamilton* operátorral való ortogonalizálást vezettek be. Modell potenciálnak az univerzális potenciált választották (2 dolgozat).

d) *Kristályok hibahelyei és az ezzel kapcsolatos jelenségek vizsgálata*

(Témafelelős: KÓNYA ALBERT, levelező tag.)

Sikerült az egydimenziós modellt tovább finomítani a második szomszédok közötti kölcsönhatás és az átfedés figyelembevételével. Tovább folytatódott a kétdimenziós modell alapsajátságainak vizsgálata.

A fémek rugalmas tulajdonságainak vizsgálatánál figyelembe vették a deformált *Wigner—Seitz* gömbök közötti kölcsönhatásokat. Számítások folytak egyvalenciás fémeknél a multipol kölcsönhatások figyelembevételével.

e) *Kovalens molekulák vizsgálata*

(Témafelelős: KAPUY EDE, a fizikai tudományok kandidátusa.)

Megvizsgálták az r_{ij}-től függő tagok alkalmazhatóságának feltételét többelektron hullámfüggvényben. Mivel a szigorú ortogonalitás ilyen tagok alkalmazása esetén sérül, a variációs módszerre nyert energia csak abban az esetben nem süllyed az egzakt alá, ha az elektronpárok különböző térrészekre vannak lokalizálva. Ebben az esetben az erős ortogonalitás automatikusan majdnem teljesül (jó közelítéssel).

Sikerült kimutatni, hogy a különböző pályák különböző spinekre közelítés egy speciális esete a szeparált elektronpár közelítésnek. Így kiderült, hogy „alternant molecular orbital" közelítés is bennfoglaltatik a szeparált elektronpár közelítésben. Ez lehetőséget ad arra, hogy az „alternant molecular erbital" közelítést továbbfejlesszék anélkül, hogy a formalizmus bonyolultabbá válna (2 dolgozat).

f) *Vizsgálatok elemi részecskék nem-lineáris elmélete terén*

(Témafelelős: LADÁNYI KÁROLY, a fizikai tudományok kandidátusa.)

A sok pont amplitúdó közelítő meghatározása céljából egy nem-perturbációs közelítést dolgoztak ki. A módszer a szokásos *Tamm—Dancoff* eljárás általánosításának tekinthető. Az alapegyenlet lokális és nem-lineáris karaktere rögzíti a self-consistent határfeltételeket. A self-consistencia lehetőségeket nyújt a tömegek és csatolási állandók számítására. A közepes és elektromágneses szimmetria sérülés értelmezése céljából a munkatársak felteszik, hogy e szimmetria sérülések dinamikája hasonló a mérték invariancia sérüléséhez a szupravezetés elméletében (2 dolgozat).

g) *Kvantummechanikai többtestprobléma közelítő módszereinek fejlesztése*

(Témafelelős: KISDI DÁVID, a fizikai tudományok kandidátusa.)

A momentumok módszerének alkalmazása az eddig az irodalomban szereplő *Coulomb*-integráloknál lényegesen magasabb fő- és mellékkvantumszámú *Slater*-pályák közötti *Coulomb*-integrálok kiszámítását igényli. Ilyen esetekben az irodalomban leírt módszerek alkalmazása jelentős számítástechnikai nehézségekkel jár. Sikerült ezeknek az integráloknak a kiszámítására olyan módszert kidolgozni, mely a momentumok módszerének alkalmazásakor fellépő esetekben is viszonylag egyszerűen alkalmazható.

A maganyag alapállapotára vonatkozó impulzus-eloszlási függvényt a *Bogoljubov*-féle integrálegyenletekből numerikusan meghatározták, a nukleonok között egy nem-lokális *Yamaguchi* potenciált tételezve fel. Az integrálegyenletrendszer megoldása egy négyparaméteres közelítő eloszlásfüggvény paramétereinek meghatározásával történt. Az eredmények a továbbiakban felhasználhatók a maganyag sűrűségkorrelációinak meghatározására.

Vizsgálatok történtek a *Landau*-féle *Fermi*-folyadék elméletének véges *Fermi*-rendszerekre való kiterjesztésére és az atommagok *Coulomb*-effektusainak meghatározására a *Landau*-módszerrel (2 dolgozat).

h) *Einstein terekkel kapcsolatos vizsgálatok*

(Témafelelős: SÜVEGES MÁTÉ, tudományos munkatárs.)

Sikerült megtalálni a *Shell* klasszifikáció fizikai jelentését. A *Green*-függvényes módszerrel tárgyalták az etilén molekula plazma rezgéseit, ez lehetővé tette a korrelációs energia (és más fontos fizikai állandók) meghatározását (1 dolgozat).

Csillagvizsgáló Intézet

Az intézethez két obszervatórium tartozik: a szabadsághegyi és a piszkéstetői. Ezenkívül az intézet fenntart egy szputnyikmegfigyelő állomást és ellenőrzi a bajai, szombathelyi és miskolci állomásokat. Az intézet azáltal, hogy vezetőjét 1964 augusztusában kinevezték az *ELTE Csillagászati Tanszékére* tanszékvezető egyetemi tanárnak, kezébe vette a hazai káderképzést is.

Az intézet 1964-ben is jelentős eredményeket ért el a legrégebbi munkaterületén, a változócsillag-kutatásban.

A hazai szputnyikállomások intenzíven kivették részüket a hazai kezdeményezésű *Interobs*-programban és megkezdték a kooperatív megfigyelések kiértékelését.

Az elméleti csillagászat terén magnetohidrodinamikával, kozmológiával, égi mechanikával és stellárstatisztikával foglalkoznak és ezen témakörökből is több dolgozatot jelentettek meg.

Az intézet a NEMZETKÖZI CSILLAGÁSZATI UNIÓ *Information Bulletin on Variable Stars* c. kiadványának 41—76. számait jelentette meg és küldte szét az év folyamán. A Mitteilungen sorozat 54. számát szétküldték, az 55—57. számait nyomdába adták. Az intézet 450 külföldi intézménnyel áll csereviszonyban.

Az intézet munkatársai közül 9-en vettek részt külföldi tanulmányúton, ill. külföldön rendezett kongresszusokon.

A szabadsághegyi és piszkéstetői obszervatóriumot 1964. év folyamán 13 külföldi vendég látogatta meg, közülük többen hosszabb-rövidebb ideig kutatómunkát is végeztek.

Az intézet személyzete tevékenyen részt vett a szakpropagandában, különösen a TIT keretében, ismeretterjesztő cikkek írásával és előadások tartásával.

Az intézetben 4 témával, ill. témacsoporttal foglalkoztak.

I. *Változócsillagok vizsgálata*

(Témafelelős: BALÁZS JÚLIA, tud. főmunkatárs.)

1. *RR Lyrae-csillagok és mágneses változók fizikai természete*

A többszörös periódusú csillagok természetére témafelelős által felvetett hipotézissel igen komolyan foglalkozik az *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 2. kötetében PRESTON amerikai csillagász, az *RR Lyrae*-csillagokról írt referátumában. Az amerikai nagy teleszkópokkal több kutatást kezdtek meg a hipotézis által felvetett problémákról. Minthogy *RR Lyrae* mágneses változó is, témafelelős vizsgálatot kezdett a mágneses és az *RR Lyrae*-változók közötti kapcsolat részletes feltárására (2 dolgozat).

2. *Gömbhalmazokban levő változócsillagok*

E témában elkészült az M3-ra vonatkozó nagyszabású munka kézirata. Eredményeik közül a legérdekesebb, hogy egy gömbhalmazon belül is az *RR Lyrae*-csillagok kémiai összetételében nagy különbségek lehetnek.

3. *Fotoelektromos U, B, V megfigyelések*

Folytatták *RR Lyr* és *RW Dra* fő- és szekunderperiódusának változásaiban mutatkozó korrelációk és a *Blashko*-effektusnak ezzel járó változásainak vizsgálatát e csillagok háromszínfotometriája segítségével.

4. *Fedési kettőscsillagok*

Az intézet egy munkatársa beküldte a stockholmi csillagdába *Beta Lyrae*ről végzett négyszínfotometriájának eredményeit, ahol azok a nemzetközi program keretében végzett összes megfigyelésekkel együtt kerülnek publikálásra.

II. *A Tejútrendszer szerkezetének kutatása*

(Témafelelős: BALÁZS BÉLA, tud. munkatárs.)

Ez a téma a Schmidt-teleszkóp főprogramja.

1. *Spektrálklasszifikáció*

A program keretében közel 100 felvételt készítettek az 5°-os prizmával az égbolt olyan helyeiről, amelyekről másutt már részletes spektrálklasszifikációs munkát publikáltak. Ezek a felvételek részben tájékozódó jellegűek a műszer teljesítőképességére vonatkozóan, részben alapul szolgálnak a klasszifikációs módszerek begyakorlására.

Hamburgi felvételek alapján a témafelelős olyan területen klasszifikálta az OB csillagokat, ahol van *Woerden* és *Blaauw* a Tejút fősíkjától távol fekvő hidrogénkomplexumokat talált rádiótávcsöves megfigyelésekből. A munkát beküldte a *Zeitschrift für Astrophysik* c. folyóirathoz.

2. *Háromszínfotometria*

Az intézet egyik munkatársa Hamburgban behatóan tanulmányozta a háromszínfotometria automatizálási módszereit és magával hozta hazai hasznosítás céljából, a szükséges számítások teljes ALGOL-programját.

3. *Halo-populáció*

A halo-populáció változócsillagainak felkutatására 108 felvételt készítettek. Ezek a felvételek egyúttal a nemzetközi szupernóva-programra is felhasználhatók.

Március 13-án az intézet egy munkatársa az Ursa Maior galaxishalmazban fényes 13,3-rendű szupernóvát fedezett fel. Az év végéig követte a szupernóva fénycsökkenését az általa a NPS-ből levezetett magnitúdósorozat felhasználásával.

III. *Mesterséges égitestek optikai megfigyelése*

(Témafelelős: ALMÁR IVÁN, a fizikai tud. kandidátusa.)

Az intézeti állomáson 1964-ben 61 átvonulásról 1002 megfigyelés történt. Az 1963—64-ben INTEROBS-kampányok keretében végzett megfigyelések száma tekintetében a 19 résztvevő állomás közül Budapest a második.

Az intézet munkatársai új módszert dolgoztak ki, mely az INTEROBS-programban kapott szimultán megfigyelésekből a térbeli pozíciókon keresztül közvetlenül adja meg az illető vonulás pályaelemeit és azok standard hibáit.

IV. *Elméleti csillagászati vizsgálatok*

(Témafelelős: CSADA IMRE, a fizikai tud. doktora.)

1. *Magnetohidrodinamikai vizsgálatok*

A témafelelős befejezte a *Babcock*-féle magnetogramok feldolgozását és elkészítette a dolgozat kéziratát.

A Nap mágneses terének dinamóelméletére vonatkozóan numerikus számításokat végeztek. Az új eredmények szerint a rendszernek erős csillapodása van. A mágneses tér polaritásának megváltozását továbbra is hiánytalanul megadja.

A témafelelős új elméletet dolgozott ki az expandáló napkoronában lejátszódó, s a gömbszimmetriától eltérő fűtési mechanizmusok számára.

2. *Kozmológiai vizsgálatok*

Az intézet egy munkatársa az év első hónapjaiban elkészült a „*Some Remarks on Empirical Tests of Cosmology*" című munkája angol nyelvű kéziratával. A dolgozat a galaxishalmazok statisztikus vizsgálata alapján elvileg új módszert alkalmaz a galaxishalmazok látószögének vizsgálatára, ennek segítségével kimutatja, hogy a galaxishalmazok látószögére vonatkozó perspektíva-törvény nagy vöröseltolódások esetén teljesen érvényét veszti, majd ezt az állítást független fotometriai módszerekkel más oldalról is alátámasztja. Az itt leírt megállapításokat még ugyanezen hónapokban matematikailag lényegesen továbbfejlesztette és további fotometriai problémákra is kiterjesztette.

Napfizikai Obszervatórium

Az Obszervatóriumban 2 témával foglalkoztak:

1. *Napfolt és napfáklya kutatások fotografikus észlelések alapján*

(Témafelelős: DEZSŐ LÓRÁNT, a fizikai tud. kandidátusa.)

2. *Napprotuberancia vizsgálatok*

(Témafelelős: DEZSŐ LÓRÁNT, a fizikai tud. kandidátusa.)

Jelentős eredmény az a felismerés, hogy az eddig három, teljesen különbözőnek tartott észlelési effektus, nevezetesen a „fizikai" foreshortening, a *Wilson*-effektus, valamint az összes úgynevezett szoláris E-W aszimmetriákként nyilvántartott tapasztalati tények végső fokon azonos októl erednek. A napfoltokra vonatkozó ezen észlelési effektusok a napfáklyák igen nagy opacitására vezethetők vissza.

Év végén megjelent az Obszervatórium orosz és magyar összefoglalásokkal ellátott, angol nyelvű *Közleményei*nek első száma. A soron következő további három szám csupán nyomdakapacitás hiánya miatt nem jelenhetett meg 1964-ben. A beszámolási időszakban külföldön való megjelentetésre három dolgozatot adtak le.

A 2. kutatási témával, azaz napprotuberencia-vizsgálatokkal a tervezettnél csak kevesebbet foglalkoztak. Egyrészt azért, mivel az 1. témával kapcsolatban jelentősebb és gyorsabb eredményekre volt kilátás, és erre koncentrálták az erőket, másrészt a protuberancia-észlelésekhez szükséges speciális fotoanyagot csupán az év utolsó heteiben sikerült első ízben beszerezniük.

Örvendetesen alakultak az Obszervatórium nemzetközi kapcsolatai. Az Obszervatórium munkatársai a Csehszlovák Akadémia ondrejovi obszervatóriumán kooperációs megbeszéléseket folytattak, és tanulmányozták az ottani észlelési módszereket. 1964-ben az Obszervatórium munkatársai közül 4-en voltak külföldön tanulmányúton, ill. kongresszuson.

1964 folyamán három külföldi napfizikus látogatta meg az Obszervatóriumot.

Az Obszervatórium bekapcsolódott a *Nyugodt Nap Nemzetközi Évei* (IQSY) kutatási programba is egyrészt észlelésekkel, másrészt egyéb speciális vizsgálatokkal.

Az Obszervatórium valamennyi dolgozója aktívan részt vett az 1964. év folyamán is mind a TIT helyi, mind országos munkájában, számos csillagászati ismeretterjesztő előadást és több csillagászati bemutatót tartottak.

Elméleti Fizikai Alapkutató Csoport

(ELTE ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZET)

Az intézet tudományos életében továbbra is fontos szerepet játszottak a következő témakörű intézeti szemináriumok: kvantumtérelmélet-elemi részek, plazmafizika, soktestprobléma és matematika. A szemináriumokon több intézeten kívüli és külföldi fizikus tartott előadást. Az 1964. évi szemináriumokon két-két előadást tartott W. HEISENBERG, P. N. A. DIRAC és L. SCHIFF professzor.

Az intézet szervezte az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat* égisze alatt rendezett *III. Magyar Elméleti Fizikai Nyári Iskolát* és a *Soktestproblémával foglalkozó nemzetközi kollokviumot.* Az intézet munkatársai mindkét rendezvényen több előadást tartottak.

1964-ben az intézet és a Csoport munkatársai közül 8 fő vett részt külföldön tanulmányúton és tudományos ülésszakon.

A külföldi tanulmányúton és konferencián résztvevők szinte kivétel nélkül tartottak előadásokat.

Az intézetnek a hazai intézetek közül a következőkkel van jó és aktív kapcsolata: *Atommag Kutató Intézet, Csillagvizsgáló Intézet, Hőtechnikai Kutató Intézet, Miskolci Műegyetem Fizikai Tanszéke*, *MTA Elméleti Fizikai Kutató Csoportja*, *KFKI.* A kapcsolatok közös kutatási témákon való együttműködésben, közös szemináriumokon való részvételben és vendégelőadásokban realizálódnak.

Az intézetben 4 témával foglalkoztak:

a) *A relativitás elméletének és az elméleti fizika más elvi kérdéseinek vizsgálata*

(Témafelelős: NOVOBÁTZKY KÁROLY, akadémikus.)

E téma keretében behatóan foglalkoztak a kvantummechanika és az általános relativitáselmélet kapcsolatával, különösen a kvantummechanikai állapotfüggvény koherenciájának felbomlásával makroszkopikus testek esetében stb.

A magnetohidrodinamika-hullámok struktúrájának vizsgálatát továbbfolytatták. A fenomenológiai tárgyalás kibővítésén kívül foglalkoztak a plazma statisztikai leírásának néhány kérdésével, klasszikus közelítésben és relativisztikus effektusok bevételével. Megvizsgálták a plazma különböző klasszikus relativisztikus leírásának egyenértékűségét. Foglalkoztak a plazmában lejátszódó jelenségek leírásában a kollektív és az individuális mozgás szétválasztásának problémájával. Továbbá folytatták a fizika filozófiai vonatkozású kérdéseinek kritikai elemzését. (8 dolgozat.)

b) *A kvantumtérelmélet konzisztencia kérdéseinek vizsgálata*

(Témafelelős: NAGY KÁZMÉR, a fizikai tud. doktora.)

Újabban az érdeklődés előterébe került az általános térelméleti módszerekkel megadott kvantumos rendszerek állapottere struktúrájának kérdése. Ez a struktúra sok esetben eltérő az elemi szeparábilis *Hilbert*-tér szerkezetétől. Ilyen kérdésekről az intézet kezdeményezésére Keszthelyen 1964 szeptemberében kollokviumot is tartottak. Az intézet továbbfejlesztette ilyen irányú korábbi kutatásait. A munkatársak két *Goldstone*-modellelmélet szimmetriáit, és szimmetriasértését vizsgálták és erről előadás is hangzott el az 1964-ben Dubnában tartott „Rochesteri" konferencián. Tovább vizsgálták a vektormezonos modell sokrészecske *Green*-függvényeit, és az általános térelméletben az elágazási betétrészek lehetséges szerkezetét, amelyek a különböző megmaradási tételekből adódnak. A kidolgozott térelméleti módszereket közvetlenül is sikerrel lehetett alkalmazni a szupravezetés elméletében és általában a soktestproblémában.

Vizsgálták a természetben általánosan előforduló szimmetriák lehetséges okát, a kérdés általános megfogalmazását. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban modellelméleteket számítottak részletesebben. Az elért eredmények érdekességgel bírnak a térelmélet megfogalmazása és az elemi részek általános elmélete szempontjából. (6 dolgozat.)

c) *Az elemi részek gyenge kölcsönhatásai*

(Témafelelős: MARX GYÖRGY, a fizikai tud. doktora.)

Az elemi részek gyenge kölcsönhatásainak elméleti vizsgálata az 1964. évben három területre koncentrálódott. Továbbfolytatták azokat a vizsgálatokat, amelyek a müon-neutrinóra vonatkoznak. Itt elsősorban a mű-neutrinó zérustól különböző nyugalmi tömegére kerestek az eddiginél pontosabb értéket. A müon- és pionbomlásra vonatkozó korábbi vizsgálataik kiegészítéseként mindkét folyamat elektromágneses sugárzási korrekcióinak meghatározásaival foglalkoztak. Az eredmények kiértékelése még folyamatban van.

A gyenge kölcsönhatások perturbációs magasabb közelítéseinek problémájával foglalkozva megvizsgálták a *Pais* által kidolgozott ún. peratizációs eljárás konvergenciájának problémáját.

Eredményesen foglalkoztak a csoportelmélet gyenge kölcsönhatásokra történő alkalmazásával. Itt a ritkaságváltozással járó leptonos bomlásokra vonatkozó vizsgálatokat tartják különösen fontosnak, mert ez a kérdés nemzetközileg is az érdeklődés homlokterében áll. (5 dolgozat.)

d) *A kvantummechanikai soktestprobléma zérus és igen alacsony hőmérsékleten, elsősorban térelméleti módszerekkel*

(Témafelelős: SZÉPFALUSY PÉTER, a fizikai tud. kandidátusa.)

A soktestprobléma térelméleti módszerei egyaránt jól alkalmazhatók konkrét problémák megoldásánál, valamint olyan kérdések vizsgálatára, melyek akkor lépnek fel, amikor a kvantummechanikai eljárásokat alkalmazni kívánják igen sok szabadsági fokú rendszerekre. (Pl. inekvivalens reprezentációk fellépése a *Hilbert*-térben.) A felhasználási lehetőségnek ezt a kettősségét tükrözi az intézet munkája is. Az atommagok felületi rétegében a párkorreláció számításával foglalkozott az intézet és számításokat végeztek az inhomogenitási korrekciókat figyelembe vevő gap-egyenlet megoldására, melyet az intézet egyik munkatársa származtatott. A gap-egyenlet alapja lehetővé teszi, hogy a számítások a reális két-nukleon kölcsönhatásból induljanak ki, mely tartalmaz „végtelen" 2 taszító törzset.

Az intézet munkatársai meghatározták egy relativisztikusan degenerált skalár kölcsönhatással rendelkező formion gázban a nyomást. Az eredményeket a csillaganyagok gravitációs kollapszusára alkalmazták. Folytatták az 1963-ban megkezdett munkát a páros és páratlan fermion rendszerek energiájának meghatározására a korrigált *Bardeen*, *Cooper*, *Schrieffer* modellel. Megvizsgálták a korrekciók pontosságát egy egyszerű két kinetikus energiájú modell esetében. Megmutatták, hogy a szupravezetés elméletében nem csak kontakt kölcsönhatásra, hanem realisztikusabb kölcsönhatásokra is leszármaztathatók „összeg szabályok". Ezek alkalmazásaként pólus közelítésben levezették a gap-egyenletet és meghatározták az alapállapot energiáját. Foglalkoztak a He^4 *Bose*-folyadék egy-részecske gerjesztési spektrumának meghatározásával. Kimutatták, hogy a perturbációsan számított gerjesztési spektrumnak a zérus impulzusú határesetben való viselkedése szempontjából lényeges, hogy a kanonikus felcserélési relációknak a *Bogoljubov*-féle kanonikus transzformáció különböző paraméterértékeihez tartozó ábrázolási inekvivalensek.

Lumineszencia és Félvezető Kutató Csoport

(József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézete)

A kutatócsoport munkája lumineszkáló rendszerekben a keverékoldatok lumineszenciájának, a lumineszencia polarizációjának, a hatásfok hullámhossz- és hőmérsékleti függésének, valamint az idegen koltás finomabb törvényszerűségeinek, továbbá a CdS és CdSe félvezetőkben a fotovezetés atmoszférától való függésének és a kémiai, ill. elektronikus maratás Ge-félvezetők felületi tulajdonságaira gyakorolt hatásainak tanulmányozására irányult. Ezenkívül fizikai szakdidaktikai irányú vizsgálatok is folytak.

A kutatásokról 11 megjelent és 9 megjelenőben levő tudományos közleményben számoltak be a munkatársak részletesen. A beszámolási időszakban a kutatócsoport egyik munkatársa megvédte doktori értekezését, egy másik munkatárs doktori értekezést nyújtott be. A kutatócsoport egy tagja egyetemi doktori címet szerzett.

A hazai tudományos intézetek közül a *Műszaki Fizikai Kutató Intétez*tel és újabban a *Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet*tel főleg személyes jellegű kapcsolat révén áll az intézet összeköttetésben, amelyek során részben szakmai konzultációkra, részben pedig az említett intézetek részéről technikai segítségnyújtásra is sor került.

A kutatócsoport nemzetközi kapcsolatai annak ellenére, hogy szerződések nem rögzítik, kiterjedtnek és több vonatkozásban eredményesnek mondhatók. A kutatócsoport tagjai hazai és külföldi nemzetközi konferenciákon, külföldi intézetekben tett látogatások és tanulmányutak, ill. külföldi kutatók fogadása során alakították ki vagy erősítették meg ezeket a kapcsolatokat. Ezek közül kiemelendők a lengyel kutatókkal (Jablonski, Bauer, Frankowiak, Kawaki), a szovjet fizikusokkal (Ljovsin, Galanyin, Feofilov, Sztyepanov, Boriszevics) és a német, ill. angol tudósokkal (Förster, Schmillen, Witzmann, Stevens) kialakult kapcsolatok. Az említett kutatók közül többel nem egy ízben értékes diszkusszió folyt a közös kutatási témákról. Az intézmény munkatársai közül 7 fő vett részt külföldön tanulmányúton és tudományos ülésszakon.

Az intézetben 6 témával foglalkoztak:

a) *A fény mikrostruktúrájának vizsgálata a lumineszenciánál lejátszódó energiaátadási folyamatok tanulmányozása után*

(Témafelelős: Budó Ágoston, akadémikus.)

A téma keretében a keverékoldatokkal kapcsolatos vizsgálatok az energiaátadás valószínűségének értelmezéséhez járultak hozzá, továbbá nagyobb pontosságú adatokat eredményeztek a keverékoldatok emissziós spektrumaira vonatkozólag. A lumineszcencia polarizációjának vizsgálatával kapcsolatos kísérleti és elméleti eredményeik a kontcentrációs és a rotációs depolarizációval foglalkozó elméleteket jelentősen tökéletesítik, és néhány olyan új összefüggést is eredményeztek, amelyek a folyadékszerkezet tanulmányozása szempontjából is fontosak lehetnek. (5 dolgozat megjelent és 3 dolgozat megjelenés alatt.)

b) *A lumineszcencia és hőmérsékleti sugárzás kapcsolatának vizsgálata*
(Témafelelős: KETSKEMÉTY ISTVÁN, a fizikai tud. doktora.)
A fluoreszcencia hatásfokának a gerjesztő fény hullámhosszától való függésére vonatkozó több irányú kísérleti adatok a korábban kapott elméleti összefüggéseket megerősítik. (4 dolgozat megjelent és 5 dolgozat megjelenés alatt.)

c) *A lumineszcencia-intenzitást befolyásoló tényezők vizsgálata, különös tekintettel az emittáló centrumok közeli zónájában fellépő kölcsönhatásokra*
(Témafelelős: SZALAY LÁSZLÓ, a fizikai tud. kandidátusa.)
Az idegen kioltás finomabb törvényszerűségeinek megállapítását eredményezte a kioltás viszkozitás-függésének, továbbá a fluoreszkáló molekula és a környezet közötti hőkicserélődésnek kísérleti és elméleti vizsgálata. (2 dolgozat megjelent és 1 dolgozat megjelenés alatt.)

d) *CdS, CdSe fotoellenállások elektromos és fotoelektromos vizsgálata*
(Témafelelős: GOMBAY LAJOS, a fizikai tud. kandidátusa.)
A mikrokristályos pontból préselt, vákuumban, száraz és nedves levegőben tartott CdS fotovezetők vizsgálatából arra lehetett következtetni, hogy a fotoáramok változásai a CdS egykristályokéhoz hasonlóak. Megállapítást nyert, hogy a CdSe—Se rétegek közötti záróréteg vastagsága elektromos formálás hatására egy óra alatt konstans értéket ér el. (2 dolgozat.)

e) *Ge és Si fotoelektromos tulajdonságainak kutatása a mozgó fényfolt módszerének segítségével*
(Témafelelős: GOMBAY LAJOS, a fizikai tud. kandidátusa.)
A Ge felület maratásánál alkalmazott és a felületi tulajdonságok vizsgálatára használandó mérőberendezést továbbfejlesztették.

f) *A fizikatanítás korszerű struktúrájának vizsgálata*
(Témafelelős: MAKAI LAJOS, adjunktus.)
A fizikai szakdidaktikai vizsgálatok egyebek között új demonstrációs eszközök kialakításához és a mágnességtan oktatásában figyelemre méltó szempontok felvetésére vezettek.

Kristálynövekedési Kutató Csoport

(ÉKME KÍSÉRLETI FIZIKAI INTÉZETE)

A Csoport munkatársai elsősorban a kristálynövekedés, a kristálymagképződés és a kristályhibák kísérleti vizsgálatával foglalkoztak. Jelentős eredményük a kristálymagképződés területén annak a megállapítása, hogy a telített oldatok egyszeri mechanikai behatásra teljesen spontán több, időben elhúzódó kristályosodással reagálnak. Az egyes kristályosodási szakaszokhoz tartozó alakzatok, valamint a kristályosodás sebessége a túlhűtött ionos oldatban keletkező kristálygócok és folyadékszerkezet közti szoros kapcsolatokra utalnak. Az olvadék felszínén történő kristálymagképződési megfigyelések azt mutatják, hogy az olvadék „előélete" (túlmelegítés, gyors vagy lassúbb átolvasztás) lényeges szerepet játszik a magképződésnél. Az oldatból való kristálynövesztésnél a beépülő szennyezőoldalék hatását vizsgálva vegyi és termikus maratással vákuumban feltárták a növesztett kristályok hasadási és diszlokációs szerkezetét.

A Csoport nemzetközi kapcsolata jónak mondható; a kutatók közül többen tanulmányúton jártak a szocialista országokban. Három kutató külföldi levelező aspiráns a Szovjetunióban, illetőleg az NDK-ban. Három kutató vett részt nemzetközi konferencián külföldön.

A Csoportban 5 témával foglalkoztak:

a) *A kristálymagképződés és kristálynövekedés mechanizmusának vizsgálata*

(Témafelelős: GYULAI ZOLTÁN, akadémikus.)

Magképződési vizsgálatokat végeztek és azt kiterjesztették olvadék felszínén keletkező magokra. Szennyezett oldatból egykristályt növesztettek és elkezdték a termék elektronmikroszkópos vizsgálatát. (1 dolgozat és 1 film.)

b) *Ionkristályok hibahelyeinek vizsgálata*

(Témafelelős: JESZENSZKY BÉLA, tudományos munkatárs.)

Eredményesek voltak a diszlokációk töltésére és azok mozgására vonatkozó vizsgálatok a megnyomott kristályokban. A diszlokációkat maratással követték NaCl és KSr kristályokban, deformált (NaCl), oldatból növesztett NCl és olvadékból növesztett KBr egykristályokon. (1 dolgozat megjelenés alatt és 1 film.)

c) *Elméleti vizsgálatok ionkristályokon*

(Témafelelős: BODÓ ZALÁN, a fizikai tudományok doktora.)

Megállapították, hogy az abszolút zérus fokon való sűrűséghez mért olvadáspont feletti sűrűségcsökkenés a Born-féle taszítással mutat egyértelmű összefüggést.

d) *Fizikatörténeti kutatások*

(Témafelelős: MÁTRAINÉ ZEMPLÉN JOLÁN, a fizikai tudományok kandidátusa.)

Anyaggyűjtést végeztek a Magyarországi fizikatörténet III. kötetéhez és a klasszikus fizika marxista értékeléséről szóló kandidátusi értekezéshez.

e) *A betonszilárdulás kristályfizikai és fizikai-kémiai vizsgálata*

(Témafelelős: ZIMONYI GYULA, adjunktus.)

Vizsgálták a kötés folyamatát egyen- és váltóáramú vezetéssel, valamint mikroszkópiai preparátumokon. (1 dolgozat megjelenés alatt.)

Kristályfizikai Kutató Laboratórium

(BUDAPESTI ORVOSTUDOMÁNYI EGYETEM ORVOSI FIZIKAI INTÉZET)

Az intézet kutatómunkája az 1964. évben is két fő területre irányult:

szilárdtestek fizikája és

orvosi vonatkozású fizikai és biofizikai vizsgálatok.

A szilárdtestek fizikájával foglalkozó laboratórium munkája az alkalihalogenid kristályokban ionizáló sugárzások által kiváltott folyamatok tanulmányozására irányult. A vizsgálatok előterében a deformációk és a szennyeződések szerepének kutatása állott.

A *biofizikai részleg* munkája a vörösvérsejtek ionizáló sugárzások hatására fellépő iontranszportjára, az izom ioncseréjének befolyásolására, a pajzsmirigy jódfelvételének és hormonszekréciójának vizsgálatára és az ionizáló sugárzások bakteriográfokra gyakorolt hatására irányult.

Az intézet munkatársainak tollából 9 tudományos közlemény és 1 egyetemi tankönyv jelent meg. További 4 közlemény megjelenés alatt. A beszámolási időszakban az intézet egyik munkatársa megvédte kandidátusi értekezését, további kettő pedig egyetemi doktori címet szerzett.

Újabban szoros kapcsolat alakult ki a *Biológiai Tudományok Osztályá*val, ami lehetőséget ad az intézetben folyó biofizikai vizsgálatok fokozottabb irányítására, ellenőrzésére és támogatására.

A hazai tudományos intézetek közül a *KFKI Sugárvédelmi Osztályá*val szerződéses kapcsolatban áll az intézet. Megállapodás jött létre termolumineszcens dózismérő kifejlesztésére. Az intézet feladata a megfelelő termolumineszcens anyagok előállítása.

Az *Egyesült Gyógyszer- és Tápszergyár* megbízta az intézetet nyújtott hatású gyógyszerkészítmények szétesésének izotópokkal való vizsgálatával. Ezek a kísérletek egyrészt in vitro körülmények között, másrészt állatkísérletekben folynak.

Az akadémiák közötti kétoldalú együttműködés keretében a *Csehszlovák Tudományos Akadémia Szilárdtest Fizikai Intézeté*vel és a *Román Tudományos Akadémia Fizikai Intézeté*vel 1964-ben is kollaboráció folyt. A kristályfizikai csoportból az említett intézetekben 2 munkatárs 2—2 hetes látogatást tett, részt vett az ott folyó munkákban és értékes diszkussziókat folytatott a közös kutatási témákról. Az Intézet pedig LIVIU MATEI román, J. DOLEJSI és J. TRNKA csehszlovák kutatókat fogadta, akik szintén bekapcsolódtak az intézetben folyó munkába.

Az intézet munkatársai közül 7 fő 13 alkalommal járt külföldön tanulmányúton, illetve tudományos ülésszakon.

Az intézetet 1964. év folyamán 13 külföldi fizikus látogatta meg.

Az intézet kutatómunkáját nagymértékben gátolja a nagyfokú zsúfoltság. Kevés a helyiség, az oktatói és kutatói létszám emelkedésével a laboratóriumok nagyon zsúfoltak és túlterheltek. Ez a további fejlődést is nagymértékben gátolja, mivel újabb műszerek felállítására, elhelyezésére nincs lehetőség. Az intézetnek nincs könyvtárhelyisége. Mindezekhez hozzájárul az is, hogy az intézet energiaszolgáltatási viszonyai (víz, gáz, villany) nem kielégítőek és az energiaszolgáltatásokban beálló zavarok a munkában gyakori visszaesést és anyagi károkat is okoznak.

Az intézetben 7 témával foglalkoztak.

a) *Alkalihalogenid kristályok előéletének hatása a színcentrumok tulajdonságaira*

(Témafelelős: TURCHÁNYI GYÖRGY, a fizikai tudományok kandidátusa.)

Kimutatták, hogy a NaCl kristályok deformációjakor a töltött diszlokációk elmozdulása folytán fellépő elektromos jel a röntgenezett kristályok esetében szignifikánsan kisebb, mint a színteleneknél. (1 dolgozat megjelenés alatt.)

b) *Oxigéntartalmú szennyeződések hatása alkalihalogenid kristályok tulajdonságaira*

(Témafelelős: TARJÁN IMRE, a fizikai tudományok kandidátusa.)

A NaCl kristályok tisztítása során kombinálták a vákuumszublimálás, a zónatisztítás módszerét, valamint az inertatmoszférás *Kyropoulos*-féle növesztési eljárást és így sikerült részben az OH ionok, részben pedig a kation-szennyezés koncentrációját csökkenteni. (2 dolgozat.)

c) *Ionkristályok termolumineszcens tulajdonságainak vizsgálata*

(Témafelelős: VOSZKA RUDOLF, a fizikai tudományok kandidátusa.)

Megállapították, hogy a kétvegyértékű kation-szennyezések esetén az alacsonyabb hőmérsékleten (170 °C) jelentkező lumineszcencia maximum, anion-szennyezések esetén viszont a magasabb hőmérsékletnél (250 °C) jelentkező maximum dominál. (1 dolgozat.)

d) *Ionizáló sugárzás hatása a perifériás vörösvérsejtek iontranszportjára, in vivo és in vitro körülmények között*

(Témafelelős: NAGY JÁNOS, adjunktus.)

Kimutatták, hogy 100 r-nél nagyobb gammadózisok hatására a vörösvérsejtek iontranszportja fokozódik. (3 dolgozat.)

e) *Izom ioncseréjének befolyásolási módja*

(Témafelelős: TAMÁS GYULA, docens.)

Megállapították, hogy az izolált békaizom ^{24}Na cseréje a hőmérséklet emelkedésével növekszik, és függ a külső közeg káliumkoncentrációjától. (2 dolgozat és további 2 dolgozat megjelenés alatt.)

f) *A pajzsmirigy jódfelvételének és hormonszekréciójának vizsgálata izotópmetodikákkal*

(Témafelelős: GÓLIÁN BÉLÁNÉ, tanársegéd.)

Megállapították, hogy *Docca*, ill. *Nerobolil* hormonkészítmények hatással vannak állatok jódfelvételére, illetőleg hormontermelésére. (1 dolgozat megjelenés alatt.)

g) *Ionizáló sugárzások hatásának vizsgálata bakteriofágokon*

(Témafelelős: RONTÓ GYÖRGYI, tanársegéd.)

Meghatározták a fágok inaktivációjának kvantumhatásfokát és azt tapasztalták, hogy a besugárzási időtől függően fokozódik a fág-szuzpenziók hyperchromiája. (1 dolgozat.)

József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete

Az Intézetben 8 témával foglalkoztak.

a) *Differenciálegyenletek elmélete*

(Témafelelős: PINTÉR LAJOS, a matematikai tudományok kandidátusa.)

Eredményesen vizsgálták a másod- és harmadrendű, bizonyos speciális típusú nem-lineáris differenciálegyenletek L^p-térbe tartozó megoldásait. (2 dolgozat megjelenés alatt.)

b) *Ortogonális sorfejtések konvergenciaproblémái, konstruktív függvénytani kérdések*

(Témafelelős: TANDORI KÁROLY, levelező tag.)

Eredményeket értek el a konvergencia, ill. a szummálhatóság szükséges és elégséges koefficiens feltételeinek megoldására vonatkozóan, továbbá többek között a nagyon erős Riesz-szummálhatóság vizsgálatában. (9 dolgozat.)

c) *Funkcionálanalízis és alkalmazásai*

(Témafelelős: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, akadémikus.)

Sikerült karakterizálni a Hilbert-tér normális operátorainak numerikus értékkészletét. (1 dolgozat.)

d) *Algebrai vizsgálatok*

(Témafelelős: RÉDEI LÁSZLÓ, akadémikus.)

Újabb eredmények születtek az automaták és az általános algebrák elméletében. (9 dolgozat.)

e) *Differenciálgeometriai terek elméletére vonatkozó vizsgálatok*

(Témafelelős: MOÓR ARTHUR, a matematikai tudományok doktora.)

Sikerült megadni a nem-szimmetrikus G_{ik}-tenzorból képzett invariáns differenciál felépítését. (5 dolgozat.)

f) *Halmazelméleti vizsgálatok*

(Témafelelős: FODOR GÉZA, a matematikai tudományok doktora.)

Eredményes vizsgálatok folytak a halmazleképezések és az M-additív ideálok strukturális kapcsolataira vonatkozóan. (2 dolgozat.)

g) *A matematika különböző fejezeteinek axiomatikus felépítésére és az így kapott axiómarendszerek vizsgálatára vonatkozó vizsgálatok*

(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ, akadémikus.)

Megvizsgálták a többértékű logikák alkalmazási lehetőségét a fizikai elméletekben.

h) *Kibernetikai vizsgálatok*

(Témafelelős: KALMÁR LÁSZLÓ, akadémikus.)

Foglalkoztak algoritmus kidolgozásával adott működési feltételeknek eleget tevő áramkörök optimális szintézisével kapcsolatban, továbbá a több ütemű automaták elméletének kidolgozásával és mindezek alkalmazásával automatikus számológépekre. (1 dolgozat.)

ELTE Matematikai Intézet

Az Intézetben 8 témával foglalkoztak:

a) *Algebra*

(Témafelelős: Fuchs László, a matematikai tudományok doktora.)

Eredményeket értek el az Abel-csoportok elméletének struktúra-kérdéseire, a homologikus módszerek alkalmazására és a topologikus gyűrűkre vonatkozó vizsgálatok során. (7 dolgozat.)

b) *Analitikus számelmélet*

(Témafelelős: Turán Pál, akadémikus.)

Jelentős eredményeket értek el a prímszámelméleti kutatásokban, különösen az összehasonlító prmíszámelméletben. (6 dolgozat.)

c) *Geometria*

(Témafelelős: Hajós György, akadémikus.)

A téma keretében elemi geometriai, algebrai geometriai, hiperbolikus geometriai, diszkrét geometriai, algebrai topológiai és gráfelméleti vizsgálatokkal foglalkoztak. (20 dolgozat.)

d) *Klasszikus analízis és általános topológia*

(Témafelelős: Császár Ákos, a matematikai tudományok doktora.)

A vizsgálatok eredményeit a munkatársak 4 dolgozatban publikálták.

e) *Funkcionálanalízis, differenciálegyenletek*

(Témafelelős: Kósa András, a metamatikai tudományok kandidátusa.)

A munkatársak szükséges és elégséges feltételeket adtak meg különböző variációs problémákra. Alkalmazták a funkcionálanalízis módszereit a differenciálegyenletek elméletében. Foglalkoztak a multiplikatív ortogonális rendszerek szerint haladó kifejtések konvergenciájával és absztrakt lineáris programozással, továbbá az optimális folyamatok elméletével.

f) *Valószínűségszámítás és alkalmazásai, numerikus analízis*

(Témafelelős: Rényi Alfréd, akadémikus.)

A vizsgálatok eredményeit a munkatársak 15 dolgozatban publikálták.

g) *A matematika alapjai, halmazelmélet*

(Témafelelős: Péter Rózsa és Surányi János, a matematikai tudományok doktorai.)

Új eredményeket értek el a rekurzív függvényeknek a számológépek elméletére és a nyelvészetre való alkalmazásában. Továbbfolytatták a partició-elméleti és a végtelen gráfokra vonatkozó vizsgálatokat. Eredményeket értek el a „végtelen hosszú formulákat tartalmazó nyelvekkel" kapcsolatos modell-elméletben és a modális logika axiomatizálása terén. (6 dolgozat.)

h) *A matematika oktatása*

(Témafelelős: VARGA TAMÁS, adjunktus.)

A középiskolai oktatásban a vektoralgebrára vonatkozó kísérletek két gimnáziumban folytak, és azok befejeződtek. A középiskolai geometria oktatásának korszerűsítésére vonatkozó kísérletek több iskolában a munkatársak irányítása alatt folytak. Kísérleti tanterveket készítettek az általános iskolák I—IV. osztálya számára. A gimnáziumok részére a munkatársak által készített tanterv-javaslat alapján készült el a gimnáziumok új országos tanterve.

MEGJEGYZÉSEK A GIBBS-PARADOXON KVANTUMMECHANIKAI ÉRTELMEZÉSÉHEZ

Írta: FÁY GYULA

A kvantumelmélet NEUMANN által kidolgozott deduktív felépítése alapján, valamint a kvantumelméleti ítéletkalkulus segítségével kimutatjuk, hogy bármely fizikai tulajdonság entrópiája növekszik, ha a tulajdonságot egy logikai értelemben gyengébbel helyettesítjük.

1. §. Bevezetés

A *Gibbs*-paradoxon feloldására a termodinamikában az a felismerés vezetett, hogy az entrópia információelméleti fogalom, más szóval, hogy értéke függ azoktól a feltételektől, amelyek közt az adott termodinamikai rendszert vizsgáljuk[1] [1]. Pontosabban szólva: fel lehet egy termodinamikai rendszert olyan tulajdonságokkal ruházni, amelyek bár e rendszer makroszkopikus viselkedése szempontjából lényegtelenek, mégis az entrópia értékébe belejátszhatnak. L. SZILÁRD [2] vizsgálta meg elsőnek kvantitatíve, hogy a termodinamikai rendszerbe való beavatkozás, mely a rendszer bizonyos mikroszkopikus tulajdonságainak ismeretén alapszik, mekkora értékkel változtatja meg a rendszer entrópiáját.

Mielőtt e dolgozat célkitűzését ismertetnénk, fogalmazzuk meg általánosan a *Gibbs*-paradoxont.

Tekintsünk két gázt, amelyek egymástól egy fallal vannak elválasztva. Határozza meg mindkét gáz állapotát nyomása (p_1, p_2), térfogata $(V_1 = V_2 = V)$ és molekuláinak száma (N_1); (N_2). Ha az $1+2$ rendszer termikusan homogén, akkor van entrópája, s ez

$$S = S_1 + S_2.$$

Távolítsuk el mármost a válaszfalat, s tekintsük az így létrejövő termodinamikai rendszert. Entrópiáját jelölje S_{12}. Ekkor a termodinamika alapján kiadódik, hogy

$$\Delta S \equiv S_{12} - (S_1 + S_2) > 0.$$

Ez a ΔS entrópiaváltozás akkor sem válik zérussá, ha az 1 és 2 rendszerek „teljesen azonosak" értve ezen azt, hogy termodinamikailag ekvivalensek, vagyis hogy állapothatározóik (P, V, N) és állapotegyenleteik is megegyeznek. Ez utóbbi ideális gázok esetében azt jelenti, hogy molekulasúlyaik egyeznek meg. Minthogy a fallal

[1] FÉNYES [1] dolgozatában a *Gibbs*-paradoxon problémáját teljesen tisztázta. Jelen dolgozat nem a tulajdonképpeni termodinamikai *Gibbs*-paradoxonnal foglalkozik, hanem az entrópiának egy, a *Gibbs*-paradoxon vizsgálata során megismert tulajdonságának általánosabb keretű diszkussziójával.

gondolatban is elválaszthattuk volna az $1+2$ rendszert, azért paradoxonként tűnik az, hogy a fal *gondolatbani* odahelyezése az entrópiát megváltoztathatja[2].

A fallal való gondolatbeli elválasztás azonban azt jelenti, hogy míg a falnélküli $1+2$ rendszer bármely molekuláját azzal a tulajdonsággal ruháztuk fel, hogy lehetséges térfogata $2V$ volt, addig a fallal elválasztott $1+2$ rendszer bármely molekulájának lehetséges térfogata csupán V[3]. A fal *eltávolítása* tehát azt jelenti, hogy a „V tulajdonságú" molekulát egy gyengébb tulajdonsággal ruháztuk fel, ti. a „$2V$ tulajdonság"-gal. A $2V$ tulajdonság azért gyengébb V-nél, mert abból, hogy egy molekula egy V térfogatban tartózkodik, következik, hogy benne van a (V-t körülvevő) $2V$ térfogatban. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a fal gondolatbeli eltávolítása ekvivalens azzal, hogy a gázt (termodinamikai rendszert) alkotó molekulák (részrendszerek[4]) valamely tulajdonságát annak egy következményével pótoljuk. A tulajdonságoknak következményükkel való pótlását röviden *helyettesítésnek* nevezve azt mondhatjuk, hogy helyettesítés során az entrópia növekszik.

Egy termodinamikai rendszert alkotó molekulák (ill. általánosabban: részrendszerek) fenti „V", „$2V$" típusú tulajdonságairól és azok helyettesítésének hatásáról természetesen a *fenomenologikus* termodinamika nem tud kijelentéseket tenni, minthogy a molekulák általános értelemben vett „tulajdonságai" közül explicite csak számuk, N szerepel[5].

Kézenfekvőnek látszik ezért a kérdést egy olyan diszciplina keretében megvizsgálni, amely kifejezetten foglalkozik egy fizikai rendszer részrendszereinek tulajdonságaival. — A cél nyilván az, hogy kimutassuk: *Valahányszor egy fizikai rendszer valamely tulajdonságát egy* (nála gyengébb) *következményével pótoljuk, mindannyiszor a fizikai rendszer entrópiája növekszik.* Az alkalmas diszciplina, amelyben ezen vizsgálatok elvégzésére mód nyílhat, mint ismeretes, a *kvantumelmélet*[6].

E cél érdekében mindenekelőtt ismertetjük a tárgykör főbb kvantumelméleti vonatkozásait és a továbbiakban felhasználásra kerülő alapvető kvantummechanikai fogalmakat[7].

2. §. A felhasznált kvantummechanikai fogalmak

A *fizikai rendszereket* kvantummechanikailag az absztrakt *Hilbert*-tér elemeivel és opreátoraival jellemezhetjük: [3].

a) A fizikai rendszer *állapotainak* halmazához kölcsönösen egyértelműen hozzá van rendelve az absztrakt *Hilbert*-tér elemeinek halmaza.

[2] Természetesen csak abban a felfogásban, hogy a rendszer állapotát nyomása p, és térfogata, $2V$ egyértelműen meghatározza. Ilyen esetben a gondolatbeli fal odahelyezése a rendszert nem változtatja meg, mert a gáz molekulákból való felépítettségéről nem veszünk tudomást. A paradoxon az, hogy a fal eltávolításával a keveredést is tekintetbe vesszük, vagyis azt, hogy az eredeti $(p, V)+(p, V)$ rendszer átalakult a $(p, 2V)+(p, 2V)$ rendszerré, akkor ennek összentrópiája már különbözni fog a $(p, V)+(p, V)$ rendszer összentrópiájától.

[3] Itt tehát már eltérünk a fenomenologikus szemléletmódtól.

[4] Ezek már nem termodinamikai rendszerek.

[5] Vagy bizonyos szűkebb tárgyalásmódban még ez sem. (Vö. [2]).

[6] A fizikai rendszerek tulajdonságainak kvantitatív vizsgálatával NEUMANN foglalkozott részletesen. ([3], III. fej. 5. és IV. fej. 3.)

[7] Lényegében NEUMANN [3] könyve alapján. (18, 130—135. oldalak.)

b) A fizikai rendszeren értelmezett *fizikai mennyiségek* halmazához egyértelműen hozzá van rendelve[8] az absztrakt *Hilbert*-tér hipermaximális hermitikus operátorainak halmaza.

c) A fizikai rendszer *tulajdonságainak* halmazához kölcsönösen egyértelműen hozzá van rendelve az absztrakt *Hilbert*-tér idempotens hermitikus (= projekciós) operátorainak halmaza[9].

Itt az *állapot* alapfogalom; implicit értelmezése éppen a Hilbert-tér *Neumann*-féle öt axiómájával történik.

Ugyancsak alapfogalom a *fizikai mennyiség* fogalma is; implicit értelmezése pl. a *Carnap*-féle öt követelménnyel történhetik[10] [4].

A *tulajdonság* származtatott fogalom; értelmezése NEUMANN szerint: fizikai mennyiségekre vonatkozó ítélet[11].

Így a tulajdonságokon logikai műveletek végezhetők, úgymint: negáció, konjunkció, implikáció stb.[12]

Az ítéletkalkulus és a projekciós operátorok algebrájának izomorfizmusa a következő:

Legyen $\mathscr{E}$ és $\mathscr{F}$ két tulajdonság. A hozzájuk tartozó projekciós operátorok legyenek E és F. Ekkor:

$\bar{\mathscr{E}}$-hez („nem $\mathscr{E}$")-	tartozik az $1+E$ projekciós operátor,
$\mathscr{E}\,\&\,\mathscr{F}$-hez („$\mathscr{E}$ és $\mathscr{F}$")	tartozik az $E\cdot F$. projekciós operátor,
$\mathscr{E}\vee\mathscr{F}$-hez („$\mathscr{E}$ vagy $\mathscr{F}$")	tartozik az $E+F-E\cdot F$ projekciós operátor,
$\mathscr{E}\forall\mathscr{F}$-hez („vagy $\mathscr{E}$ vagy $\mathscr{F}$")	tartozik az $E+F$ projekciós operátor,
$\mathscr{E}\rightarrow\mathscr{F}$-hez („ha $\mathscr{E}$ akkor $\mathscr{F}$")	tartozik az $1-E+E\cdot F$ projekciós operátor.

Ha $\mathscr{F}$ következménye $\mathscr{E}$-nek, akkor az $\mathscr{E}\rightarrow\mathscr{F}$ formula azonosan igaz, ($\mathscr{E}\rightarrow\mathscr{F}\equiv\uparrow$), ami a megfelelő operátorokra azt jelenti, hogy

$$E = E\cdot F. \tag{1}$$

[8] Hogy ez a leképezés miért nem *kölcsönösen* egyértelmű, meg van indokolva E. P. WIGNER: Die Messung Quantenmechanischer Operatoren, *Z. Phys.*, **133** (1952), 101—109 dolgozatában.

[9] A felhasznált operátorelméleti fogalmak definíciójára nézve l. [3], II. fej. és [8].

[10] Ez az öt követelmény a következő:

a) a fizikai mennyiség értékei közti egyenlőség-reláció, és
b) sorrend-reláció értelmezése,
c) a fizikai mennyiség 0-pontjának,
d) egységének, és
e) skálaformájának lerögzítése.

Nem állítjuk azonban, hogy ezen 5 *Carnap*-féle követelmény a fizikai mennyiség fogalmának jellemzésére feltétlenül szükséges vagy elegendő lenne. E követelmények egy kritikáját l. pl. H. NIEHRS: Analyse der Begriffe Temperatur und Wärmemenge, *Nachr. d. Akad. d. Wiss. Gött.*, 1951. évf. 3. oldal.

[11] Vö. [3], 130—135. old. NEUMANN a tulajdonságokhoz fizikai mennyiségeket rendel oly módon, hogy valahányszor egy méréssel egy tulajdonság megléte eldőlt, mindannyiszor a hozzá tartozó fizikai mennyiség értéke meg van mérve, éspedig 0-val egyenlő, ha a tulajdonság nincs meg, és 1-gyel, ha a tulajdonság meg van. Ez egyébként a fizikai rendszeren értelmezett tulajdonságok halmazához tartozó valószínűségi változó karakterisztikus változója.

[12] A logikai műveletek értelmezésére l. pl. HILBERT—BERNAYS [5] könyvét.

Sokaságoknak nevezzük a fizikai rendszerek halmazait, s ezeket a következőképpen jellemezzük:[13]

a) Álljon az S sokaság N számú elemből (fizikai rendszerből), jelük legyen $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_N = S$. Lehetséges állapotaik jele legyen rendre: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N \equiv \Phi$.

b) Jelölje továbbá w_i annak valószínűségét, hogy az S sokaságból találomra kiválasztva egy elemet, annak állapota éppen φ_i.[14]

A sokaságnak ezen (*a*)-ban és *b*)-ben adott) jellemzését fogalmilag összefoglalhatjuk oly módon, hogy megadunk egy U (ún. statisztikus) operátort az

$$U = \sum_{i=1}^{N} w_i P_{[\mathfrak{M}_i]} \tag{2}$$

definícióval. Ahol is $P_{[\mathfrak{M}_i]}$ jelenti az $\mathfrak{M}_i$ zárt lineáris sokaságra proiciáló projekciós operátort; $\mathfrak{M}_i$ pedig U-nak a w_i-khez tartozó sajátelemei által kifeszített zárt lineáris sokaságot. $\mathfrak{M}_i$ dimenziószáma w_i multiplicitásával egyenlő[15]. Ezzel az U statisztikus operátorral, mely tehát a kvantummechanikai sokaságok állapotjellemzőjének tekinthető[16], ki lehet fejezni annak e_i valószínűségét, hogy a sokaságban az $\mathscr{E}_i$ tulajdonság megvan. Erre nézve, mint ismeretes,[17]

$$e_i = \text{Spur } UE_i. \tag{3}$$

Mármost NEUMANN értelmezte a sokaság kvantummechanikai és makroszkopikus entrópiáját a fentebb említett fogalmak segítségével;[18] mi ennek nyomán, kissé általánosabban az S sokaság *makroszkopikus* entrópiáján az S bizonyos E_i makroszkopikus tulajdonságainak e_i valószínűség-eloszlásához tartozó matematikai entrópiáját fogjuk érteni[19]. — A következő §-ban az ezen értelmezéshez vezető gondolatmenetet fogjuk ismertetni.

3. §. Kvantummechanikai sokaságok makroentrópiája

Tekintsünk egy U statisztikus operátorú kvantummechanikai sokaságot. Nézzük meg, hogy egy makroszkopikus megfigyelő milyen módon tudja ezt jellemezni. Eljárása minden esetben a következő: Tekint valamilyen $\mathscr{E}_1$ tulajdonságot és megméri, hogy az milyen valószínűséggel van meg a sokaságban. Vagyis méri a 2. §-beli e_1-et. Emellett azonban szükségképpen mérnie kell az ellentétes $\overline{\mathscr{E}}_1$ tulajdonságot

[13] A kvantummechanikai sokaságok használatának indokolására nézve l. [3] 159. old.

[14] Ezen w_i-k mérése elvileg keresztülvihető. Vö. [3], IV. fej. 3.

[15] L. a 9. lábjegyzetet.

[16] Ki lehet mutatni, hogy ezen U független azon fizikai mennyiségek operátoraitól, R-től, amelynek várható értékét az Erw R=Spur UR összefüggés szolgáltatja. Speciálisan, ha R sajátértékei karakterisztikus változó értékei, akkor a várható érték a megfelelő valószínűséggel egyenlő. Ez történik akkor, ha R egy tulajdonsághoz tartozó projekciós operátor. Egyúttal az is látszik, hogy U független a sokaság makroszkopikus tulajdonságaihoz tartozó projekciós operátoroktól (az E_i-ktől; vö. a 18. lábjegyzetet) is.

[17] L. [3], IV. 3.

[18] L. [3], V. 4. A makroszkopikus tulajdonságok részletes diszkussziója ugyanitt megtalálható.

[19] A matematikai entrópia fogalmának legfontosabb sajátságaira vonatkozólag l. pl. BALATONI—RÉNYI [6] dolgozatát, valamint BRILLOUIN [7] könyvét.

is, mert azzal a megállapítással, hogy az $\mathscr{E}_1$ tulajdonság nincs meg egy találomra kiválasztott rendszeren, egyben megtudta az $\overline{\mathscr{E}}_1$ („nem $\mathscr{E}_1$") tulajdonság meglétét. $\overline{\mathscr{E}}_1$-t $\mathscr{E}_2$-vel jelölve az egyetlen tulajdonság iránt érdeklődő makroszkopikus megfigyelő mérési módját jellemezhetjük az E_1, E_2 operátorokkal, melyek az $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ tulajdonságokhoz tartoznak, s amelyekre tehát:

$$E_1 + E_2 = 1$$

$$E_1 \cdot E_2 = 0.$$

Tegyük fel mármost, hogy a megfigyelő az $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \dots, \mathscr{E}_N$ tulajdonságokról kíván információt szerezni. Az előbb mondottak értelmében szükségképpen most is

$$\sum_{i=1}^{N} E_i = 1.\text{[20]} \tag{1}$$

Megmutatjuk azonban, hogy az

$$E_i E_k = 0 \qquad (i \neq k) \tag{2}$$

„ortogonalitási" feltétel is mindig kielégíthető abban az értelemben, hogy: ha az $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N = \{E_i\}$ rendszer nem ortogonális, azonban „teljes", vagyis (1)-et kielégíti, akkor egyértelműen hozzá lehet rendelni $\{E_i\}$-hez $(i = 1, 2, 3, \dots, N)$ egy $\{F_n\}$ rendszert $(n = 1, 2, 3, \dots, M = 2^N)$, melyre már a (2)-vel analóg

$$F_i F_k = 0 \qquad (i \neq k) \tag{2'}$$

ortogonalitás fennáll.

Ezt az $\{F_n\}$ rendszert a következőképpen lehet megkonstruálni: Az E_i operátort alakítsuk át annak felhasználásával, hogy minden k-ra $(k = 1, 2, 3, \dots, N)$

$$E_k E_k = E_k$$

és

$$1 = E_k + 1 - E_k.$$

Ezekkel:[21]

$$E_i = 1 \cdot 1 \cdot 1, \dots, 1 \cdot E_i \cdot 1, \dots, 1 = [E_1 + (1 - E_1)][E_2 + (1 - E_2)][E_3 + (1 - E_3)]\cdot \tag{3}$$

$$[E_{i\pm 1}(1 - E_{i-1})] E_i \cdot E_i \dots [E_N + (1 - E_N)].$$

Az áttekinthetőség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket[22]

$$E_k = E_k^+, \quad 1 - E_k = E_k^- \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, N).$$

[20] Az E_i-khez tartozó ítéletek kalkulusában a (3) az E_i rendszerben történő kitüntetett kizáró diszjunktív normálformára hozás első lépésének, míg (4) magának a normálformának felel meg. (Vö. a 12. lábjegyzettel.)

[21] Voltaképpen az összegezést 1-től $N+1$-ig kellene végezni, ahol $E_{N+1} = 1 - \sum_{i=1}^{N} E$; de az egyszerűség kedvéért ezt az írásmódot alkalmazzuk.

[22] E jelölések NEUMANNtól erednek [3], 217—218. oldal.

A $+$, $-$ jeleket foglaljuk össze az s_k jellel. $s_k = +$ vagy $s_k = -$ és ezek a jelek a k-adik tényezőben állhatnak a következő, (3) alapján nyerhető felbontásban. (3)-ban elvégezve a kiejlölt műveleteket, azt kapjuk, hogy

(4) $$E_i = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\, s_{i+1} \ldots, s_N = \pm} E_1^{s_1} E_2^{s_2} \ldots E_{i-1}^{s_{i-1}} E_i E_{i+1}^{s_{i+1}} \ldots E_N^{s_N}.$$

Az összegezés a $+$ és $-$ jelek minden variációjára kiterjesztendő úgy, hogy $s_i = \pm$. Az összes i-re felírt jobb oldali összegekben az egyes összeadandókat jelöljük F_n-el; ezek száma nyilván annyi, ahányféleképpen a $+$ és a $-$ jel az N tényezőre elosztható, ami 2^N-el egyenlő. Természetesen az F_n-ek közt 0-ok is lehetnek. Mármost ezen F_n-ekről könnyű belátni, hogy a (2′) ortogonalitási relációkat kielégítik. Hiszen ha $i \neq k$, akkor F_i az F_k-tól csak annyiban különbözhet, hogy van oly m index, hogy míg F_i m-edik tényezőjében E_m, ill. E_m^- áll, addig F_k m-edik tényezőjében E_m^-, ill. E_m áll. Márpedig

$$E_m E_m^- = E_m^- E_m = 0.$$

Vagyis (3) alapján a (2′) valóban kielégíthető. Itt felhasználtuk, hogy az E_i-k felcserélhetők, ami azt jelenti, hogy az $\mathscr{E}_i$ makroszkopikus tulajdonságok egyidejűleg eldönthetők, ami éppen a tulajdonságok *makroszkopikus* voltának folyománya[23]. Természetesen (1)-ből következik az, hogy

(5) $$\sum_{n=1}^{2^N} F_n = \sum_{i=1}^{N} E_i = 1.$$

Ezek után azt mondhatjuk, hogy a makroszkopikus megfigyelő mérési módját egy az (1) és (2) feltételeket kielégítő $\{E_i\}$ operátor-rendszerrel lehet jellemezni. Az ilyen rendszereket a továbbiakban nevezzük *normalizált*aknak. A normalizált $\{E_i\}$ rendszer tehát teljesen meghatározza az e_i valószínűségeloszlást az U statisztikus operátorú keverékben:

(6) $$e_i = \text{Spur}\ UE_i.$$

Melyre nézve (1) szerint

(7) $$\sum_{i=1}^{N} e_i = 1.$$

Lényegében véve tehát a makroszkopikus megfigyelő szempontjait ez a diszkrét valószínűségeloszlás karakterizálja. Az e_i valószínűségi változójának értékében levő bizonytalanság mértékéül, mely tehát a megfigyelő módszereinek sajátja, célszerű az e_i eloszlás matematikai entrópiáját tekinteni [6]:

(8) $$\text{Entr}(S) = -K \cdot \sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i, \qquad (K > 0,\ \text{állandó}).$$

Ezek után az a kérdés marad hátra, hogy miként mérhető össze az $\{E_i\}$ rendszerhez tartozó (8)-beli entrópia annak az $\{E_i\}'$ rendszernek az entrópiájával, mely

[23] L. 18. lábjegyzetet.

$\{E_i\}$-ből úgy jön létre, hogy a j-edik tulajdonságot annak egy E_j' projekciós operátorú következményével pótoljuk, azaz E_j helyébe oly E_j'-t helyettesítünk, amelyre ((1.1) szerint)

$$E_j E_j' = E_j. \tag{9}$$

Ezt vizsgáljuk meg a következő §-ban.

4. §. A makroszkopikus tulajdonság helyettesítése

Az előző §-ban ismertetett terminológiát használva ármost fogalmazzuk meg kvantitatíve, hogy miben áll, s hogyan értendő a bevezetésben említett helyettesítés.

Legyen adva egy U statisztikus operátorú kvantummechanikai sokaság. Egy makroszkopikus megfigyelő mérési módja azzal karakterizálható, hogy megadunk egy *normalizált* $\{E_i\}$ projekciós operátor-rendszert. Ez a $\{E_i\}$ rendszer tehát azt a megfigyelési módot reprezentálja, amelyben a megfigyelő a sokság $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \ldots, \mathscr{E}_N$ tulajdonságait akarja vizsgálni.

Tekintsük mármost azt az esetet, amikor a makroszkopikus megfigyelő más típusú információkat kíván szerezni az U statisztikus operátorú sokaságról[24], mégpedig oly módon, hogy a j-edik $\mathscr{E}_j$ tulajdonság helyett az annál gyengébb $\mathscr{E}_j'$ $(\mathscr{E}_j' \to \mathscr{E}_j \equiv \uparrow)$ tulajdonságot vizsgálja. Ezt a megfigyelési módot $\{\mathscr{E}_i\}$ helyett egy $\{\mathscr{E}_i\}'$ rendszerrel reprezentálhatjuk, s itt $\{\mathscr{E}_i\}'$ abban különbözik $\{\mathscr{E}_i\}$-től, hogy $\{\mathscr{E}_i\}$-ben a j-edik tulajdonságot, $\mathscr{E}_j$-t, annak egy következményével, $\mathscr{E}_j'$-vel pótoljuk. Természetesen az $\{\mathscr{E}_i\}$-hez tartozó $\{E_i\}'$ projekciós operátor-rendszer már nem fog a (3. 1), (3. 2) tulajdonságokkal rendelkezni: nem lesz normalizált[25]. Így az entrópiafogalom ugyan formálisan értelmezhető a megfelelő $\{e_i\}'$ valószínűség-rendszeren, de $\{e_i\}'$ már nem valószínűség-eloszlás, ezért a formálisan nyert

$$-K\sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i = -K(e_1 \log e_1 + e_2 \log e_2 + \ldots + e_j + \ldots + e_N \log e_N)e_j' = \operatorname{Supr} UE_j'$$

kifejezés már nem tekinthető entrópiának és így az eredeti

$$-K\sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i$$

kifejezéssel való összehasonlításra sincsen alap.

Ezért tehát az $\{E_i\}'$ rendszert ortogonalizálni kell és teljessé kell tenni, azaz a 3 §-ban követett eljáráshoz hasonlóan egyértelműen hozzárendelni egy $\{F_n\}$ rend-

[24] Ez természetesen lehetséges, hiszen U nem függ az E_i-ktől. (Vö. 16.)

[25] A triviális $E_j' = E_j$ esettől eltekintve. Valóban: $\sum E_i = 1$-ből $E_j = 1 - \sum_{i \neq j} E_i'$, azaz $E_j' E_j = E_j = E_j\left(1 - \sum_{i \neq j} E_i\right) = E_j' - E_j'\left(\sum_{i \neq j} E_i\right)$, azaz $E_j' - E_j = E_j' \sum_{i \neq j} E_i$, így E_j' akkor és csakis akkor lehet minden E_i-re $(i \neq j)$ ortogonális, ha $E_j' = E_j$. Az, hogy $\{E_i\}$ nem teljes, hasonlóan látható be, l. (4.10).

szert, amelyre már

$$F_n = 1, \qquad (M = 2^N)\ ^{26}$$

$$F_i F_k = 0, \qquad (i \neq k).$$

Az entrópia csak ezen normalizált $\{F_n\}$ rendszerre vonatkozóan képezhető az

$$\text{Entr'}\,(S) = -K \sum_{n=1}^{2^N} f_n \log f_n$$

definícióval, ahol

$$f_n = \text{Spur } UF_n.$$

Lényegében ez lesz az az entrópia[27], amely Entr(S)-el összehasonlítható, s melyről ki fogjuk mutatni, hogy

$$\text{Entr}'(S) > \text{Entr}(S).$$

Ennek keresztülvitelére végezzük el az $\{E_i\}'$ rendszer normalizálását. Kezdjük az ortogonalizálással. Legyen tehát:

$$E_i = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\, s_{i+1}, \ldots, s_N = \pm} E_1^{s_1} E_2^{s_2} \ldots E_i \ldots E_N^{s_N}, \qquad i \neq j$$

míg az $i = j$ esetre:

$$E_j' = \sum_{s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_N = \pm} E_1^{s_1} \ldots E_j' \ldots E_N^{s_N}$$

Az egyes összeadandókat F_n-el jelölve $(n = 1, 2, 3, \ldots, M = 2^N)$ megkaptuk az $\{F_n\}$ rendszert, mint az $\{E_i\}'$ rendszer ortogonalizálását. Ez az $\{F_n\}$ azonban egyszerűsödik, ha tekintetbe vesszük az $\{E_i\}$ normalizáltságát. Az F_n-ek áttekintése céljából vezessük be a következő jelöléseket:

$$F(s_h, s_j) = E_1^- E_2^- \ldots E_{h-1}^- \ldots E_h^{s_h} E_{h+1}^- \ldots E_{j-1}^- E_j'^{s_j} E_{j+1}^- \ldots E_{N-1}^- E_N^-$$

$$F(s_h, s_j, s_i) = E^- E^- \ldots E_{i-1}^- E_i^{s_i} E_{i+1}^- \ldots E_{h-1}^- E_h^{s_h} E_{h+1}^- \ldots E_{j-1}^- E_j^{s_j} E_{j+1} \ldots E_{N-1}^- E_N^-,$$

$$i \neq j, \quad h \neq j.$$

Belátható, hogy a többi típusú F_n-ek mind zérusak, mivel ha a j-edik helyen kívül legalább két helyen áll $+$ jel, akkor az $\{E_i\}$ rendszer ortogonális volta miatt az operátorszorzat értéke zérus lesz[28]. Tehát ha $s_h = +$, $s_i = -$, $i \neq j$, $h \neq j$, akkor a megfelelő

$$F(+, s_j, +) = 0. \tag{5}$$

[26] Voltaképpen $M = 2^N + 1$ értendő, ahol $F_M = 1 - \sum_{n=1}^{2^N} F_n$, de mint látni fogjuk, ez nem jelent lényeges különbséget.

[27] Azzal a különbséggel, hogy az összegezés 1-től $2^N + 1$-ig értendő, ahol $f_M = 1 - \sum_{n=1}^{2^N} f_n$, viszont az erre vonatkozó állítás már következik (2')-ből $(M = 2^N + 1)$.

[28] Felhasználva az E_i-k egymás közti és E_j'-vel való felcserélhetőségét. Mivel, ha E_i az E_j-vel, és E_j az E_j'-vel felcserélhető, azért a felcserélhetőség tranzitivitása alapján (vö. [3], 92. old.) az E_i-k E_j'-vel is felcserélhetők. Az, hogy E_j' az E_j-vel felcserélhető, abból következik, hogy $E_j' E_j = E_j$ hermitikus operátor. (Vö. [3], 51. old.)

Az $\{F_n\}$-nek ezt az egyszerűsödését még így is kifejezhetjük:

(6) $$E_i = \sum_{\substack{h\neq i\\ h\neq j}}\sum (F(-,+,+)+F(-,-,+)) \qquad (i\neq j)$$

Szükségünk lesz még az $i=j$ esetnek megfelelő

(7) $$E_j = F(-,+)$$

összefüggésre is[29]. Ennek bizonyítása a következőképpen történhetik:[30] A definíció szerint:

$$F(-,+) = E_1^- \dots E_h^- \dots E_j' \dots E_N^- = E_j' \cdot \prod_{i\neq j}(E_i^-) = E_j' \prod_{i\neq j}(1-E_i),$$

ahol is felhasználtuk, hogy E_j az E_i-kel felcserélhető.[31] Elég annyit kimutatni, hogy

(7′) $$\prod_{i\neq j}(1-E_i) = E_j,$$

mert akkor ebből $E_j'E_j = E_jE_j' = E_j$ miatt az állított (7) adódik. (7′) egy magától értetődő tényt fejez ki, ha azt az $\{E_i\}$ normalizált rendszerhez tartozó $\{\mathscr{E}_i\}$ ítéletrendszerre fogalmazzuk át. Az $\{\mathscr{E}_i\}$-kre vonatkozó megfelelő állítás:

(7″) $$\mathscr{E}_j = \bar{\mathscr{E}}_1 \& \bar{\mathscr{E}}_2 \& \dots \& \bar{\mathscr{E}}_{j-1} \& \bar{\mathscr{E}}_{j+1} \& \dots \bar{\mathscr{E}}_N.$$

Ez azonban csakugyan így van, hiszen az $\mathscr{E}_i$ tulajdonságok bármelyike, pl. $\mathscr{E}_j$ azt jelenti, hogy sem $\mathscr{E}_1$, sem $\mathscr{E}_2$, sem bármely $\mathscr{E}_3$-tól különböző $\mathscr{E}_i$ nincs meg, mivel $\mathscr{E}_i$-k közül valamelyik feltétlenül megvan.

Szükségünk lesz végül a következő összefüggésre is: ha $x_i > 0$, $(i=1,2,\dots,n)$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$, akkor:

(8) $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \log \sum_{i=1}^{n} x_i > \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i.$$

Bizonyításul alakítsuk át az állítást a következő módon:

$$\left(\sum x_i\right)^{\Sigma x_i} > \prod x_i^{x_i}.$$

Használjuk fel, hogy az x^y függvény mind x-nek, mind pedig y-nak monoton növekvő függvénye. Ezért mivel az x_i-kre tett feltevéseinkből folyólag: $\Sigma x_i > x_i$, $\Pi x_i^{x_i} < x_i^{x_i}$,

$$\left(\sum x_i\right)^{\Sigma x_i} > \left(\sum x_i\right)^{x_i} > x_i^{x_i}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$(\Sigma x_i)^{\Sigma x_i} > x_i^{x_i},$$

viszont:

$$\Pi x_i^{x_i} < x_i^{x_i}.$$

[29] Ez természetesen h-tól nem függ, hiszen a j-edik tényezőn kívül *minden* tényezőben a $-$ je áll $F(-,+)$-ban.
[30] E számítás egyszerűsítéséért TŐRÖS RÓBERT kollégámnak mondok köszönetet.
[31] L. 28. at.

E két egyenlőtlenséget összekapcsolva:

$$(\Sigma x_i)^{\Sigma x_i} > x_i^{x_i} > \Pi x_i^{x_i},$$

tehát

$$(\Sigma x_i)^{\Sigma x_i} > \Pi x_i^{x_i},$$

amint állítottuk.

Az entrópia növekedésének bizonyítása előtt még az $\{F_m\}$ rendszer teljességével kell foglalkoznunk. Az látható, hogy a (4. 3) rendszerből nyert F_n-ek már ortogonális rendszert alkotnak, vagyis (4. 2) teljesül, amennyiben

$$F_i F_k = 0, \qquad (i \neq k;\; i, k = 1, 2, \ldots, 2^N).$$

A teljesség azonban nem áll, mivel

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{2^N} F_n = E_1 + \ldots + E_j' + \ldots + E_N = \sum_{i=1}^{N} E_i - E_j + E_j' = 1 - (E_j - E_j') \neq 1,$$

hacsak $\mathscr{E}_j'$ nem triviális következménye $\mathscr{E}_j$-nek, vagyis $E_j' \neq E_j$. A 3. §-ban megindokoltuk, hogy egy makroszkopikus megfigyelő mérési módját reprezentáló projekciós operátor-rendszernek teljesnek kell lennie. Ezért $\{F_n\}$ is bővítendő az $F_{2^N+1} = 1 - \sum_{n=1}^{2^N} F_n$ tag hozzáfűzésével, amelyre természetesen, mint az könnyen igazolható,

$$F_n F_{2^N+1} = F_{2^N+1} F_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, 2^N).$$

Mármost ezen módosított rendszer az, amelyre vonatkozó[32]

$$-K \sum_{n=1}^{2^N+1} f_n \log f_n,$$

$$f_n = \mathrm{Spur}\, U F_n$$

kifejezés entrópiának tekintendő a 3. § értelmezése szerint, s ez az, amit az eredeti

$$-K \sum_{i=1}^{n} e_i \log e_i$$

kifejezéssel össze kell mérnünk. Ezt végezzük el a következő paragrafusban.

5. §. Az entrópia növekedése

Ezek után a bebizonyított (4. 6), (4. 7), (4. 8) összefüggéseket felhasználva könnyen megmutathatjuk, hogy

$$(1) \quad -K \sum_{n=1}^{2^N+1} f_n \log f_n > -K \sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i .$$

Mivel $-K < 0$, azért elég annyit kimutatni, hogy

$$\sum_{n=1}^{2^N+1} f_n \log f_n < \sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i .$$

[32] Lásd a 28. és 20. lábjegyzeteket.

Vagy ami ugyanaz, az $f_{2^N+1} = 1-\sum_{n=1}^{2^N} f_n = 1-f$ jelölést használva,

$$\sum_{n=1}^{2^N} f_n \log f_n + (1-f)\log(1-f) < \sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i .$$

Ehelyett pedig az ennél erősebb

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{2^N} f_n \log f_n < \sum_{i=1}^{N} e_i \log e_i$$

egyenlőtlenséget bizonyítjuk be, ami $(1-f)\log(1-f)<0$ miatt az állított (1)-et maga után vonja.

(2) belátására fejezzük ki az e_i-ket (4.6) alapján f_n-ekkel: Bevezetve a

$$F_{ni} \equiv F(-,+,+)+F(-,-,+)$$

jelölést, (4. 6) így írható:

$$(3) \qquad E_i = \sum_{h\neq i} F_{ni} \qquad \begin{matrix}(i\neq j)\\ h\neq j\end{matrix}$$

(3)-at (4.7) figyelembevételével kiterjeszthetjük az $i=j$ esetre is az

$$F(-,+) = \sum_{h\neq j} F_{nj} = E_j$$

megállapodással.

Így általánosan:

$$E_i = \sum_{h\neq i} F_{ni} \qquad (i=1,2,\ldots,N).$$

Képezve a Spur $UE_i = e_i$-t és a Spur $UF_{hi} = f_{hi}$ jelöléssel

$$e_i = \sum_{n\neq i} f_{ni}$$

Ezt a (2) összefüggésbe helyettesítve, a

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{2^N} f_n \log f_n < \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{h\neq i} f_{ni}\Big) \log \Big(\sum_{h\neq i} f_{ni}\Big)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahol

$$\sum_{h\neq i} f_{nj} = f_j f(-,+) = \mathrm{Spur}\, UF(-,+).$$

Most vegyük figyelembe, hogy az f_n-ek közül csak az $f_{hi}(+)$ és az $f_{hi}(-)$-ok különbözhetnek zérustól, tehát

$$f_{n_i}(+) = \mathrm{Spur}\, UF_{n_i}(+) = \mathrm{Spur}\, UF(-,+,+), \quad f_{n_i}(-) = \mathrm{Spur}\, UF(-,-,+).$$

A (4) egyenlőtlenség bal oldala tehát két részre bontható:

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{2^N} f_n \log f_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{h\neq 1}^{N} f_{n_i}^{(+)} \log f_{n_i}^{(+)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{n\neq i} f_{n_i}^{(-)} \log f_{n_i}^{(-)},$$

ahol

$$\sum_{h\neq j} f_{n_j}^{(+)} \log f_{n_j}^{(+)} \equiv f_{n_j}^{(+)} \log f_{n_j}^{(+)} \quad \text{és} \quad \sum_{h\neq j} f_{n_j}^{(-)} \log f_{n_j}^{(-)} \equiv 0.$$

Ezt felhasználva elég csupán annyit megmutatni, hogy

$$0 > \sum_{i=1}^{N}\left\{\left[\sum_{n\neq i} f_{n_i}^{(+)}\log f_{n_i}^{(+)} + f_{n_i}^{(-)}\log f_{n_i}^{(-)}\right] - \left[\left(\sum_{h\neq i} f_{n_i}^{(+)} + f_{n_i}^{(-)}\right)\log\sum_{h\neq i}\left(f_{n_i}^{(+)}+f_{n_i}^{(-)}\right)\right]\right\},$$

vagy ami ugyanaz, azt, hogy

$$0 > \sum_{i=1}^{N}\left\{\left[\sum_{h\neq i}\left(f_{n_i}^{(+)}\log f_{n_i}^{(+)}\right) - \sum_{h\neq i} f_{n_i}^{(+)}\log f_{n_i}^{(+)}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\sum_{n\neq i} f_{n_i}^{(-)}\log f_{n_i}^{(-)} - \sum_{h\neq i} f_{n_i}^{(-)}\log\sum_{h\neq i} f_{n_i}^{(-)}\right]\right\}.$$

Ez azonban (4. 8) alapján triviális.[33]

Ezzel kitűzött célunkat elértük.

Megjegyezzük, hogy az $f_{1i}^{(+)}, f_{2i}^{(+)}, \ldots, f_{1i}^{(-)}, \ldots$ valószínűségek az $\{E_i\}'$ rendszer *korrelációját* fejezik ki, azaz azt, hogy az $\mathscr{E}'_j$, ill. $\overline{\mathscr{E}'_j}$ tulajdonságnak valamelyik $\overline{\mathscr{E}_i}$-sal való együttes előfordulásának mekkora a valószínűsége.

Befejezésül köszönetet mondok FÉNYES IMRE egyetemi tanárnak, akivel való beszélgetésem során a dolgozat problémái tisztázódtak előttem.

IRODALOM

[1] FÉNYES I.: A Gibbs-paradoxon. (Még nem publikált kézirat.)

[2] L. SZILÁRD: Über die Entropieverminderung in einem thermodinamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen, *Z. Phys.*, **53** (1929) 840—856.

[3] J. v. NEUMANN: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Springer, 1932.

[4] R. CARNAP: *Physikalische Begriffsbildung*, Karlsruhe, 1926.

[5] D. HILBERT—P. BERNAYS: *Grundlagen der Mathematik*, I., Berlin, Springer, 1934, 53—60. oldal.

[6] BALATONI J.—RÉNYI A.: Az entrópia fogalmáról, *M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956) 9—40.

[7] L. BRILLOUIN: *Science and Information Theory*, New York, Academic Press., 1956, 115., 122., 152., 153., 170. oldal.

[8] N. I. ACHIESER—I. M. GLASSMANN: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Berlin, Akademie-Verl., 1954.,

(Beérkezett: 1964. X. 9.)

[33] A j-edik tag kivételével minden tag negatív járulékot ad a $\sum_{h\neq i}$ összegekben. A j-edik tag esetében pedig: vö. (5)

$$\sum_{h\neq j} f_{n_j}^{(\pm)}\log\sum_{h\neq j} f_{n_j}^{(\pm)} - \sum_{h\neq j} f_{n_j}^{(\pm)}\log f_{n_j}^{(\pm)} = f_{n_j}^{(\pm)}\log f_{n_j}^{(\pm)} - f_{n_j}^{(\pm)}\log f_{n_j}^{(\pm)} = 0.$$

Természetesen a $\sum_{h\neq i}$ összegekben a $h=j$ érték kimarad.

A SZABÁLYOS POLIÉDEREK EGY SZÉLSŐÉRTÉK TULAJDONSÁGA ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ TEREKBEN

Írta: TOMOR BENEDEK

Az euklideszi tér egy R sugarú gömböt tartalmazó l lapú, e élű, c csúcsú (röviden: $[l, e, c]$) konvex poliéderének F felszínére és V térfogatára vonatkozóan érvényesek a következő — egymással ekvivalens — egyenlőtlenségek [1]:

$$F \geqq 2eR^2 \operatorname{tg}\frac{\pi l}{2e}(k^2-1), \tag{1}$$

$$V \geqq \frac{2e}{3} R^3 \operatorname{tg}\frac{\pi l}{2e}(k^2-1). \tag{2}$$

Itt (és a továbbiakban is) k a $\dfrac{\sin\dfrac{\pi l}{2e}}{\cos\dfrac{\pi c}{2e}}$ törtet jelenti.

Egyenlőség csak a gömb köré írt szabályos poliéderekre áll fenn. Állandó görbületű terekben a két probléma nem egyenértékű. A kérdéses poliéder térfogatának alsó becslése olyan tetraéder térfogatának meghatározására vezet, amelynek mind a 4 lapja derékszögű háromszög (ortoschem tetraéder). LOBACSEVSZKIJ, SCHLÄFLI és mások vizsgálatai szerint egy ilyen tetraéder térfogata nem elemi függvénye a lapszögeknek. FEJES TÓTH [2] bebizonyította, hogy a $\varkappa$ görbületű térben érvényes a következő becslés:

$$V \geqq \frac{2e}{\sqrt{\varkappa^3}} \int_0^{\pi l/2e} \left\{\sqrt{\varkappa}\, R - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{k^2-\sin^2\varphi}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, R \frac{\sqrt{k^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)\right\} d\varphi, \tag{3}$$

és egyenlőség csak a gömb köré írt szabályos poliéderekre áll fenn. (Szférikus térben ezek közé számítjuk a szabályos diédereket és hosoédereket* is.)

A poliéder felszínére vonatkozó becslés azonban elemi függvényekkel elvégezhető. E dolgozatban bebizonyítjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$F \geqq \frac{4e}{\varkappa}\left[\frac{\pi l}{2e} - \arcsin\frac{\sin\dfrac{\pi l}{2e}}{\sqrt{1+(k^2-1)\sin^2\sqrt{\varkappa}\, R}}\right]. \tag{4}$$

* A diéder duálisának ez az elnevezése VITO CARAVELLItől (1724—1800) származik.

Egyenlőség ebben az esetben is csak a gömb köré írt szabályos poliéderekre áll fenn. A $\varkappa \to 0$ határesetben a (3), ill. (4) formula a (2), ill. (1) formulába megy át, mint arról könnyen meggyőződhetünk.

Az említett tételek a következő, általános tételből származnak ([1], [2]):

Jelöljük $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$-lel a Φ gömb olyan $e_1, e_2, \ldots, e_l$ oldalszámú konvex poligonjait**, amelyekre: $\sum_{i=1}^{l} \Phi_i = \Phi$, s-sel pedig az $e_1, \ldots, e_l$ oldalszámok összegét.

Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_l$ Φ-nek tetszőleges pontjai, $a(x)$ pedig egy, a $0 \leqq x \leqq \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\pi\Phi}$ (a legnagyobb gömbi távolság) intervallumban értelmezett szigorúan monoton növekvő függvény.

Akkor:

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} a(P_i P)\, d\Phi \geqq 2s \int_{\Delta} a(AP)\, d\Phi, \tag{5a}$$

ahol Δ az az ABC derékszögű gömbháromszög, amelynek szögei: $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi l}{s}$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{s} - \alpha$. Ezek alapján: $\Delta = \frac{\Phi}{2s}$. (α és β egyszerűen szemléltethető. Az egyes sokszögek belsejében vegyünk fel egy-egy pontot, és ezeket kössük össze a megfelelő sokszög csúcsaival. α az így meghatározott középponti szögek, β pedig a sokszögekben szereplő szögek átlagának fele.)

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$ egybevágó szabályos poligonok, $P_1, P_2, \ldots, P_l$ pedig ezek középpontjai. (Szabályos poligonnak számít a gömbkétszög és a félgömb is.)

Ha speciálisan a sokszögek a gömb egy l, e, c lap-, él- és csúcsszámú konvex mozaikját alkotják, akkor $\alpha = \frac{\pi l}{2e}$, $\beta = \frac{\pi c}{2e}$, és az egyenlőtlenség a

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} a(P_i P)\, d\Phi \geqq 4e \int_{\Delta} a(AP)\, d\Phi \tag{5b}$$

alakot ölti. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a mozaik szabályos, $P_1, P_2, \ldots, P_l$ pedig a mozaik lapjainak középpontjai.

A tétel az idézett forrásmunkákban csak ez utóbbi fogalmazásban szerepel. Ezért a teljesség kedvéért vázoljuk az (5a) egyenlőtlenség igazolását, amely lényegtelen különbségektől eltekintve azonos az (5b) tétel ismert bizonyításával.

Felhasználunk két, most nem bizonyított segédtételt.

1. Jelöljük σ-val az O középpontú, félgömbnél nem nagyobb K gömbsüvegnek valamely főkör által levágott szeletét.

A $0 \leqq \sigma \leqq \frac{K}{2}$ intervallumban az

$$\omega(\sigma) = \int_{\sigma} a(OP)\, d\Phi$$

függvény konkáv.

** A továbbiakban egy gömbi tartománynak és a területének a jelölésére ugyanazt a betűt használjuk.

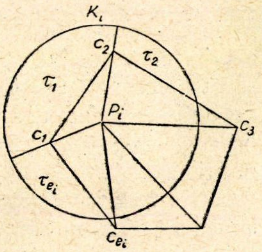
2. Tekintsünk egy olyan gömbháromszöget, amelynek egyik csúcsa az O-val átellenes pont. Ennek és K-nak a közös részét jelöljük τ-val.

Akkor:

$$\int_\tau a(OP)d\Phi \leqq \omega(\tau).$$

Az $a(x)$ függvény monotonitásából, valamint a Φ_i tartományok konvexitásából következik, hogy az $\int_{\Phi_i} a(P_iP)d\Phi$ integrál változó P_i esetén minimumát a Φ_i tartomány valamely belső vagy kerületi pontjában veszi fel.

Jelöljük a Φ_i sokszög csúcsait ciklikus sorrendben $C_1, C_2, \ldots, C_{e_i}$-vel, a P_i pont körül AB szférikus sugárral húzott kört (gömbsüveget) K_i-vel (1. ábra). Jelentse továbbá $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{e_i}$ a K_i körnek a Φ_i sokszögön kívül eső azon részeit, amelyek közül az első a P_iC_1, C_1C_2, P_iC_2, a második a P_iC_2, C_2C_3, $P_iC_3, \ldots$ az e_i-edik a $P_iC_{e_i}$, $C_{e_i}C_1$, P_iC_1 főkörök által határolt tartományba esik (esetleg $\tau_\nu = 0$).



1. ábra

A közös $a(P_iP)d\Phi$ integrandust elhagyva, írhatjuk:

$$\int_{\Phi_i} = \int_{K_i} - \sum_{\nu=1}^{e_i} \int_{\tau_\nu} + \int_{\Phi_i'},$$

ahol Φ_i' Φ_i-nek a K_i-n kívül eső részét jelenti. Az $i = 1, 2, \ldots, l$-re felírt egyenlőségeket összeadva és segédtételeinket alkalmazva, a következő eredményre jutunk:

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} = l\int_K - \sum_{\nu=1}^{s} \int_{\tau_\nu} + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} \geqq l\int_K - \sum_{\nu=1}^{s} \omega(\tau_\nu) + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} \geqq$$

$$\geqq l\int_K - s\omega\left(\frac{1}{s}\sum_{\nu=1}^{s} \tau_\nu\right) + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi'}.$$

K az A körül AB sugárral rajzolt kör, $\int_K$ pedig az $\int_K a(AP)d\Phi$ integrál.

Nyilván — a $\sum_{i=1}^{l} \Phi_i' = \Phi'$ rövid jelöléssel — :

$$\Phi = lK - \sum_{\nu=1}^{s} \tau_\nu + \Phi',$$

és így

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} \geqq l\int_K - s\omega\left(\frac{lK - \Phi + \Phi'}{s}\right) + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} =$$

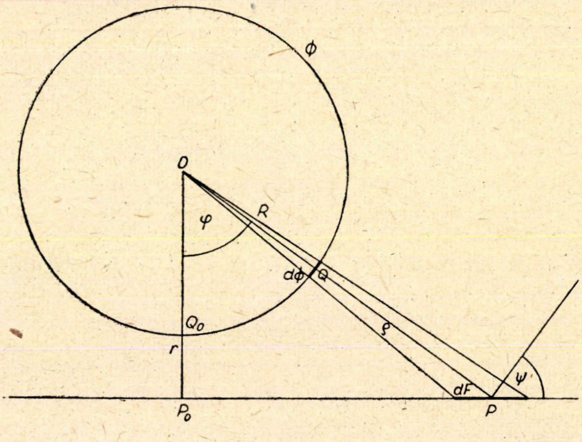
$$= l\int_K - s\omega\left(\frac{lK - \Phi}{s}\right) - s\int_\tau a(AP)d\Phi + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'}.$$

Itt τ K-nak azt a részét jelenti, amely az $\frac{lK-\Phi}{s}$ területű körszeletet az $\frac{lK-\Phi+\Phi'}{s}$ területű körszeletté egészíti ki. Az $a(x)$ függvény monotonitása miatt a két utolsó tag összege $\geqq 0$, és így

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} \geqq l \int_{K} -s\omega\left(\frac{lK-\Phi}{s}\right) = 2s\left[\frac{\alpha}{2\pi}\int_{K} -\frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{lK-\Phi}{s}\right)\right] = 2s\int_{\Delta} a(AP)\,d\Phi.$$

Ez utóbbi egyenlőség belátásához vegyük figyelembe azt, hogy $\frac{\alpha}{2\pi}K$ K-nak α középponti szögű szektora, $\frac{lK-\Phi}{s}$ pedig $\Delta = \frac{\Phi}{2s} = \frac{\alpha}{2\pi}K - \frac{1}{2}\frac{lK-\Phi}{s}$ alapján az a körszelet, amelyet K-ból a BC főkör levág. Ezzel az (5a), ill. az (5b) egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a K_i körök a Φ_i sokszögeket teljesen lefedik, a τ_ν tartományok pedig egybevágó körszeletek. Ez akkor igaz, ha a Φ_i sokszögek egybevágó szabályos sokszögek, a P_i pontok pedig ezek középpontjai.

Térjünk rá a konvex poliéderek felszínének és térfogatának vizsgálatára. Jelentse P az R sugarú, Φ felszínű gömb O középpontjától r távolságra levő sík egy pontját, dF a hozzátartozó felszínelemet, Q és $d\Phi$ vetületüket a gömbön, dV pedig a dF alapterületű, O csúcsú elemi kúpszerű test térfogatát. O-ból a síkra bocsátott merőleges talppontját jelöljük P_0-lal, P_0 vetületét a gömbön Q_0-lal, a POP_0 szöget φ-vel (2. ábra).



2. ábra

Adott R esetén dF és dV $d\Phi$-nek, r-nek és φ-nek (illetve a QQ_0 gömbi távolságnak) függvénye:

$$dF = f(r, \varphi)\,d\Phi,$$

$$dV = v(r, \varphi)\,d\Phi.$$

Az állandó görbületű tér egy $[l, e, c]$ konvex poliéderét vetítsük centrálisan egy általa tartalmazott gömbre. A gömb sugarát jelöljük R-rel, a poliéder lapsíkjainak távolságát a gömb középpontjától pedig $r_1, r_2, \ldots, r_l$-lel. Az euklideszi és a hiperbolikus esetben a kérdéses gömb tetszőleges lehet, a szférikus esetben azonban átmenetileg a legnagyobb tartalmazott gömbre kell szorítkoznunk, hogy biztosítani tudjuk a továbbiakban jelentősen kihasznált $r_i \leqq \frac{\pi}{2}$ feltételt. A poliéder gömbi vetülete egy $[l, e, c]$ konvex mozaik lesz, amelynek lapjait $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$-lel jelöljük.

A poliéder felszíne és térfogata:

$$F = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} f(r_i, \varphi) d\Phi,$$

$$V = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} v(r_i, \varphi) d\Phi.$$

$v(r, \varphi)$ az OP sugarú gömb térfogatának $\frac{1}{\Phi}$-szerese, és így nyilván r-nek és φ-nek szigorúan monoton növekvő függvénye.

Az euklideszi esetben $f(r, \varphi) = \frac{r^2}{R^2} \sec^3 \varphi \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, mindkét változójában szigorúan monoton növekvő függvény.

E meggondolások alapján az (5b) egyenlőtlenséget alkalmazva nyerjük:

$$F \geqq 4e \int_{\Delta} f(R, \varphi) d\Phi \quad \text{az euklideszi térben},$$

$$V \geqq 4e \int_{\Delta} v(R, \varphi) d\Phi \quad \text{általában}.$$

Itt e jelenti a poliéder éleinek számát, φ pedig az AOP szöget. Egyenlőség csak a gömböt érintő szabályos testekre áll fenn. A jobb oldalon álló integrálok szemléletes jelentését is megadhatjuk: az első az ABC háromszög vetületének területe a gömböt az A pontban érintő síkon; a második pedig annak az ortoschem tetraédernek a térfogata, amelynek csúcsai az említett vetület csúcspontjai és a gömb középpontja. Ezeket meghatározva kapjuk az (1)—(3) tételeket.

Határozzuk meg $f(r, \varphi)$-t általánosan. Jelöljük az $\overline{OP}$ távolságot ϱ-val, a P pontban az $\overline{OP}$-re merőlegesen állított sík és az adott sík szögét ψ-vel. A dF felszínelemet vetítsük először az adott gömbbel koncentrikus ϱ sugarú gömbre. Mivel a P pont elég kis környezetében az euklideszi geometria érvényes, az így nyert dF' felszínelemre:

$$dF' = \cos \psi \, dF.$$

dF' és $d\Phi$ között a következő kapcsolat áll fenn:

$$dF' = \frac{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R}\,d\Phi,$$

és így

$$dF = \frac{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R}\sec\psi\,d\Phi.$$

Az OP_0P derékszögű háromszögből:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)} = \sec\psi = \frac{\sin\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{\sin\sqrt{\varkappa}\,r},$$

továbbá

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = \sin\psi = \cos\sqrt{\varkappa}\,r\sin\varphi,$$

tehát

$$dF = \frac{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,r}{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R(1-\cos^2\sqrt{\varkappa}\,r\sin^2\varphi)^{3/2}}\,d\Phi = f(r,\varphi)\,d\Phi. \tag{6}$$

A természetes hosszegységet használva,

$$f(r,\varphi) = \frac{\sin^2 r}{\sin^2 R(1-\cos^2 r\sin^2\varphi)^{3/2}} \tag{6a}$$

a szférikus,

$$f(r,\varphi) = \frac{\mathrm{sh}^2 r}{\mathrm{sh}^2 R(1-\mathrm{ch}^2 r\sin^2\varphi)^{3/2}} \tag{6b}$$

a hiperbolikus térben.

A (6a) és (6b) formulákból közvetlenül látható, hogy $f(r, \varphi)$ rögzített r mellett φ-nek, hiperbolikus térben pedig rögzített φ mellett r-nek is szigorúan monoton növekvő függvénye.

Így a hiperbolikus térben az R sugarú gömböt tartalmazó $[l, e, c]$ konvex poliéder felszínére a már ismert jelölésekkel a következő becslést kapjuk:

$$F = \sum_{i=1}^{l}\int_{\Phi_i} f(r_i,\varphi)\,d\Phi \geqq \sum_{i=1}^{l}\int_{\Phi_i} f(R,\varphi)\,d\Phi \geqq 4e\int_{\Delta} f(R,\varphi)\,d\Phi. \tag{7a}$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a poliéder a gömb köré írt szabályos poliéder.

A szférikus térben $f(r, \varphi)$ r-nek nem monoton növekvő függvénye a szóba jövő teljes tartományban. FEJES TÓTH LÁSZLÓ egy ötlete alapján azonban ebben az esetben is találunk egy eljárást, amely a (7a)-val analóg egyenlőtlenségre vezet. Felhasználjuk a szabályos poliéderek egy általánosan érvényes szélsőérték tulajdonságát:

Tekintsük a Φ gömb középpontjától r távolságban levő $\left(\text{a szférikus térben feltesszük, hogy } r \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ és a gömböt nem metsző síkban azokat a konvex n-szögeket, amelyek vetületének területe a gömbön ugyanakkora. E sokszögek közül azoknak a szabályos n-szögeknek a területe a legkisebb, amelyek középpontja a gömb középpontjának vetülete a síkon. E tételt az (5) tétel bizonyításához hasonlóan igazolhatjuk (vö. [3]).

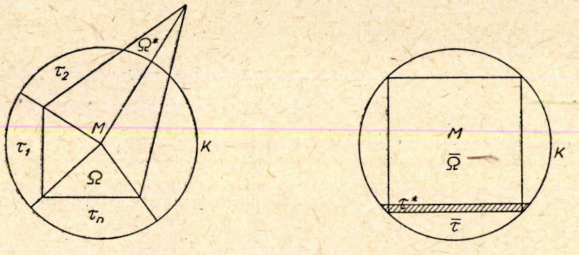
Jelöljünk $\bar{\Omega}$-sal egy olyan szabályos gömbi n-szöget, amelynek középpontja a Φ gömb középpontjából a síkra húzott merőleges és a gömb M metszéspontja, Ω-val pedig egy ugyanakkora területű, egyébként tetszőleges konvex n-szöget. (Természetesen feltesszük, hogy $\bar{\Omega}$ és Ω vetülete a síkon létezik.) Állításunk szerint:

$$\int_{\Omega} f(\varphi)\,d\Phi \geqq \int_{\bar{\Omega}} f(\varphi)\,d\Phi,$$

ahol $f(\varphi)$ a korábban $f(r, \varphi)$-vel jelölt függvényt jelenti rögzített r esetén. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha Ω is M középpontú szabályos n-szög.

A bizonyításnál — $f(r, \varphi)$ φ-szerinti monotonitása alapján — szorítkozhatunk arra az esetre, amikor M Ω-nak belső pontja. Jelöljük K-val $\bar{\Omega}$ körülírt körét (3. ábra). Jelöljük továbbá Ω^*-gal Ω-nak K-n kívül eső részét, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$-nel azokat a tartományokat, amelyekre az Ω csúcsain át húzott sugarak osztják fel K-nak Ω-n kívüli részét, $\bar{\tau}$-sal az $\bar{\Omega}$ egy oldala által K-ból levágott körszeletet, τ^*-gal pedig azt a sávot, amely $\bar{\tau}$-t $\bar{\tau}+\frac{\Omega^*}{n}$ területű körszeletre egészíti ki.

A tétel igazolásához felhasználjuk az (5a, b) általános egyenlőtlenség bizonyí-



3. ábra

tásánál már megismert két segédtételt, továbbá a *Jensen*-egyenlőtlenséget.

Ezek alapján (az integrandust nem írjuk ki):

$$\int_{\Omega} = \int_{K} - \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_i} + \int_{\Omega^*} \geqq \int_{K} - \sum_{i=1}^{n} \omega(\tau_i) + \int_{\Omega^*} \geqq \int_{K} - n\omega\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right) + \int_{\Omega^*} =$$

$$= \int_{K} - n\omega(\bar{\tau}) - n\int_{\tau^*} + \int_{\Omega^*}.$$

A nyert összeg két utolsó tagja $f(\varphi)$ monotonitása következtében $\geqq 0$, így

$$\int_{\Omega} f(\varphi)\,d\Phi \geqq \int_{K} f(\varphi)\,d\Phi - n\int_{\bar{\tau}} f(\varphi)\,d\Phi = \int_{\bar{\Omega}} f(\varphi)\,d\Phi.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha Ω is M középpontú szabályos n-szög.

Térjünk vissza eredeti problémánkra. A most bebizonyítottak szerint a poliéder minden lapjának meg tudunk feleltetni egy nála nem nagyobb területű szabályos sokszöget. Vetítsük ezt a szabályos sokszöget centrálisan a gömb azonos normálisú érintősíkjára. Ezzel a terület nem növekedhet $\left(r \leqq \frac{\pi}{2}\right)$. Ilyen módon a poliéder minden lapját helyettesíthetjük egy azonos oldalszámú szabályos sokszöggel, amely középpontjában érintkezik a gömbbel, és amelynek területe nem nagyobb a poliéderlap területénél, viszont vetülete a gömbön ugyanakkora. Jelöljük a sokszögeket F_i'-vel, a gömbi vetületeiket Φ_i'-vel, oldalszámukat e_i-vel, az oldalszámok összegét s-sel.

Az elmondottak alapján:

$$F = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} f(r_i, \varphi) d\Phi \geqq \sum_{i=1}^{l} F_i' = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} f(R, \varphi) d\Phi,$$

ahol Φ_i és Φ_i' megegyező területű és oldalszámú konvex gömbi sokszögek (Φ_i' szabályos).

Az (5a) tétel minden feltétele teljesül, ezért:

$$F \geqq \sum_{i=1}^{l} F_i' = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} f(R, \varphi) d\Phi \geqq 2s \int_{\Delta} f(R, \varphi) d\Phi,$$

ahol Δ jelentése ismert.

A helyettesítés során a gömbi sokszögek oldalszáma nem változott, ezért $s = 2e$, továbbá Δ szögei:

$$\alpha = \frac{\pi l}{2e} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\pi c}{2e}.$$

Tehát a következő (a hiperbolikus esettel analóg) becslést kapjuk:

$$F \geqq 4e \int_{\Delta} f(R, \varphi) d\Phi, \tag{7b}$$

és könnyen belátható, hogy az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a poliéder a gömb köré írt szabályos poliéder (ide számítva a szabályos diédereket és hosoédereket is).

Ki kell még számítanunk a (7a) és (7b) jobb oldalán álló integrált. Mint tudjuk, ezek az ABC háromszög vetületének területét jelentik.

Jelöljük a B és C pontok vetületét a kérdéses síkon B'-vel és C'-vel, és vezessük be az $\overline{AC'} = u$, $\overline{B'C'} = v$, $B' \sphericalangle = \beta'$ jelöléseket (4. ábra).

Az $AB'C'$ háromszög területe:

$$T = \frac{1}{\varkappa}\left(\alpha + \beta' - \frac{\pi}{2}\right).$$

Meghatározzuk β'-t.

Az $AB'C'$ háromszögből:

$$\cos \beta' = \cos \sqrt{\varkappa}\, u \sin \alpha. \tag{8}$$

Az OAC' háromszögből:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, u = \sin\sqrt{\varkappa}\, R \operatorname{tg} b,$$

ahol b az AC oldalt jelenti.

Az ABC gömbháromszögből:

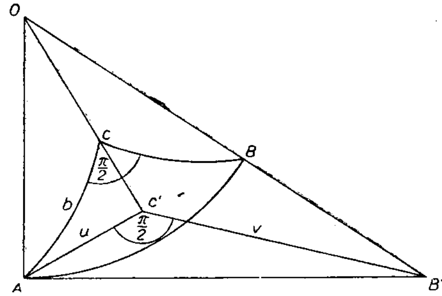
$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

ahonnan

$$\operatorname{tg} b = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1}.$$

Tehát:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, u = \sin\sqrt{\varkappa}\, R \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1},$$



4. ábra

s így

$$\cos\sqrt{\varkappa}\, u = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2\sqrt{\varkappa}\, R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1\right)}}.$$

Ezt (8)-ba helyettesítve:

$$\cos\beta' = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + \sin^2\sqrt{\varkappa}\, R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1\right)}} = -\sin\left(\beta' - \frac{\pi}{2}\right).$$

Tehát az $AB'C'$ háromszög területe:

$$T = \frac{1}{\varkappa}\left[\alpha - \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + \sin^2\sqrt{\varkappa}\, R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1\right)}}\right], \tag{9}$$

ahol

$$\alpha = \frac{\pi l}{2e}, \qquad \beta = \frac{\pi c}{2e}.$$

(9)-et (7b)-vel egybevetve adódik a (4) tétel.

A szférikus esetben most már elejthetjük azt a megszorítást, hogy R a poliéder által tartalmazott legnagyobb gömb sugara, mert a szóba jövő intervallumban $\left(R \leq \frac{\pi}{2}\right)$ T R-nek növekvő függvénye.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth, L.: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg (1953).

[2] ——— : On the volume of a polyhedron in non-Euclidean spaces, *Publ. Math.* 4 (1956).

[3] Coxeter, H. S. M.—Fejes Tóth, L.: The total length of the edges of a non-Euclidean polyhedron with triangular faces, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **14** (1963).

[4] Imre, M.: Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** (1964).

(Beérkezett: 1965. II. 15.)

A FÉLCSOPORTOK NÖVELŐ ELEMEIRŐL

Írta: LAJOS SÁNDOR

Bevezetés

Ismeretes, hogy egy multiplikatív csoport összes elemeinek halmazát megszorozva a csoportnak valamelyik elemével, ismét megkapjuk a csoport valamennyi elemét. Ha a csoportnak valamely valódi részhalmazát szorozzuk a csoport egyik elemével, akkor sohasem kapjuk meg a csoport összes elemét. A félcsoportok körében azonban sem az előbbi, sem az utóbbi tulajdonság nem teljesül általában.

Az első tulajdonsággal kapcsolatban említhetjük például az összes egész számok multiplikatív félcsoportját. Ha ezt a félcsoportot megszorozzuk valamelyik k egész számmal, akkor a k-val osztható egész számok halmazát kapjuk eredményül. Ha $k \neq \pm 1$, akkor ez a halmaz nem azonos az összes egész számok halmazával.

Már nem ilyen egyszerű a helyzet az imént említett második tulajdonsággal. E. Sz. LJAPIN megmutatta, hogy léteznek olyan félcsoportok, amelyeknek bizonyos elemeit megszorozva a félcsoportnak valamely valódi részhalmazával, eredményül a félcsoport összes elemeinek halmazát kapjuk. Az ilyen tulajdonságú elemekre vezette be LJAPIN a növelő elem elnevezést. Ebben a dolgozatban ismertetjük a növelő elemekkel kapcsolatban eddig elért fontosabb eredményeket.

1. A növelő elem definíciója és tulajdonságai

A félcsoportok elemei közül kiválnak különleges tulajdonságaikkal az E. Sz. LJAPIN [1] által bevezetett ún. növelő elemek.

1. 1. DEFINÍCIÓ. Legyen S tetszőleges félcsoport. Az S félcsoport a elemét *jobb oldali növelő elemnek*, vagy röviden *jobbnövelőnek* nevezzük, ha az S félcsoportnak van olyan T valódi részhalmaza, amelyre

$$Ta = S \qquad (T \subset S,\ T \neq S).$$

Az S félcsoport b elemét *bal oldali növelő elemnek*, vagy röviden *balnövelő elemnek* nevezzük, ha S-nek van olyan U valódi részhalmaza, amelyre

$$bU = S \qquad (U \subset S,\ U \neq S).$$

A definícióból még egyáltalán nem magától értetődő, hogy léteznek növelő elemekkel rendelkező félcsoportok. Ezt csak a következő pontban bizonyítjuk be, most a növelő elemek néhány tulajdonságával foglalkozunk.

1. 2. TÉTEL. *A félcsoport egyik eleme sem lehet egyidejűleg bal oldali és jobb oldali növelő elem.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben feltesszük, hogy az S félcsoport x eleme egyidejűleg bal oldali és jobb oldali növelő eleme S-nek. Ez azt jelenti, hogy valamilyen $T \subset S$ és $U \subset S$ valódi részhalmazokra fennáll, hogy $Tx = S$, $xU = S$. Abból, hogy $Tx = S$, következik, hogy az S félcsoportban vannak olyan s_1, s_2 elemek, amelyekre

$$s_1 x = x, \qquad s_2 x = s_1.$$

Mivel $xU = S$, azért az S félcsoportnak mindegyik a eleme előállítható xu alakban, ahol $u \in U$. Innen következik, hogy

$$s_1 a = s_1 xu = xu = a,$$

vagyis s_1 bal oldali egységeleme az S félcsoportnak. Ennek következtében

$$s_2 S = s_2 xU = s_1 U = U.$$

De másrészt

$$s_2 S \supseteqq s_2 xS = s_1 S = S.$$

Így azt kapjuk, hogy $U \supseteqq S$, ami ellentmond a feltevésnek. Ezzel az 1. 2 tételt bebizonyítottuk.

Természetesen az sem igaz, hogy mindegyik félcsoport rendelkezik növelő elemekkel. Megemlítünk néhány növelő elemet nem tartalmazó félcsoport osztályt.

1. 3. Lemma. *A véges félcsoportok nem tartalmaznak növelő elemet.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S véges félcsoport. Ha T valamely valódi részhalmaza S-nek, akkor az xT halmaz (s ugyanígy a Tx halmaz is) tetszőleges $x \in S$ elem esetén kevesebb elemet tartalmaz, mint S, ezért nem lehet egyenlő S-sel.

1. 4. Lemma. *A kommutatív félcsoportoknak nincsen növelő elemük.*

Bizonyítás. Kommutatív félcsoportban egy balnövelő elemnek jobbnövelőnek kellene lennie, ami az 1. 2 tétel szerint lehetetlen.

1. 5. Lemma. *A reguláris félcsoportoknak nincsen növelő elemük.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S reguláris félcsoport, vagyis érvényes benne mind a jobb, mind a bal oldali egyszerűsítési szabály, továbbá az a elem jobbnövelő:

$$Ta = S \qquad (T \subset S, \ T \neq S).$$

Vegyük az S-nek valamely T-hez nem tartozó b elemét. Minthogy $Ta = S$, azért valamelyik $t \in T$ elemre fennáll, hogy $ta = ba$. Reguláris félcsoportban ez csak úgy lehetséges, ha $t = b$, ami ellentmond annak, hogy $t \in T$ és b nem eleme T-nek.

Mivel a csoportok is reguláris félcsoportok, azért az 1. 5 lemmából azonnal adódik a következő

1. 6. Lemma. *A csoportoknak nincsen növelő elemük.*

1. 7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az S félcsoport elemei közül bizonyosak balnövelő elemek, bizonyosak nem balnövelők. Akkor S összes balnövelő elemeinek halmaza*

S-nek részfélcsoportja, és S mindazon elemeinek halmaza, amelyek nem balnövelők, ugyancsak részfélcsoportját alkotják S-nek.

(Analóg módon a jobbnövelőkre.)

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport, a_1, a_2 két bal oldali növelő eleme S-nek. Akkor valamilyen $T_1 \subset S$, $T_2 \subset S$ valódi részhalmazok mellett fennáll, hogy

$$a_1 T_1 = S, \quad a_2 T_2 = S, \quad T_1 \neq S, \quad T_2 \neq S.$$

Mivel

$$(a_1 a_2) T_2 = a_1 S \supset a_1 T_1 = S,$$

azért az $a_1 a_2$ elem ugyancsak bal oldali növelő eleme S-nek. Ebből következik, hogy a bal oldali növelő elemek összessége S-nek részfélcsoportja.

Legyen most x_1 és x_2 két olyan eleme az S félcsoportnak, amelyek nem balnövelő elemek. Ha szorzatuk balnövelő volna, akkor valamilyen $U_1 \subset S$ valódi részhalmaz esetén

$$x_1 x_2 U_1 = S, \quad U_1 \neq S.$$

De $x_2 U_1 = U_2 \neq S$, mivel x_2 nem balnövelő elem. Ekkor azonban az

$$x_1 U_2 = x_1 x_2 U_1 = S, \qquad U_2 \neq S$$

összefüggés ellentmondásban van azzal, hogy az x_1 nem balnövelő elem. Ezzel az 1. 7 tételt bebizonyítottuk.

Jelöljük $S^{(l)}$-lel az S félcsoport összes balnövelő elemeinek halmazát, $S^{(r)}$-rel pedig az összes jobbnövelő elemek halmazát. $S^{(n)}$ jelölje végül az S félcsoport mindazon elemeinek összességét, amelyek sem jobb-, sem balnövelő elemek. Az 1. 2 tétel szerint $S^{(l)}$ és $S^{(r)}$ közös része üres. Ennélfogva $S^{(r)} \cup S^{(n)}$ azoknak az elemeknek az összessége, amelyek nem balnövelő elemei S-nek, $S^{(l)} \cup S^{(n)}$ pedig azon elemek összessége, amelyek nem jobbnövelő elemek. Az 1. 7 tételre való tekintettel mindkét utóbbi halmaz, ha nem üres, S-nek részfélcsoportja. Innen adódik, hogy közös részük, $S^{(n)}$, ha nem üres, ugyancsak részfélcsoport. Ebből 1. 2 és 1. 7 alapján kapjuk az alábbi eredményt.

1. 8. TÉTEL. *Bármely S félcsoport a következő három páronként idegen részhalmaz egyesítése:*

$$S = S^{(l)} \cup S^{(r)} \cup S^{(n)},$$

amelyek vagy üresek, vagy részfélcsoportok.

Maguk az $S^{(l)}$, $S^{(r)}$, $S^{(n)}$ félcsoportok növelő elemek tekintetében a következő tulajdonságokkal rendelkeznek.

1. 9. LEMMA. *Az $S^{(r)}$ félcsoportnak nincsen balnövelő eleme.*

Bizonyítás. Ha feltesszük, hogy az $x \in S^{(r)}$ elem bal oldali növelő eleme az $S^{(r)}$ félcsoportnak, akkor $S^{(r)}$-nek kell legyen olyan s eleme, amelyre $xs = x$ fennáll. Abból, hogy $s \in S^{(r)}$, következik, hogy valamilyen $T \subset S$ valódi részhalmaz mellett

$$Ts = S, \quad T \neq S.$$

Tekintsük S-nek tetszőleges a elemét. Mivel $x \in S^{(r)}$, azért valamilyen $y \in S$ elemre $yx = a$. Innen következik, hogy

$$as = yxs = yx = a.$$

Így azt kaptuk, hogy s jobb oldali egységeleme az S félcsoportnak. De akkor $Ts = T$, ami ellentmondásban van azzal, hogy T-re $Ts = S$ fennáll.

Ugyanígy bizonyítható az alábbi lemma is.

1.10. LEMMA. *Az $S^{(l)}$ félcsoportnak nincsen jobbnövelő eleme.*

1.11. LEMMA. *Ha S egységelemes félcsoport, akkor $S^{(n)}$ nem üres és olyan félcsoport, amelynek sem jobb-, sem balnövelő eleme nincsen.*

Bizonyítás. $S^{(n)}$ csakugyan nem lehet üres egységelemes félcsoport esetében, mivel az egységelem sem bal-, sem jobbnövelő eleme nem lehet a félcsoportnak.

Föltesszük, hogy az $x \in S^{(n)}$ elem jobbnövelő eleme az $S^{(n)}$ félcsoportnak. Akkor van olyan $U \subset S^{(n)}$ részhalmaz, amelyre

$$Ux = S^{(n)}, \quad U \neq S^{(n)}.$$

Speciálisan U-nak kell legyen olyan y eleme, hogy $yx = e$, ahol e az S félcsoport egységeleme. Innen következik, hogy

$$(Sy)x = Se = S.$$

De x nem jobbnövelő eleme S-nek. Ezért fenn kell állni, hogy $Sy = S$. Ebből az egyenlőségből következik, hogy valamilyen $z \in S$ elemre $zy = e$, amiből adódik, hogy

$$x = ex = zyx = ze = z.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$U = Ue = Uzy = Uxy = S^{(n)}y \supset S^{(n)}zy = S^{(n)},$$

ami ellentmond annak, hogy U valódi részhalmaza $S^{(n)}$-nek.

2. Egységelemes félcsoportok növelő elemei

Ebben a pontban egy növelő elemekkel rendelkező félcsoportot konstruálunk, ami nemcsak azt mutatja, hogy bizonyos félcsoportokban léteznek növelő elemek, hanem karakterizáló szerepet is játszik az egységelemes félcsoportok növelő elemei általános tulajdonságainak tanulmányozásában.

Jelöljük $h(x)$-szel a következő valós függvényt:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geqq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

P legyen a nemnegatív egész számokból képezhető összes lehetséges $[a, b]$ alakú rendezett számpárok összessége ($a, b = 0, 1, 2, \ldots$). P-ben a következő szorzási szabályt értelmezzük:

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = \left[a_1 + h(a_2 - b_1),\ b_2 + h(b_1 - a_2)\right].$$

Ellenőrizzük, hogy ez a művelet asszociatív:

$$([a_1, b_1]\cdot[a_2, b_2])\cdot[a_3, b_3] = [a_1+h(a_2-b_1),\ b_2+h(b_1-a_2)]\cdot[a_3, b_3] =$$
$$= [a_1+h(a_2-b_1)+h\{a_3-b_2-h(b_1-a_2)\},\ b_3+h\{b_2+h(b_1-a_2)-a_3\}].$$

Másrészt:

$$[a_1, b_1]\cdot([a_2, b_2]\cdot[a_3, b_3]) = [a_1, b_1]\cdot[a_2+h(a_3-b_2),\ b_3+h(b_2-a_3)] =$$
$$= [a_1+h\{a_2+h(a_3-b_2)-b_1\},\ b_3+h(b_2-a_3)+h\{b_1-a_2-h(a_3-b_2)\}].$$

Az ellenőrzést kényelmesebb úgy végezni, hogy átvizsgáljuk egymás után a következő négy esetet: 1. $a_2 \geqq b_1$, $a_3 \geqq b_2$; 2. $a_2 \geqq b_1$, $a_3 < b_2$; 3. $a_2 < b_1$, $a_3 \geqq b_2$; 4. $a_2 < b_1$, $a_3 < b_2$.

Ha még figyelembe vesszük, hogy $h\{h(x)\} = h(x)$ és $h(x_1+x_2) = h(x_1)+h(x_2)$ pozitív x_1 és x_2 esetén, akkor a fenti két kifejezés egyenlősége nyilvánvaló.

A P félcsoportban bevezetjük a következő jelöléseket:

$$[0, 0] = u^0 = v^0 = e, \quad [1, 0] = u, \quad [0, 1] = v.$$

Amint a P-beli szorzási szabályból azonnal látható, az e elem a félcsoportnak egységeleme. Továbbá tetszőleges P-beli $[a, b]$ elemre fennáll, hogy

$$[a, b] = [a, 0]\cdot[0, b] = u^a v^b.$$

Ilyen módon az u, v elempár generátorrendszere a P félcsoportnak és P-nek mindegyik eleme megadható $u^a v^b$ alakban, mégpedig nyilvánvalóan egyértelmű módon (ha $a=0$, akkor egyszerűen v^b írható, analóg módon $b=0$ esetében u^a írható). Így a P félcsoport elemeinek $u^a v^b$ alakban való megadása az illető elem $\{u, v\}$ generátorrendszerre vonatkozó kanonikus alakjának tekinthető.

Minthogy

$$vu = [0, 1]\cdot[1, 0] = [0+h(1-1),\ 0+h(1-1)] = [0, 0] = e,$$

azért az említett kanonikus alakban megadott elemek szorzása igen egyszerűen történik:

$$u^{a_1}v^{b_1}\cdot u^{a_2}v^{b_2} = \begin{cases} u^{a_1+a_2-b_1}v^{b_2}, & \text{ha } a_2 \geqq b_1, \\ u^{a_1}v^{b_2+b_1-a_2}, & \text{ha } b_1 \geqq a_2. \end{cases}$$

A mondottakból következik, hogy a P félcsoportot úgy is lehet definiálni, mint az összes lehetséges

$$u^a v^b \qquad (a, b = 0, 1, 2, \ldots)$$

kifejezések halmazát az előbbi szorzási szabállyal.[1]

Megvizsgáljuk, milyen automorfizmusai vannak a P félcsoportnak, ugyanis a P félcsoport további felhasználásánál hasznos lesz számunkra automorfizmusainak ismerete. Ebből a célból először egy kisegítő lemmát bizonyítunk be.

2.1. Lemma. *A P félcsoportnak bármely u-tól és v-től különböző x eleméhez található olyan x', az egységelemtől különböző elem, amely nem x hatvány és felcserélhető x-szel.*

[1] Erre a félcsoportra Clifford és Preston [6] a *biciklikus félcsoport* elnevezést használják.

Az $x=u$ vagy az $x=v$ esetben ilyen tulajdonságokkal rendelkező x' elem nem létezik.

Bizonyítás. Ha $x=u^a v^b$, ahol $a>0$, $b>0$, $a+b>2$, akkor x'-nek vehetjük az egységelemtől különböző $x'=uv$ elemet. Csakugyan,

$$xx' = u^a v^b \cdot uv = u^a v^b,$$

$$x'x = uv \cdot u^a v^b = u^a v^b.$$

Ezenkívül feltéve, hogy $x'=x^n$, kapjuk, hogy

$$uv = u^a v^b u^a v^b \ldots u^a v^b.$$

De a P félcsoportnak bármelyik elemét u^a-val jobbról szorozva, mindig olyan $u^c v^d$ alakú elemet nyerünk, amelynél $c \geqq a$. Hasonlóan áll a dolog v^b-vel. Ezért az előbbi egyenlőség csak $a=1$, $b=1$ esetén állhat fenn, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $a+b>2$.

Ha most $x=uv$, akkor x'-nek vehetjük az $x'=u^2v^2 \neq e$ elemet. Könnyű belátni, hogy

$$u^2 v^2 \cdot uv = uv \cdot u^2 v^2.$$

Mivel $(uv)^2=uv$, azért u^2v^2 nem hatványa az uv elemnek.

Ha $x=u^a$ $(a>1)$, akkor x'-nek vehetjük az $x'=u \neq e$ elemet. Valóban,

$$uu^a = u^a u.$$

u nem hatványa u^a-nak, mivel $(u^a)^n=u^{an}$ nem egyenlő u-val.

Ha $x=v^b$ $(b>1)$, akkor $x'=v$ a megfelelő elem.

Most kikötjük, hogy valamely $u'=u^a v^b \neq e$ elem rendelkezik a megkívánt tulajdonságokkal az u elemre nézve. Minthogy u' nem lehet u hatvány, azért $b \neq 0$. De akkor

$$uu' = u \cdot u^a v^b = u^{a+1} v^b,$$

$$u'u = u^a v^b \cdot u = u^a v^{b-1},$$

és így u' nem cserélhető fel u-val.

Hasonló módon lehet igazolni, hogy a v elemhez sem létezik a tekintett tulajdonságokkal rendelkező v' elem.

A 2.1 lemma segítségével bebizonyítjuk az alábbi eredményt.

2. 2. Lemma. *A P félcsoportnak nincsen más automorfizmusa, mint az identikus automorfizmus.*

Bizonyítás. Feltesszük, hogy φ valamely, az identikus automorfizmustól különböző automorfizmusa a P félcsoportnak. Ha az x elemhez létezik olyan az egységelemtől különböző x' elem, amely x-szel felcserélhető és nem x hatvány, akkor nyilvánvaló, hogy $\varphi(x')$ ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik $\varphi(x)$-szel kapcsolatban. Ennélfogva a 2. 1 lemmából következik, hogy egyik u-tól és v-től különböző elem sem mehet át a φ automorfizmus révén u-ba vagy v-be. Ilyen módon csak két eset lehetséges: vagy

$$\varphi(u)=u, \quad \varphi(v)=v,$$

vagy pedig

$$\varphi(u)=v, \quad \varphi(v)=u.$$

Az első esetben bármely elemre fennáll, hogy

$$\varphi(u^a v^b) = [\varphi(u)]^a \cdot [\varphi(v)]^b = u^a v^b,$$

ami ellentétben van azzal, hogy φ a feltevés szerint nem az identikus automorfizmus. De a második esetben is ellentmondáshoz jutunk:

$$\varphi(u^2 v) = [\varphi(u)]^2 \cdot \varphi(v) = v^2 u = v = \varphi(u), \qquad u^2 v \neq u.$$

Legyen most Q valamely P-vel izomorf félcsoport. Ebben az esetben csak egyetlen izomorfizmusa van P-nek Q-ra. Csakugyan, ha φ és ψ is P-nek Q-ra való izomorf leképezése volna, akkor a $\varphi^{-1}\psi$ leképezés P-nek automorfizmusa volna. A 2. 2 lemma értelmében $\varphi^{-1}\psi$ az identikus automorfizmus, amiből már következik, hogy a φ, ψ leképezések azonosak.

Legyen φ a P-nek Q-ra való izomorf leképezése. Az ilyen izomorf leképezés egyértelműségére és arra való tekintettel, hogy az u, v elemek a P megadásától függetlenül, saját tulajdonságaik által teljesen meghatározottak, azért a $Q=\varphi(P)$ félcsoportban a $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ elemek a Q félcsoport megadásától függetlenül egyértelműen meghatározottak. A P félcsoportnak erre a tulajdonságára a 2. 3 tétel vizsgálatánál és alkalmazásánál lesz szükségünk.

Tekintsük most a P félcsoport növelő elemeit. Megmutatjuk, hogy a P félcsoportban mindegyik u^a $(a>0)$ alakú elem jobbnövelő. Csakugyan,

$$(Pv^a)u^a = Pv^a u^a = Pe = P.$$

Ezenkívül a Pv^a halmaz nyilvánvalóan P összes $u^c v^{d+a}$ alakú $(d \geqq 0)$ elemeiből áll, tehát P-től különböző, mivel nem tartalmazza például az u elemet.

Hasonló módon lehet belátni, hogy a v^b $(b>0)$ alakú elemek bal oldali növelő elemek, mivel

$$v^b(u^a P)=P, \quad P \neq a^a P \not\ni v.$$

Ami a P félcsoport többi elemét illeti, azok egyike sem növelő elem. Az e egységelemre ez az állítás nyilvánvaló. Az $u^a v^b$ $(a>0,\ b>0)$ elem esetében

$$u^a v^b P \not\ni v, \quad P u^a v^b \not\ni u.$$

Innen következik, hogy P-nek egyik valódi részhalmazára sem teljesülhet a növelő elemeket jellemző 1.1 egyenlőség.

Most rávilágítunk arra a különleges szerepre, amit a P félcsoport játszik a növelő elemek elméletében. Látni fogjuk, hogy egységelemes félcsoportnak a növelő elemei a P-vel izomorf részfélcsoportjaiban vannak, amelyek tartalmazzák a félcsoport egységelemét, s a növelő elemek a P-vel való izomorfizmusnál u-nak és v-nek felelnek meg. S csak a növelő elemek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

2. 3. TÉTEL. *Legyen S egységelemes félcsoport. Ahhoz, hogy az S félcsoport x eleme jobbnövelő legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzék a P félcsoportnak S-be való olyan φ izomorfizmusa, amelyre $\varphi(e_P)=e_S$ és $\varphi(u)=x$.*

Ahhoz, hogy az S félcsoport x eleme balnövelő legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzék a P félcsoportnak S-be való olyan φ izomorf leképezése, amelyre $\varphi(e_P)=e_S$ és $\varphi(v)=x$.

Bizonyítás. 1. Legyen x az S félcsoportnak jobb oldali növelő eleme. Akkor valamilyen $T \subset S$ részhalmazra

$$Tx = S, \qquad T \neq S.$$

Innen következik, hogy T-ben található olyan y elem, amelyre

$$yx = e_S.$$

Tekintsük most az x, y elemek által generált Q részfélcsoportot S-ben. Abból, hogy yx az S félcsoportnak egységeleme, következik, hogy Q valamennyi eleme előállítható $x^a y^b$ alakban (itt x^0 és y^0 megegyezik e_S-sel). Megvizsgáljuk, lehet-e ugyanazt az elemet kétféleképpen előállítani $x^a y^b$ alakban. Legyen

$$x^{a_1} y^{b_1} = x^{a_2} y^{b_2},$$

ahol $a_1 \geqq a_2$. Balról y^{a_2}-vel szorozva ezt az egyenlőséget, adódik, hogy

$$x^{a_1 - a_2} y^{b_1} = y^{b_2}.$$

Ha $a_1 = a_2$ és $b_1 \neq b_2$, akkor jobbról x^c-vel szorozva, ahol c a b_1 és b_2 közül a nagyobbikat jelöli, azt nyernénk, hogy az x jobbnövelő elem valamely hatványa egyenlő e_S-sel, ami nem növelő elem. Ez azonban az 1. 7 tétel miatt lehetetlen.

Legyen most $a_1 > a_2$. Akkor a fenti egyenlőségből adódik, hogy

$$xS \supset x \cdot x^{a_1 - a_2 - 1} y^{b_1} S = y^{b_2} S \supset y^{b_2} x^{b_2} S = S,$$

és így valamilyen $z \in S$ esetén

$$xz = e_S.$$

De akkor a $Tx = S$ egyenlőséget jobbról z-vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$T = Sz,$$

ahonnan

$$T = Sz \supset Sxz = S,$$

ami ellentétben van T megválasztásával.

Ezzel megmutattuk, hogy a Q félcsoport az összes $x^a y^b$ alakú szorzatok halmaza, amelyek mind különbözők. Mivel $yx = e_S = e_Q$, azért ezeknek az elemeknek a szorzása ugyanazon szabály szerint végezhető, mint a kanonikus alakban adott P-beli elemeké. Ily módon a P félcsoportnak

$$\varphi(u^a v^b) = x^a y^b$$

által meghatározott Q-ra való leképezése P-nek S-be való izomorfizmusa. Továbbá az is érvényes, hogy

$$\varphi(u) = x, \quad \varphi(e_P) = e_S.$$

2. Legyen most x a félcsoport balnövelő eleme. Az előbbiekhez teljesen hasonló módon lehet igazolni, hogy S-nek van olyan, az S félcsoport egységelemét tartalmazó, P-vel izomorf Q' részfélcsoportja, hogy a P-nek Q'-re való φ izomorf leképzésére $\varphi(v) = x$ és $\varphi(e_P) = e_S$.

3. Legyen φ a P-nek S-be való olyan izomorf leképezése, amelyre fennáll, hogy $\varphi(e_P) = e_S$. Akkor

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v) = \varphi(uv) \neq \varphi(e_P) = e_S$$

és

$$\varphi(v)\cdot\varphi(u) = \varphi(vu) = \varphi(e_P) = e_S.$$

A $\varphi(u) \in S$ elemnek nincsen e_S-re vonatkozólag jobbinverze S-ben. Valóban, ellenkező esetben kétoldali inverze is létezne, mivel $\varphi(v)$ balinverze $\varphi(u)$-nak, s ez lenne a kétoldali inverz is. Ez azonban nincs így, mert a $\varphi(u)\cdot\varphi(v)$ szorzat, mint láttuk, nem egyenlő e_S-sel. Hasonló módon lehet belátni, hogy $\varphi(v)$-nek nincsen balinverze e_S-re nézve. Innen következik, hogy

$$[S\cdot\varphi(v)]\cdot\varphi(u) = S\cdot e_S = S,$$

$$\varphi(v)\cdot[\varphi(u)\cdot S] = e_S\cdot S = S,$$

továbbá

$$e_S \notin S\cdot\varphi(v), \quad e_S \notin \varphi(u)\cdot S,$$

vagyis

$$S\cdot\varphi(v) \neq S, \quad \varphi(u)\cdot S \neq S.$$

Ez bizonyítja, hogy $\varphi(v)$ az S félcsoportban balnövelő, $\varphi(u)$ pedig jobbnövelő elem.

2. 4. KOROLLÁRIUM. *Egységelemes félcsoportban mindegyik növelő elem végtelen monogén félcsoportot*[2] *generál.*

2. 5. KOROLLÁRIUM. *Egységelemes félcsoportban bármelyik növelő elem Neumann-reguláris.*

Valóban, legyen x jobbnövelő eleme az S egységelemes félcsoportnak. Tekintsük P-nek S-be való φ izomorfizmusa által az x-hez rendelt elemet. Akkor

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v)\cdot\varphi(u) = \varphi(uvu) = \varphi(u),$$

amiből következik, hogy az $x = \varphi(u)$ elem Neumann-reguláris.

A bizonyítás analóg a balnövelő elemekre.

2. 6. KOROLLÁRIUM. *Ahhoz, hogy az S egységelemes félcsoportban létezzenek növelő elemek, szükséges és elégséges, hogy S-nek legyen P-vel izomorf és e_S-et tartalmazó részfélcsoportja.*

2. 7. KOROLLÁRIUM. *Ha az S egységelemes félcsoportban vannak jobbnövelő elemek, akkor balnövelők is vannak, és viszont.*

Csakugyan, az előző korollárium értelmében az S félcsoportnak van P-vel izomorf és az egységelemet tartalmazó Q részfélcsoportja. De akkor a 2. 3 tétel szerint S-nek kell legyenek bal- és jobbnövelő elemei is.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi tulajdonság egységelemet nem tartalmazó félcsoportra általában nem teljesül. Tekintsük az alábbi példát.

Legyen U legalább két elemet tartalmazó zérófélcsoport, V tetszőleges félcsoport. Az

$$S = U \cup V$$

[2] *Monogén félcsoportnak* nevezzük az egy elemmel generált félcsoportot (lásd [3]).

halmazban műveletet definiálunk. Ha S két eleme egyszerre U-ban vagy V-ben van, akkor az U-beli, illetve a V-beli művelettel számítjuk a szorzatukat. Ha $x \in U$ és $y \in V$, akkor legyen $xy = 0$, $yx = x$.

Könnyű megmutatni, hogy ez a művelet asszociatív. Legyen

$$z_1 = (a_1 a_2) a_3, \quad z_2 = a_1 (a_2 a_3).$$

Ha a_1 vagy a_2 U-hoz tartozik, akkor $z_1 = 0$ és $z_2 = 0$. Ha $a_1, a_2 \in V$ és $a_3 \in U$, akkor $z_1 = a_3$ és $z_2 = a_3$. Ha pedig $a_1, a_2, a_3 \in V$, akkor $z_1 = z_2$ a V-beli szorzás asszociativitása következtében.

Megvizsgáljuk, milyen növelő elemei vannak az S félcsoportnak. Legyen $x \in U$, $y \in V$, $S' \subset S$, $S' = U' \cup V'$; $U' \subset U$, $V' \subset V$. (Itt U' vagy V' üres is lehet.) Tekintsük az alábbi szorzatokat:

$$xS' = xU' \cup xV' \subset 0 \cup 0 = 0,$$

$$S'x = U'x \cup V'x \subset 0 \cup x,$$

$$yS' = yU' \cup yV' \subset U' \cup yV',$$

$$S'y = U'y \cup V'y \subset 0 \cup V'y.$$

Azonnal nyilvánvaló, hogy U-nak egyik eleme sem lehet S-nek sem jobb-, sem balnövelő eleme. Ami az $y \in V$ elemet illeti, az nem lehet jobbnövelő. Balnövelő lehet az y elem. Ez akkor következik be, ha a harmadik esetben $U' = U$ és $yV' = V$, ahol $V' \neq V$.

Ilyen módon az S félcsoport balnövelő elemei a V félcsoport balnövelő elemei lesznek. Ha V olyan félcsoport, amelynek vannak balnövelő elemei (például $V = P$), akkor az S félcsoportnak lesznek balnövelő elemei, de jobbnövelő elemei nem lesznek.

3. Növelő elemek invertálhatósága

Amint arra E. SZ. LJAPIN rámutatott, a növelő elemek tulajdonságai szorosan összefüggnek a félcsoportban az elemek invertálhatósági tulajdonságaival.

3.1. DEFINÍCIÓ. (Lásd [2].) Az S félcsoport a elemét *jobbról invertálhatónak* mondjuk, ha az $ax = b$ egyenlet tetszőleges elem esetében megoldható az S félcsoportban. Hasonló a balról invertálható elem definíciója. Ha egy félcsoport valamely eleme balról is, jobbról is invertálható, akkor *invertálhatónak* nevezzük. Kommutatív félcsoportban nyilvánvalóan csak egyfajta invertálhatóságról beszélhetünk.

Könnyű megmutatni, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy félcsoportban legyen invertálható elem, az, hogy a félcsoport egységelemes legyen. Továbbá egy félcsoport két oldalról invertálható elemeinek halmaza (ha nem üres) csoportot alkot, amelynek egységeleme a félcsoport egységeleme.

Növelő elemek invertálhatóságával kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételt.

3. 2. TÉTEL. *Egy félcsoportnak bármelyik jobb oldali növelő eleme balról invertálható és nem invertálható jobbról. Hasonló módon bármelyik bal oldali növelő elem jobbról invertálható és nem invertálható balról.*

Bizonyítás. Legyen u jobb oldali növelő eleme az S félcsoportnak. Akkor valamilyen $T \subset S$ valódi részhalmazra fennáll, hogy

$$Tu = S, \quad T \neq S.$$

Ebből következik, hogy $Su = S$, vagyis az u elem balról invertálható. Feltesszük, hogy u ugyanakkor jobbról is invertálható. A fentiek szerint akkor S egységelemes félcsoport, s az u elemnek a félcsoport e egységelemére nézve létezik inverz eleme: u^{-1}. De akkor

$$T = Te = Tuu^{-1} = Su^{-1} = Suu^{-1} = Se = S,$$

ami ellentmond T megválasztásának.

Hasonló módon lehet igazolni a bal oldali növelő elemekre vonatkozó állítást.

Megjegyezzük, hogy a 3. 2 tételnek a megfordítása általában nem érvényes. Ugyanis abban az egynél több elemet tartalmazó S félcsoportban, amelyben $xy = y$ bármelyik x, y elempárra, nyilván mindegyik elem jobbról invertálható, azaz $xS = S$, azonban egyik elem sem balnövelő, mivel $xT = T$ tetszőleges $x \in S$ elem és $T \subset S$ valódi részhalmaz esetében.

A 3. 2 tétel megfordítása is érvényes egységelemes félcsoportokban.

3. 3. TÉTEL. *Egységelemes félcsoportban a jobb oldali növelő elemek és csak ezek a balról invertálható, de jobbról nem invertálható elemek.*

Bizonyítás. Azt az állítást, hogy bármely jobb oldali növelő elem balról invertálható és jobbról nem invertálható, bebizonyítottuk a 3. 2 tételben. Legyen most S egységelemes félcsoport, a olyan eleme S-nek, amely balról invertálható, de jobbról nem invertálható, azaz

$$Sa = S, \quad aS \neq S.$$

Akkor valamelyik $b \in S$ elemre fennáll, hogy

$$ba = e,$$

ahol e az S félcsoport egységelemét jelöli. Ebből következik, hogy

$$b(aS) = S,$$

ami azt jelenti, hogy b az S félcsoportnak balnövelő eleme.

Tekintsük most az S félcsoportnak az a, b elempár által generált Q részfélcsoportját. Ennek a Q félcsoportnak bármelyik

$$q = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}$$

eleme redukálható

$$(\ast) \qquad q = a^{\alpha} b^{\beta}$$

alakúra, ha ba helyett mindenütt beírjuk a félcsoport egységelemét. (Ha a kitevő nulla, akkor legyen $a^0 = b^0 = e$.)

Megmutatjuk, hogy a Q félcsoport elemeinek $(\ast)$ alakban való előállítása egyértelmű. Legyen például

$$a^{\alpha_1} b^{\beta_1} = a^{\alpha_2} b^{\beta_2}.$$

Ha $\alpha_1=\alpha_2$, akkor az egyenlőséget balról megszorozva b^{α_1}-gyel és figyelembe véve, hogy $ba=e$, kapjuk, hogy

$$b^{\beta_1}=b^{\beta_2}.$$

Ha $\beta_1>\beta_2$, akkor beszorozva egyenlőségünket jobbról a^{β_2}-vel, adódik, hogy

$$b^{\beta_1-\beta_2}=e.$$

Az 1.7 tétel értelmében ez lehetetlen, mivel b az S-nek balnövelő eleme, e pedig nem az. Ha $\alpha_1>\alpha_2$, akkor az

$$a^{\alpha_1}b^{\beta_1}=a^{\alpha_2}b^{\beta_2}$$

egyenlőséget balról b^{α_2}-vel szorozva adódik, hogy

$$a^{\alpha_1-\alpha_2}b^{\beta_1}=b^{\beta_2}.$$

De b balnövelő elem. Ennélfogva $bS=S$ és

$$aS\supset a^{\alpha_1-\alpha_2}b^{\beta_1}S=b^{\beta_2}S=S,$$

ami ellentmondásban van azzal, hogy $aS\neq S$.

Így megmutattuk, hogy a Q részfélcsoport nem más, mint az összes $a^\alpha b^\beta$ alakú szorzatok halmaza, s ezek a szorzatok különbözők, ha legalább az egyik kitevőben különböznek egymástól. A $ba=e$ összefüggés értelmében ezek az elemek így szorozhatók:

$$a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\cdot a^{\alpha_2}b^{\beta_2}=\begin{cases} a^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1}b^{\beta_2}, & \text{ha } \alpha_2\geqq\beta_1;\\ a^{\alpha_1}\cdot b^{\beta_1-\alpha_2+\beta_2}, & \text{ha } \alpha_2\leqq\beta_1.\end{cases}$$

Összefoglalva tehát azt nyertük, hogy a Q részfélcsoport izomorf a 2. pontban megismert P biciklikus félcsoporttal. Mivel a $P\cong Q$ izomorfizmusnál az $u\in P$ elemnek megfelel az $a\in Q$ elem, azért a 2. 3 tétel szerint a az S félcsoportnak jobb oldali növelő eleme.

Analóg módon lehet bizonyítani a bal oldali növelő elemekre vonatkozó megfelelő tételt.

3. 4. TÉTEL. *Egységelemes félcsoportban a bal oldali növelő elemek és csak ezek a jobbról invertálható, de balról nem invertálható elemek.*

Bebizonyítjuk még a következő tételt is.

3. 5. TÉTEL. *Egy félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha tartalmaz legalább egy jobbról invertálható elemet, amely nem balnövelő, és legalább egy balról invertálható elemet, amely nem jobbnövelő elem.*

Bizonyítás. A tételben megfogalmazott feltétel szükséges ahhoz, hogy egy félcsoport egységelemes legyen, mivel az egységelem balról is, jobbról is invertálható, s nem növelő elem.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az S félcsoportnak a olyan eleme, amely jobbról invertálható, de nem balnövelő és $b\in S$ olyan elem, amely balról invertálható, de nem jobbnövelő. Akkor az S félcsoportnak van olyan x és y eleme, amelyre

$$ax=a,\quad yb=b.$$

Megmutatjuk, hogy x jobbról, y pedig balról invertálható. Ugyanis abból, hogy a jobbról invertálható és $ax=a$, következik, hogy

$$axS=aS=S.$$

Innen már látható, hogy $xS=S$, mert a nem balnövelő. Tehát x csakugyan jobbról invertálható eleme S-nek. Hasonló módon igazolható, hogy y balról invertálható.

Most megmutatjuk, hogy a az S-nek balreguláris eleme, vagyis a-val balról egyszerűsíteni lehet. Ez abból adódik, hogy az S félcsoport elemeinek as alakban való előállítása egyértelmű, mivel ellenkező esetben az S-nek valamely T valódi részhalmazára $aT=S$ volna, ami ellentétben lenne azzal, hogy a nem balnövelő elem. Hasonló módon lehet belátni, hogy b jobbreguláris elem.

A korábbi $ax=a$, $yb=b$ összefüggésekből következik, hogy

$$axyb=ayb=axb.$$

Itt a-val balról, b-vel jobbról egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$xy=y=x.$$

Ez az elem tehát balról is, jobbról is invertálható eleme az S félcsoportnak, s így az S félcsoport valóban egységelemes.

A 3. 5 tételt LAJOS SÁNDOR és SZÉP JENŐ bizonyította (lásd [5]).

Az egységelemes félcsoportokra vonatkozó fenti eredmények közül néhányat R. DESQ [4], illetve V. JA. SVARC és I. S. JAROKER [8] átvittek csak egyoldali egységelemet tartalmazó félcsoportokra.

4. Félcsoportok leváló csoportrésszel

Amint azt az előző pontban láttuk, egy S félcsoport összes invertálható elemei (ha egyáltalán vannak ilyenek) csoportot alkotnak. Jelöljük ezt a csoportot $G(S)$-sel. A $G(S)$-hez nem tartozó elemekre is bevezetünk egy jelölést:

$$H(S) = S-G(S).$$

Míg $G(S)$ mindig zárt az S félcsoportbeli műveletre nézve, addig $H(S)$-ről ezt általában nem lehet elmondani. Például egy megszámlálható halmaz összes önmagába való leképezéseinek félcsoportjában $H(S)$ nem részfélcsoport. Ugyanakkor egy sor fontos félcsoportban $H(S)$ részfélcsoport. Például egy véges halmaz önmagába való leképezéseinek félcsoportja ilyen tulajdonságú. Ebben az esetben $G(S)$ a véges halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseiből áll, $H(S)$ pedig az összes többi leképezést tartalmazza (mindazokat, amelyek nem permutációk).

Az összes n-edrendű komplex számtest feletti négyzetes mátrixok M_n multiplikatív félcsoportjában $G(M_n)$ az összes nemszinguláris mátrixok halmaza, $H(M_n)$ pedig az összes szinguláris mátrixok halmaza, az utóbbi nyilván részfélcsoportja az M_n félcsoportnak.

Bevezetjük a következő elnevezést. Az S félcsoportról azt mondjuk, hogy *félcsoport leváló csoportrésszel*, ha S egységelemes és bármely két nem invertálható elemének a szorzata sem invertálható (azaz $H(S)$ vagy részfélcsoport, vagy üres).

4.1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy S olyan egységelemes félcsoport, amely nem csoport. Ebben az esetben S akkor és csak akkor leváló csoportrészes félcsoport, ha előállítható olyan két idegen részfélcsoport egyesítéseként:*

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

ahol S_1 részcsoportja, S_2 pedig ideálja S-nek. Ebben az esetben

$$G(S) = S_1, \quad H(S) = S_2,$$

s az S_2 ideál kétoldali ideálja S-nek.

Bizonyítás. 1. Legyen S leváló csoportrészes félcsoport. Akkor $S = G(S) \cup \cup H(S)$, ahol $G(S)$ csoport. Legyen $h \in H(S)$, $a \in S$. Ha $a \in H(S)$, akkor a leváló csoportrészes félcsoport definíciója értelmében $ha \in H(S)$ és $ah \in H(S)$. Ha $a \in G(S)$, akkor sem ah sem ha nem tartozhat $G(S)$-hez. Csakugyan, a $ha = g \in G(S)$ esetben következne, hogy $h = ga^{-1} \in G(S)$. Hasonló a meggondolás az ah szorzatra. Ily módon tetszőleges $a \in S$ elem esetén $ha \in H(S)$ és $ah \in H(S)$, vagyis $H(S)$ kétoldali ideálja S-nek.

2. Tegyük fel, hogy az S félcsoport előállítható a tételben megadott módon:

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cup S_2 = \emptyset.$$

Mivel S_2 ideálja S-nek, azért az S félcsoport e egységeleme S_1-hez kell tartozzék. Minthogy S_1 csoport, azért tetszőleges $a_1 \in S_1$ elemhez találhatók olyan x, y elemek, amelyekre

$$xa_1 = e, \quad a_1 y = e.$$

Innen következik, hogy a_1 invertálható eleme az S félcsoportnak. De másfelől S_2 elemei nem lehetnek invertálható elemei S-nek, mivel S_2 ideál. Ennélfogva $G(S) = S_1$, amiből következik, hogy $H(S) = S_2$, azaz S leváló csoportrészes félcsoport. Az 1. részben bizonyítottak szerint S_2 kétoldali ideálja S-nek.

Ezzel a 4.1 tételt bebizonyítottuk.

4.2. KOROLLÁRIUM. *Az S leváló csoportrészes félcsoportban H(S) vagy kétoldali ideál, vagy az üres halmaz.*

A következő tétel mutatja a növelő elemek helyzetét a leváló csoportrészes félcsoportokban.

4.3. TÉTEL. *Legyen S egységelemes félcsoport. Ha S leváló csoportrészes félcsoport, akkor S-nek sem jobb oldali, sem bal oldali növelő elemei nincsenek.*

Ha S nem leváló csoportrészes félcsoport, akkor S tartalmaz jobb oldali és bal oldali növelő elemeket.

Bizonyítás. A 3.3 és a 3.4 tétel szerint egységelemes félcsopoıtban minden növelő elem invertálható az egyik oldalról, de nem invertálható a másik oldalról. Megmutatjuk, hogy leváló csoportrészes félcsoport ilyen tulajdonságú elemet nem tartalmazhat. Legyen $h \in H(S)$. Mivel $H(S)$ a 4.2 korollárium szerint kétoldali ideál, azért h sem jobbról, sem balról invertálható nem lehet. Ugyanis tetszőleges $a \in S$ elem esetén ah és $ha \in H(S)$, tehát biztosan az egységelemtől különbözők. Ha pedig $g \in G(S)$, akkor g mindkét oldalról invertálható eleme S-nek. Így az S leváló csoportrészes félcsoportnak valóban nincsen növelő eleme.

Ha pedig S nem leváló csoportrészes félcsoport, akkor S-ben találhatók olyan x, y elemek, amelyekre $x, y \in H(S)$ és $xy = g \in G(S)$. Innen következik, hogy

$$xS \supset xyS = gS = S,$$

mivel g invertálható eleme S-nek. Ez azt jelenti, hogy x jobbról invertálható. Ugyanakkor azonban x balról nem invertálható, mivel akkor $G(S)$-hez tartozna. Hasonló módon lehet megmutatni, hogy y balról invertálható, de jobbról nem invertálható. Így a 3. 3, illetve a 3. 4 tétel értelmében x balnövelő, y pedig jobbnövelő eleme az S félcsoportnak.

Ezzel a 4. 3 tételt bebizonyítottuk. A 2. 3 tétel alapján a 4. 3 tételből azonnal adódik a következő eredmény.

4. 4. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az S egységelemes félcsoport leváló csoportrészes félcsoport legyen, szükséges és elégséges, hogy az egységelemet tartalmazó részfélcsoportjai között ne legyen a biciklikus félcsoporttal izomorf félcsoport.*

Végül megemlítjük, hogy bármely egységelemes véges félcsoport leváló csoportrészes félcsoport. Továbbá bármely kommutatív egységelemes félcsoport és bármely reguláris félcsoport ugyancsak leváló csoportrészes félcsoport.

Bizonyos növelő elemek segítségével megfogalmazott ideálelméleti tételeket bizonyított N. N. VOROBJOV [7] dolgozatában.

IRODALOMJEGYZÉK

1] Ляпин, Е. С.: Увеличительные элементы ассоциативных систем, *Учен. зап. Ленинград. гос. пед. инст.*, **89** (1953), 55—65.

[2] Ляпин, Е. С.: Обратимость элементов в полугруппах, *Учен. зап. Ленинград. гос. пед. инст.*, **166** (1958), 65—74.

[3] Ляпин, Е. С.: *Полугруппы*, Москва, 1960.

[4] DESQ, R.: Sur les demi-groupes ayant des éléments unités d'un côté, *C. R. Acad. Sci.*, **256** (1963), 567—569.

[5] LAJOS S. és SZÉP J.: Az egységelemes félcsoportok néhány jellemzése, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.*, **15** (1965), 29—32.

[6] CLIFFORD, A. H. and G. B. PRESTON: *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. I., Providence, 1961.

[7] Воробьев, Н. Н.: К теории идеалов ассоциативных систем, *Учен. зап. Ленинград. гос. пед. инст.*, **103** (1955), 31—73.

[8] Шварц, В. Я. и И. Ш. Ярокер: Увеличительные элементы полугрупп с односторонней единицей, *Успехи матем. наук*, **19** (1964), 209—214.

(Beérkezett: 1965. IV. 12.)

TÖMEGKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁKRÓL, I.

Írta: TOMKÓ JÓZSEF

Bevezetés

A tömegkiszolgálással foglalkozó elméleti munkák többségében főként olyan szkémák diszkussziója felé irányul a figyelem, amelyek kiszolgáló készülékei sohasem veszthetik el munkavégző-képességüket. A különböző problémafelvetések, amelyeknél a matematikai modellek feltételeinek a reális körülményekhez való közelítési foka más és más, egy közös vonásban, a kiszolgáló készülékek abszolút üzembiztonságának feltételezésében megegyeznek. Magától értetődik, hogy ezen utóbbi megszorítás elengedése is szükséges ahhoz, hogy sok, a gyakorlatban felmerülő problémát érdemlegesen vizsgálhassunk. Általában a kiszolgáló rendszerek effektivitását nagymértékben befolyásolják a kiszolgáló készülékek meghibásodásai s ezzel a hatással az esetek túlnyomó többségében számolnunk kell. Valamely telefonközpont csatornái, avagy más kiszolgáló berendezések, készülékek, emberek, általában nem képesek tetszőleges hosszúságú ideig funkciójukat hibátlanul teljesíteni. Időszakonként a kiszolgáló készülékek felújításra szorulnak, emiatt a kiszolgálási folyamat intenzitása csökken vagy teljesen megszűnik, s ez maga után vonja a rendszer effektivitásának a megváltozását.

A probléma tanulmányozása először az elvesztéses rendszerekkel kapcsolatos *Erlang*-formulák vizsgálatával indult meg. Általában feltételezték, hogy a készülékek csak munkaperiódusok, avagy csak szabad periódusok alatt romolhatnak el. Az esetben, amikor mind a szabad, mind a munkaperiódusok alatt bekövetkezhetnek a készülékek meghibásodásai, csak további, eléggé irreális feltevések mellett értek el eredményeket. Ilyen feltevés például az, hogy mind a szabad, mind a munkaperiódusok kezdő pillanataiban a készülékek megfeledkeznek múltukról. Ez azt eredményezi, hogy a soronkövetkező periódus alatti meghibásodás nem függ az előző periódus hosszától.

A jelen és a következő néhány dolgozatban különböző, meghibásodásoknak alávetett készülékkel rendelkező egycsatornás kiszolgáló rendszerekkel kapcsolatos problémákat fogunk vizsgálni. Ahol csak lehet, az előbb említett irreális feltevéstől el fogunk tekinteni. Emellett megengedjük majd azt, hogy a munkaperiódusokban nagyobb legyen a készülék kihasználódási intenzitása, mint a szabad periódusokban. Az utóbbi szituációt most pontosabban körülírjuk. E célból bevezetjük a készülék *üzembiztonsági tartalék*ának (rövidítve: ü. b. tart.) fogalmát, mely alapvető szerepet fog játszani a továbbiakban is. A készülék ü. b. tartalékán értjük azt az általában véletlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő ún. üzemanyagot (benzin, elektromos energia stb.), melynek esetleges kellő mértékű hiánya a készülék meghibásodását, munkavégző-képességének elvesztését idézi elő. Feltételezzük, hogy a készülék ü. b. tartaléka mind a szabad, mind a munkaperiódusok folyamán csökken. A csökkenést az idővel arányosnak tételezzük fel, éspedig, a szabad periódusok alatt $c=1$, míg a munkaperiódusok alatt $c>1$ arányossági tényezővel. Ennek értelmében az ü. b. tartalék mértékszáma megegyezik azon időhosszal, amelynek folyamán a készülék hibátlan állapotban marad, hacsak munkavégzésre nem kényszerül. Mindvégig feltételezni fogjuk, hogy miután a készülék elvesztette ü. b. tartalékát, azaz meghibásodott, nyomban elkezdődik a javítása, felújítása, mely véletlen ideig tart.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

$\omega(t)$ jelöli a készülék t pillanatbeli ü. b. tartalékát. Ha a t pillanatban a készülék javítás alatt van, akkor definíciószerűleg $\omega(t)=0$. Legyenek $\bar{r}_i$, r_i az i-dik javítás kezdő, ill. végződési pillanatai. ($i=0$ esetén $\bar{r}_0=0$, $r_0>0$ meghatározottak, ha a $t=0$ pillanatban a készüléket éppen javítják.) Legyenek továbbá $\delta_i = r_i-\bar{r}_i$ $(i\geqq 0)$, $\eta_i = \omega(r_i+0)$ $(i\geqq 1)$, $\eta_0 = \omega(r_0+0)$, ha r_0 értelmezett, míg más esetben $\eta_0=\omega(0)$. Feltételezzük, hogy a δ_i-k, η_i-k összességükben egymástól független valószínűségi változók s $i\geqq 1$ mellett $P(\delta_i\leqq x)=G(x)$, $P(\eta_i\leqq x)=H(x)$.

A jelen dolgozat 1. §-ában egy egycsatornás veszteséges rendszerrel kapcsolatos problémát vizsgálunk. Felvetjük ugyanezt a problémát n készülék esetére is, majd röviden vázoljuk a feladat megoldását azon egyszerű esetben, amikor az előforduló összes valószínűségi változók mind exponenciális eloszlásúak. A 2. §-ban módosítjuk a vesztési elvet. Feltételezzük, hogy a készülék hibátlan periódusaiban beérkező igények a „rendszerben maradnak”, ha szükséges sorban állnak. Ha viszont bekövetkezett a készülék meghibásodása, akkor a rendszerben tartózkodó, továbbá a javítási idő alatt érkező összes igény mind elvész, azaz kiszolgálás nélkül távozik.

1. §

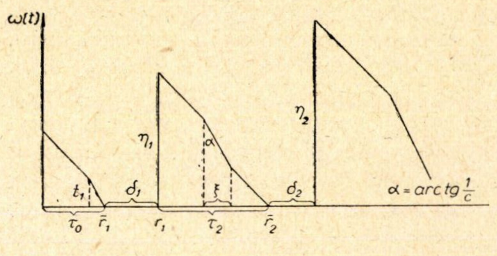
Elvesztéses rendszer

1. A PROBLÉMA KITŰZÉSE. Tekintsünk egy egycsatornás kiszolgáló rendszert. A készülék meghibásodásait a bevezetésben körülírt feltételek írják le, s tételezzük fel még a következőket:

a rendszerbe érkező igény λ-paraméterű homogén *Poisson*-folyamat,

a kiszolgálási idők egymástól, az érkezési folyamattól, az η_i-ktől és a δ_i-ktől is független, azonos $P(\xi_i\leqq x)=F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók,

a rendszer elvesztéses, azaz, ha olyan pillanatban lép fel egy igény, amikor a készülék foglalt avagy javítás alatt van, akkor ez az igény megszűnik; hasonlóan megszűnik, elvész az az igény is, amelynek kiszolgálása elkezdődött ugyan, de megszakadt a készülék meghibásodása következtében.



1. ábra

Tekintsük most a bevezetésben szereplő $\{\omega(t),\ t\geqq 0\}$ folyamatot. Az alábbi ábra egy lehetséges trajektóriáját tükrözi ennek a folyamatnak. Innen leolvashatjuk, hogy a kezdő $t=0$ pillanattól a t_1 pillanatig a készülék szabad volt s ü. b. tartaléka az idővel arányosan t_1 mennyiséggel csökkent. A t_1 pillanatban érkezett egy igény, elkezdődött a kiszolgálása, s eközben a készülék ü. b. tartaléka intenzívebben kezdett csökkenni. Az $\bar{r}_1$ pillanatban a készülék meghibásodott s elkezdődött a javítása, mely δ_1 idő múlva az r_1 pillanatban fejeződött be. A folyamat további menete világos az ábrából. A $\tau_i = \bar{r}_{i+1} - r_i$ $(i \geqq 0)$ mennyiségek azon időperiódusok hosszai, amelyek folyamán a készülék hibátlan. $c > 1$ következtében általában $\tau_i \leqq \eta_i$. Feltevéseink értelmében a τ_i-k egymástól függetlenek, esetleg a τ_0-tól eltekintve azonos eloszlásúak. Ezen közös eloszlásfüggvény meghatározására egyelőre nem lesz szükségünk, majd egy későbbi dolgozatban fogunk ezzel foglalkozni.

Legyen

$\pi_1(t)$ — annak a valószínűsége, hogy a t pillanatban a készülék kiszolgálással foglalt,

$\pi_2(t)$ — annak a valószínűsége, hogy a készülék a t pillanatban javítás alatt van,

$\pi_3(t)$ — annak a valószínűsége, hogy a t pillanatban a készülék hibátlan és szabad.

E §-ban megvizsgáljuk, hogy az eddigieken kívül milyen további feltételek mellett léteznek a

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

határvalószínűségek és hogy hogyan határozhatók meg.

2. A RENDSZERT LEÍRÓ MARKOV-FOLYAMAT ÉS A π_i VALÓSZÍNŰSÉGEK MEGHATÁROZÁSA. Tekintsük a következő

$$\gamma_1(t) = \{e(t),\ v(t)\}$$

valószínűségi folyamatot. $e(t) = 1$, ha a készülék hibátlan és kiszolgálással foglalt, $e(t) = 2$, ha javítás alatt van, végül $e(t) = 3$, ha a készülék hibátlan és szabad. A második koordináta, $v(t)$ értelme az $e(t)$ különböző értékei mellett más és más. $e(t) = 1$ esetben $v(t)$ egy kétdimenziós vektor $\{\xi(t),\ \eta(t)\}$, hol $\xi(t)$ jelenti a készülék által a t pillanatban kiszolgálás alatt levő igény kielégítésére a t pillanatig ráfordított időt, $\eta(t)$ pedig az ü. b. tartalék csökkenése a t pillanat és az öt megelőző javítás befejeződési pillanata között, azaz $\eta(t) = \eta_i - \omega(t)$, hacsak $r_i \leqq t < \bar{r}_{i+1}$. $e(t) = 2$ esetben $v(t)$ a soron levő javításnak a t pillanatig eltelt ideje. Végül $e(t) = 3$ esetben $v(t)$ egyenlő az előbb meghatározott $\eta(t)$-vel. A feltételezéseink értelmében $\gamma_1(t)$ időben homogén *Markov*-folyamat lesz. A folyamatnak a fázisterében való elhelyezkedésével kapcsolatos, tetszőleges t pillanatbeli eloszlását egyértelműen jellemzik az alábbi függvények:

$$P_1(x, y;\ t) = P\{e(t) = 1,\ v(t) = [\xi(t), \eta(t)] \in B_{x,y}\},$$

ahol $$B_{x,y} = \{(\xi, \eta);\ \eta \geqq c\xi,\ 0 \leqq \xi < x,\ 0 \leqq \eta < y\},$$

$$P_2(u;\ t) = P\{e(t) = 2,\ 0 \leqq v(t) < u\}, \tag{2}$$

$$P_3(y;\ t) = P\{e(t) = 3,\ 0 \leqq \eta(t) < y\}.$$

A 4. pontban bebizonyítjuk, hogy hacsak a $H(x)$ és $G(x)$ ($c > 1$ esetben a $H(x)$, $G(x)$ és $F(x)$) eloszlásfüggvények közül legalább egy nem rácsos eloszlás[1] és

[1] Egy eloszlást rácsosnak nevezünk, ha létezik olyan $h > 0$ szám, hogy az eloszlásfüggvény minden növekedési helye nh alakú, hol n egész szám.

$M(\eta_i+\delta_i)<\infty$, akkor a $\gamma_1(t)$ folyamat ergodikus. Ennek értelmében tetszőleges kezdő eloszlás mellett, amelyet például valamely $\{P_1(x,y;\ 0);\ P_2(u;\ 0);\ P_3(y;\ 0)\}$ függvény-hármas jellemez, ezek speciális választásától függetlenül léteznek a

$$P_1(x,y)=\lim_{t\to\infty} P_1(x,y;t)$$

$$P_2(u)=\lim_{t\to\infty} P_2(u;t)$$

$$P_3(y)=\lim_{t\to\infty} P_3(y;t)$$

határfüggvények.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a $\gamma_1(t)$ folyamat kezdő eloszlása, azaz a $\{P_1(x,y;\ 0);\ P_2(u;\ 0);\ P_3(y;\ 0)\}$ függvény-hármas rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

léteznek a

$$p_1(x,y;0)=\frac{\partial P_1(x,y;0)}{\partial x\,\partial y},\quad p_2(u;0)=\frac{\partial P_2(u;0)}{\partial u},\quad p_3(y;0)=\frac{\partial P_3(y;0)}{\partial y}$$

sűrűségfüggvények, továbbá a

$$p_1^*(x,y;0)=\frac{p_1(x,y;0)}{[1-F(x)][1-H(y)]},\quad p_2^*(u;0)=\frac{p_2(u;0)}{1-G(u)},\quad p_3^*(y;0)=\frac{p_3(y;0)}{1-H(y)}$$

normált sűrűségfüggvények rendelkeznek az összes változóik szerinti elsőrendű parciális deriváltakkal. Könnyen belátható, hogy ez esetben a folyamatunk tetszőleges t melletti eloszlása, azaz a (2) függvények is rendelkeznek a felsorolt tulajdonságokkal.

A (3) határfüggvények létezése egyúttal a π_i valószínűségek létezését is jelenti. Meghatározásuk pedig a következőképpen történhet. Legyenek:

$$\text{(4)}\quad \begin{gathered} p_1(x,y;t)=\frac{\partial p_1(x,y;t)}{\partial x\partial y},\quad p_2(u;t)=\frac{\partial P_2(u;t)}{\partial u},\quad p_3(y;t)=\frac{\partial P_3(y;t)}{\partial y} \\ p_1^*(x,y;t)=\frac{p_1(x,y;t)}{[1-F(x)][1-H(y)]},\quad p_2^*(u;t)=\frac{p_2(u;t)}{1-G(u)},\quad p_3^*(y;t)=\frac{p_3(y;t)}{1-H(y)}. \end{gathered}$$

A $p_i^*(i=1,2,3)$ függvényekre felírható egy integro-differenciál egyenletrendszer. Ennek levezetése előtt hasznos lesz megvilágítani, milyen a $\gamma_1(t)$ folyamat fázis tere. A folyamatunk a fázistér I-típusú pontjainak valamelyikében, az

$\omega_1(x,y)\quad (0\leqq x,\ y<\infty,\ y\geqq cx)$

pontban tartózkodik, ha $e(t)=1\perp$ és $\xi(t)=x$, $\eta(t)=y$;

II-típusú pontjainak valamelyikében, az

$\omega_2(u)\quad (0\leqq u<\infty)$

pontban tartózkodik, ha $e(t)=2$ és $v(t)=u$;

végül a fázistér

III-típusú pontjai közül az

$$\omega_3(y) \qquad (0 \leqq y < \infty)$$

pontban tartózkodik, ha $e(t)=3$ és $v(t)=\eta(t)=y$.

Most megkeressük a $\gamma_1(t)$ folyamat azon átmeneteit, amelyek Δt idő alatti bekövetkezéseinek a valószínűségei $o(\Delta t)$-nél nem kisebb nagyságrendűek. A folyamatunkban kis Δt idő alatt a következő átmenet történhet:

Ia. az $\omega_1(x-\Delta t,\ y-c\Delta t)$ pontból az $\omega_1(x, y)$ pontba

$$\frac{1-F(x)}{1-F(x-\Delta t)}\cdot\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta t)}$$

valószínűséggel,

Ib. az $\omega_3(y-\Delta t)$ pontból az $\omega_1(0, y)$ pontba

$$\lambda\Delta t\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta t)}$$

valószínűséggel,

IIa. az $\omega_2(u-\Delta t)$ pontból az $\omega_2(u)$ pontba

$$\frac{1-G(u)}{1-G(u-\Delta t)}$$

valószínűséggel,

IIb. az $\omega_1(x, y)$, ill. $\omega_3(y)$ pontokból az $\omega_2(o)$ pontba,

$$\frac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)}\cdot\frac{H(y+c\Delta t)-H(y)}{1-H(y)}, \text{ ill } \frac{H(y+\Delta t)-H(y)}{1-H(y)}$$

valószínűségekkel, végül

IIIa. az $\omega_3(y)$ pontba az $\omega_3(y-\Delta t)$ pontból

$$(1-\lambda\Delta t)\frac{1-H(y)}{1-H(y-\Delta t)},$$

és az $\omega_1(x, y-c\Delta t)$ pontból

$$\frac{F(x+\Delta t)-F(x)}{1-F(x)}\cdot\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta t)}$$

valószínűséggel,

IIIb. az $\omega_3(o)$ pontba az $\omega_2(u)$ pontból

$$\frac{G(u+\Delta t)-G(u)}{1-G(u)}$$

valószínűséggel.

Felhasználva ezeket az átmenet-valószínűségeket, a p_i függvényekre az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$p_1(x,y;t) = p_1(x-\Delta t, y-c\Delta t; t-\Delta t)\frac{1-F(x)}{1-F(x-\Delta t)}\,\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta t)}+o(\Delta t)$$

$$p_1(0,y;t) = p_3(y-\Delta t;\, t-\Delta t)\lambda\Delta t\,\frac{1-H(y)}{1-H(y-\Delta t)}+o(\Delta t)$$

$$p_2(u;t) = p_2(u-\Delta t; t-\Delta t)\frac{1-G(u)}{1-G(u-\Delta t)}+o(\Delta t)$$

$$p_2(0;t) = \iint\limits_{0\leqq cx\leqq y<\infty} p_1(x,y;t-\Delta t)\frac{1-F(x+\Delta t)}{1-F(x)}\,\frac{H(y+c\Delta t)-H(y)}{\Delta t[1-H(y)]}\,dx\,dy+$$

$$+\int_0^\infty p_3(y;t-\Delta t)\frac{dH(y)}{1-H(y)}+0(1)$$

$$p_3(y;t) = p_3(y-\Delta t; t-\Delta t)(1-\lambda\Delta t)\frac{1-H(y)}{1-H(y-\Delta t)}+$$

$$+\Delta t\int_0^{\frac{y}{c}-\Delta t} p_1(x,y-c\Delta t; t-\Delta t)\frac{dF(x)}{1-F(x)}\,\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta t)}+o(\Delta t)$$

$$p_3(0;t) = \int_0^\infty p_2(u;t-\Delta t)\frac{dG(u)}{1-G(u)}+0(1).$$

A $p_i^*(i=1,2,3)$ függvényekre ezek az összefüggések a következők lesznek:

$$p_1^*(x,y;t) = p_1^*(x-\Delta t, y-c\Delta t; t-\Delta t)+o(\Delta t)$$

$$p_1^*(0,y;t) = \lambda\Delta t p_3^*(y-\Delta t; t-\Delta t)+o(\Delta t)$$

$$p_2^*(u;t) = p_2^*(u-\Delta t; t-\Delta t)+o(\Delta t)$$

$$p_2^*(0;t) = \iint\limits_{0\leqq cx\leqq y<\infty} p_1^*(x,y;t-\Delta t)[1-F(x)]c\,dx\,dH(y)+$$

$$+\int_0^\infty p_3^*(y;t-\Delta t)dH(y)+0(1)$$

$$p_3^*(y;t) = (1-\lambda\Delta t)p_3^*(y-\Delta t; t-\Delta t)+\Delta t\int_0^{\frac{y}{c}-\Delta t} p_1^*(x,y-c\Delta t;t-\Delta t)dF(x)+o(\Delta t)$$

$$p_3^*(0;t) = \int_0^\infty p_2^*(u;t-\Delta t)dG(u)+0(1).$$

Innen a $\Delta t \to o$ határátmenet elvégzése után nyerjük az alábbi integro-differenciál egyenletrendszert:

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = 0$$

$$(5) \qquad \frac{\partial p_2^*}{\partial t} + \frac{\partial p_2^*}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial p_3^*}{\partial t} + \frac{\partial p_3^*}{\partial y} + \lambda p_3^* = \int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y; t)\, dF(x)$$

A peremfeltételek a következők:

$$p_1^*(0, y; t) = \lambda p_3^*(y; t)$$

$$(6) \qquad p_2^*(0; t) = c\int_0^\infty \left\{\int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y; t)[1 - F(x)]\, dx\right\} dH(y) + \int_0^\infty p_3^*(y; t)\, dH(y)$$

$$p_3^*(0) = \int_0^\infty p_2^*(u; t)\, dG(u).$$

Mármost, ha $p_1^*(x, y)$, $p_2^*(u)$ és $p_3^*(y)$ a folyamat valamely, a kezdő eloszlásra megkövetelt tulajdonságokkal rendelkező stacionárius eloszlásnak megfelelő függvényhármas, akkor szükségképpen megoldása a

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = 0$$

$$(5') \qquad \frac{\partial p_2^*}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial p_3^*}{\partial y} + \lambda p_3^* = \int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y)\, dF(x)$$

egyenletrendszernek a

$$p_1^*(0, y) = \lambda p_3^*(y)$$

$$(6') \qquad p_2^*(0) = c\int_0^\infty \left\{\int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y)[1 - F(x)]\, dx\right\} dH(y) + \int_0^\infty p_3^*(y)\, dH(y)$$

$$p_3^*(0) = \int_0^\infty p_2^*(u)\, dG(u)$$

peremfeltételek mellett. Viszont (5′)-nek (6′) peremfeltételek melletti megoldása

$$p_1^*(\alpha, y) = \varrho L_c(y-cx)$$
(7)
$$p_2^*(u) = \varrho$$
$$p_3^*(y) = \varrho \frac{1}{\lambda} L_c(y)$$

alakú, ahol ϱ alkalmasan választott állandó, míg az $L_c(y)$ függvény a

(8)
$$\frac{dL_c(y)}{dy} + \lambda L_c(y) = \lambda \int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)\,dF(x)$$

egyenletnek $L_c(0)=\lambda$ kezdő feltétel melletti megoldása. Itt most az $L_c(y)$ függvényt elegendő csak $y \geqq 0$ értékeire megadni, míg $y<0$-ra $L_c(y)$-t azonosan 0-nak vehetjük. A (8) jobb oldalán álló integrálban elvégezve a $w=cx$ helyettesítést, egyenletünk a

(9)
$$\frac{dL_c(y)}{dy} + \lambda L_c(y) = \int_0^y L_c(y-w)\,dF\left(\frac{w}{c}\right), \quad L_c(0)=\lambda$$

alakot veszi fel. Térjünk most át a $\Lambda_c(s)=\int_0^\infty e^{-su} L_c(u)\,du$ és a $\Phi(s)=\int_0^\infty e^{-su}\,dF(u)$ *Laplace*-ill. *Laplace—Stieltjes*-transzformáltakra. (9) ekvivalens az

$$s\Lambda_c(s) - \lambda + \lambda\Lambda_c(s) = \lambda\Phi(cs)\Lambda_c(s)$$

összefüggéssel, ahonnan $\Lambda_c(s)$-re a

(10)
$$\Lambda_c(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda[1-\Phi(cs)]}$$

formulát nyerjük. Mármost, a $\gamma_1(t)$ folyamatunk említett tulajdonságokkal rendelkező stacionárius eloszlásának megfelelő sűrűségfüggvényei csak

$$p_1(x, y) = \varrho L_c(y-cy)[1-F(x)][1-H(y)]$$
(11)
$$p_2(u) = \varrho[1-G(u)]$$
$$p_3(y) = \varrho \frac{1}{\lambda} L_c(y)[1-H(y)]$$

alakúak lehetnek. Amint arra már utaltunk, a $\gamma_1(t)$ folyamat elég egyszerű feltételek mellett ergodikus, következésképpen (11) az egyetlen létező stacionárius eloszlás sűrűségfüggvényeit adja. A π_i valószínűségekkel kapcsolatosan pedig igaz az alábbi tétel:

1. TÉTEL. *Ha a $H(x)$ és a $G(x)$ ($c>1$ esetben a $H(x)$, $G(x)$ és $F(x)$) eloszlásfüggvények közül legalább egy nem rácsos eloszlásfüggvény és ha $M(\eta_i+\delta_i)<\infty$,*

akkor a π_i határvalószínűségek a

$$\pi_1 = \varrho \int_0^\infty \left\{ \int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)[1-F(x)]dx \right\} [1-H(y)]dy$$

(12)
$$\pi_2 = \varrho \int_0^\infty [1-G(u)]du$$

$$\pi_3 = \varrho \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty L_c(y)[1-H(y)]$$

formulákkal adhatók meg, ahol a $\Lambda_c(s) = \int_0^\infty e^{-su} L_c(u)du$ *Laplace transzformáltat* (10) *szolgáltatja. A* ϱ *konstanst a* $\sum_1^3 \pi_i = 1$ *normálási feltétel határozza meg.*

A ϱ explicit kifejezéséhez felhasználjuk azt, hogy

$$c \int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)[1-F(x)]dx + \frac{1}{\lambda} L_c(y) = 1.$$

Következésképpen,

$$\int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)[1-F(x)]dx + \frac{1}{\lambda} L_c(y) = \frac{1}{c}\left[1+\frac{c-1}{\lambda} L_c(y)\right]$$

és így

$$\varrho = \frac{1}{\int_0^\infty [1-G(u)]du + \frac{1}{c}\int_0^\infty \left[1+\frac{c-1}{\lambda} L_c(y)\right][1-H(y)]dy}.$$

3. Az Erlang formulák egy általánositásáról. Tekintsük most az előző két pontban vizsgált problémánkat n kiszolgáló készülék esetén. A készülékek közül mindegyik mind a szabad, mind a foglaltsági periódusok alatt meghibásodhat. Feltételezett, hogy elegendő felújító berendezés áll rendelkezésünkre. Ennek értelmében, függetlenül a javítás alatt levő készülékek számától, egy készülék meghibásodása esetén nyomban elkezdődik a felújítása, amelynek befejeződése után a készülék teljesen visszanyeri munkavégző-képességét. Jelöljék az $\eta_i^{(k)}$ $(i \geqq 1, 0 \leqq k \leqq n)$ változók a kiszolgáló készülékek egymásutáni ü. b. tartalékait. Legyenek ezek egymástól független valószínűségi változók, közös $P\{\eta_i^{(k)} \leqq x\} = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Feltételezzük továbbá, hogy a készülékek ü. b. tartalékai az idővel arányosan, szabad periódusok alatt 1, foglaltsági periódusok alatt pedig $c > 1$ sebességgel csökkennek. A javítási idők $\delta_i^{(k)}$ $(i \geqq 1, 0 \leqq k \leqq n)$ szintén legyenek független, közös $P(\delta_i^{(k)} \leqq x) = G(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók. A rendszer legyen elvesztéses rendszer, azaz, ha egy olyan pillanatban merül

fel egy igény, amikor a rendszerben nincs hibátlan szabad készülék, akkor ez az igény megszűnik. Hasonlóan megszűnnek azok az igények is, amelyek kiszolgálásai elkezdődtek ugyan, de megszakadtak a kiszolgáló készülékek meghibásodásai következtében.

Mármost e rendszerre vonatkozólag az *Erlang*-probléma azon valószínűség meghatározásából áll, hogy k készülék kiszolgálással foglalt, l készülék pedig javítás alatt van ($k+l \leqq n$). Tetszőleges $F(x)$, $H(x)$ és $G(x)$ mellett a feladat még megoldatlan. Ha viszont ezek az eloszlásfüggvények, mind exponenciálisak, azaz ha $F(x)=1-e^{-ux}$, $H(x)=1-e^{-\alpha x}$ és $G(x)=1-e^{-\beta x}$, akkor a feladat egy homogén *Markov*-folyamat vizsgálatára vezethető vissza. Legyen $v(t)=(k, l)$ (k, l nem negatív egész számok) ha a t pillanatban k készüléken kiszolgálás folyik és a javítás alatt levő készülékek száma l. Feltevéseink értelmében $v(t)$ homogén *Markov*-folyamatot alkot, melynek fázistere a kétdimenziós sík mindazon (x, y) nem negatív egész koordinátájú pontjainak összessége, amelyekre $x+y \leqq n$. A folyamat fázisterében indukálódó tetszőleges t pillanatbeli eloszlást egyértelműen jellemzik a

$$P_{k,l}(t)=P\{v(t)=(k,l)\} \qquad (0 \leqq k+l \leqq n)$$

valószínűségek. Egyszerű meggondolásokkal ezekre a függvényekre az alábbi differencia-differenciál egyenletrendszer vezethető le:

$$\begin{aligned}
P'_{0,0}(t) &= -(\lambda+n\alpha)P_{0,0}(t)+\mu P_{1,0}(t)+\beta P_{0,1}(t)\\
&\quad 0<l<n\\
P'_{0,l}(t) &= -\left[(n-l)\alpha+\lambda+l\beta\right]P_{0,l}(t)+\mu P_{1,l}(t)+(l+1)\beta P_{0,l+1}(t)+\\
&\quad +c\alpha P_{1,l-1}(t)+(n-l+1)\alpha P_{0,l-1}(t)\\
P'_{0,n}(t) &= -n\beta P_{0,n}(t)+\alpha P_{0,n-1}(t)+c\alpha P_{1,n-1}(t)\\
(13) \qquad &\quad 0<k<n\\
P'_{k,0}(t) &= -\left[k(\mu+c\alpha)+(n-k)\alpha+\lambda\right]P_{k,0}(t)+\lambda P_{k-1,0}(t)+\\
&\quad +\beta P_{k,1}(t)+(k+1)\mu P_{k+1,0}(t)\\
&\quad 0<k,\ l<n,\ k+l<n\\
P'_{k,l}(t) &= -\left[\lambda+l\beta+k(\mu+c\alpha)+(n-k-l)\alpha\right]P_{k,l}(t)+\lambda P_{k-1,l}(t)+\\
&\quad +(l+1)\beta P_{k,l+1}(t)+(k+1)\mu P_{k+1,l}(t)+(k+1)c\alpha P_{k+1,l-1}(t)+\\
&\quad +(n-k-l+1)\alpha P_{k,l-1}(t)\\
&\quad k+l=n,\ 0<k,\ l<n\\
P'_{k,l}(t) &= -\left[k(\mu+c\alpha)+l\beta\right]P_{k,l}(t)+\lambda P_{k-1,l}(t)+(k+1)c\alpha P_{k+1,l}(t)+\alpha P_{k,l-1}(t)\\
P'_{n,0}(t) &= -\left[n\mu+nc\alpha\right]P_{n,0}(t)+\lambda P_{n-1,0}(t).
\end{aligned}$$

Most rendezzük a fázistér pontjait a következőképpen: a $(0, l)$ pontokhoz $0 \leqq l \leqq n$ rendeljük az l egész számot, míg más (k, l) párhoz rendeljük az

$$s=\sum_{i=1}^{k}[n-(k-1)+i]+l \quad \text{egészet.}$$

Fordítva, tetszőleges s $\left(0 \leqq s \leqq N,\ N=\frac{(n+1)(n+1)}{2}\right)$ egész számhoz könnyen megadható az a (k, l) számpár, amelyhez az előző módon az s rendelődik. Ily módon azt kapjuk, hogy

$$k = \text{első } i, \text{ melyre } s - \sum_{j=0}^{i} (n-j+1) < 0,$$

míg

$$l = s - \sum_{j=0}^{k-1} (n-j+1).$$

A (13) egyenletrendszer most átírható egyetlen

$$P'(t) = AP(t)$$

mátrix-egyenletbe. $P(t)$ oszlop vektor, melynek komponensei a $P_{k,l}(t) = P_s(t)$ valószínűségek. Az A mátrix strukturális alakjának érzékeltetésére vázoljuk az $n=6$ esetnek megfelelő mátrixot. $\ast$-gal jelöljük a 0-tól különböző elemek helyét, a jelöletlenül hagyott helyeken a mátrix elemei zérusok.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
\ast&\ast&&&&&&\ast&&&&& &&&&& &&&&& &&&&& \\
\ast&\ast&\ast&&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& &&&&& &&&& \\
&\ast&\ast&\ast&&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& &&&&& &&& \\
&&\ast&\ast&\ast&&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& &&&&& && \\
&&&\ast&\ast&\ast&&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& &&&&& & \\
&&&&\ast&\ast&\ast&&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& &&&&& \\
&&&&&\ast&\ast&&&&&&\ast&&&&& &&&&& &&&&& \\
\ast&&&&&&&\ast&\ast&&&&&\ast&&&&& &&&&& &&&& \\
&\ast&&&&&&\ast&\ast&\ast&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& &&& \\
&&\ast&&&&&&\ast&\ast&\ast&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& && \\
&&&\ast&&&&&&\ast&\ast&\ast&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& & \\
&&&&\ast&&&&&&\ast&\ast&\ast&&&&\ast&\ast&&&&& &&&&& \\
&&&&&\ast&&&&&&\ast&\ast&&&&&\ast&&&&& &&&&& \\
&&&&&&&\ast&&&&&&\ast&\ast&&&&\ast&&&&& &&&& \\
&&&&&&&&\ast&&&&&\ast&\ast&\ast&&&\ast&\ast&&&&& &&& \\
&&&&&&&&&\ast&&&&&\ast&\ast&\ast&&&\ast&\ast&&&&& && \\
&&&&&&&&&&\ast&&&&&\ast&\ast&\ast&&&\ast&\ast&&&&& & \\
&&&&&&&&&&&\ast&&&&&\ast&\ast&&&&\ast&\ast&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&\ast&&&&&\ast&\ast&&&\ast&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&&\ast&\ast&\ast&&\ast&\ast&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&&\ast&\ast&\ast&&\ast&\ast&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&&\ast&\ast&&&\ast&\ast&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&&\ast&\ast&&\ast&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&\ast&\ast&&\ast&\ast \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&&\ast&\ast&\ast \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&\ast&\ast&\ast \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&\ast&&\ast
\end{array}\right]$$

Foglalkozzunk most a

$$q_s = \lim_{t\to\infty} P_s(t)$$

határvalószínűségek meghatározásának problémájával. Ha q-val jelöljük azt az oszlop-vektort, melynek komponensei a q_s-sek $(0 \leqq s \leqq N)$, akkor kell, hogy fennálljon a

$$Aq = 0 \tag{14}$$

egyenlet. (14) homogén lineáris egyenletrendszer, melyet a $\sum_0^N q_s = 1$, $q_s \geqq 0$ feltételek mellett kell megoldanunk. Az A mátrix eléggé bonyolult struktúrája miatt tetszőleges n mellett a q_s határvalószínűségek explicit meghatározása komoly nehézségekbe ütközik. A gyakorlati alkalmazásoknál azonban nem is erre van szükség. Adott λ, μ, α, β és n értékek mellett elegendő a q_s-ek numerikus meghatározása, mely könnyen végrehajtható elektronikus számológép segítségével.

Az $n=1$ esetben a (14) egyenletrendszer a

$$\begin{aligned} -(\lambda+\alpha)q_0 + \beta q_1 + \mu q_2 &= 0, \\ \alpha q_0 - \beta q_1 + c\alpha q_2 &= 0, \\ \lambda q_0 - (\mu + c\alpha) q_2 &= 0, \end{aligned}$$

egyenletekből áll. A $\sum_0^2 q_i = 1$ normálási feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{(\mu+c\alpha)\beta}{(\mu+c\alpha+\lambda)(\alpha+\beta)+(c-1)\lambda\alpha}, \\ q_1 &= \frac{\alpha(\mu+c\alpha+\lambda c)}{(\mu+c\alpha+\lambda)(\alpha+\beta)+(c-1)\lambda\alpha}, \\ q_3 &= \frac{\lambda\beta}{(\mu+c\alpha+\lambda)(\alpha+\beta)+(c-1)\lambda\alpha}. \end{aligned} \tag{15}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy (12)-ben elvégezve a megfelelő behelyettesítéseket és számításokat ($q_0 = \pi_3$, $q_1 = \pi_2$, $q_2 = \pi_1$), (15)-tel megegyező eredményre jutunk.

4. A $\gamma_1(t)$ FOLYAMAT ERGODICITÁSA. A (3) határeloszlás létezésének igazolása céljából fordítsuk ismét figyelmünket a 2. pontban bevezetett $\gamma_1(t)$ folyamatra. Könnyű észrevenni, hogy folyamatunk rekurrens folyamat, melynek regenerációs pontjaiként tekinthetjük a javítások befejeződési pillanatait, azaz az r_i pontokat. Ha feltesszük, hogy a $H(x)$ és $G(x)$ ($c > 1$ esetben az $F(x)$, $H(x)$ és $G(x)$) eloszlások közül legalább egy nem rácsos eloszlás, akkor $\gamma_1(t)$ aperiodikus rekurrens folyamatot alkot. Ennélfogva az ergodicitás vizsgálatánál felhasználhatjuk SMITH W. L. [4], [5] eredményeit. Folyamatunk fázistere a

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_1 \equiv \{\omega_1(v, u);\ 0 \leqq cv \leqq u\} \\ &\mathcal{H}_2 \equiv \{\omega_2(w);\ w \geqq 0\} \\ &\mathcal{H}_3 \equiv \{\omega_3(u);\ u \geqq 0\} \end{aligned}$$

halmazok egyesítéséből áll. Tekintsük most $cx \leqq y$-ra az

$$A_1^{(x,y)} = \{\omega_1(v,u);\, v \leqq x, u \leqq y, cv \leqq u\} \subset \mathcal{H}_1$$

$$A_2^{(z)} = \{\omega_2(w);\, w \leqq z\} \subset \mathcal{H}_2$$

$$A_3^{(y)} = \{\omega_3(u);\, u \leqq y\} \subset \mathcal{H}_3$$

halmazokat. Tetszőleges t pillanatban a fázistérbeli eloszlást a

$$P_1(z,y;t) = P\{\gamma_1(t) \in A_1^{(x,y)}\}$$

$$P_2(z;t) = P\{\gamma_1(t) \in A_2^{(z)}\}$$

$$P_3(y;t) = A\{\gamma_1(t) \in A_3^{(y)}\}$$

valószínűségek írják le. A folyamat ergodicitása azt jelenti, hogy a (3), azaz a

$$P_1(x,y) = \lim_{t\to\infty} P(x,y;t)$$

$$P_2(z) = \lim_{t\to\infty} P_2(z;t)$$

$$P_3(y) = \lim_{t\to\infty} P_3(y,t)$$

határfüggvények tetszőleges kezdő eloszlás mellett, azok speciális választásától függetlenül, léteznek. Válasszuk ki most a folyamat valamelyik regenerációs pontját, mondjuk r_i-t az idő kezdőpontjaként. Majd véve $X = r_{i+1} - r_i$-t, definiáljuk a

$$\psi_{A_1^{(x,y)}}(t) = P\{\gamma_1(t) \in A_1^{(x,y)}, X > t\}$$

(16)
$$\psi_{A_2^{(z)}}(t) = P\{\gamma_1(t) \in A_2^{(z)}, X > t\}$$

$$\psi_{A_3^{(y)}}(t) = P\{\gamma_1(t) \in A_1^{(y)}, X > t\}$$

függvényeket. SMITH [4] dolgozatának 2. tételében bebizonyította, hogy az $M\{r_{i+1} - r_i\} < \infty$ esetben (amelyhez szükséges és elégséges, hogy $M(\eta_i + \delta_i) < \infty$), a (3) határértékek léteznek, hacsak a (16) függvények tetszőleges véges időintervallumon korlátos variációjúak. Ugyancsak SMITH [4] dolgozatának 2. lemmájára támaszkodva könnyen verifikálható a (16) függvényekre vonatkozó követelmény teljesülése. A mi esetünkben az említett lemma állítása a következőképpen fogalmazható meg:

Legyen A az $A_1^{(x,y)}$, $A_2^{(z)}$, $A_3^{(y)}$ halmazok közül valamelyik. Jelöljük S_A-val azon időpontok halmazát, amelyekre $\gamma_1(t) \in A$, továbbá jelölje $\Gamma(S_A)$ az S_A határpontjainak halmazát, $c(\ )$ pedig a zárójelben álló halmaz számosságát. t_0 legyen a folyamat első regenerációs pontja, azaz a $t=0$-hoz legközelebb álló javítás befejeződési pillanata. Majd tekintsünk egy

$$I = (t_0 + a,\ t_0 + b) \qquad (0 \leqq a < b)$$

véges időintervallumot s ennek az $I_j \subseteqq I$ részintervallumain értelmezett $\{Y(I_j)\}$ valószínűségi halmazfüggvényt. Ha most ez a halmazfüggvény olyan, hogy

a) bármely $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1, I_2 \subset I$ mellett.

$$Y(I_1) + Y(I_2) = Y(I_1 + I_2),$$

b) 1-valószínűséggel

$$M\{Y(I)/t_0, \gamma_1(0)\} < \infty,$$

c) tetszőleges $I_j \subset I$ mellett

$$P\{c[I_j \cap \Gamma(S_A)] \leqq Y(I_j)/t_0, \gamma_1(0)\} = 1,$$

akkor a

$$\psi_A(t) = P\{\gamma_1(t) \in A, X > t\}$$

függvény az (a, b) szakaszon véges variációjú.

Válasszuk most az $Y(I_j)$ halmazfüggvényt a $\sum_1^5 \varepsilon_i$ összegnek, amelyben az ε_i-k jelentései a következők:

ε_1 — az I_j időintervallumbeli érkezések száma,
ε_2 — azon kiszolgálások száma, amelyek az I_j időszakaszban fejeződtek be,
ε_3 — az I_j időközbe eső regenerációs pontok, azaz javításbefejeződési pillanatok száma,
ε_4 — pedig azon javítások száma, amelyek az I_j időközben kezdődtek el,
végül
ε_5 — az I_j szakasz azon pontjainak száma, amelyekben a

$$\{\xi(t) = x\}, \quad \{\eta(t) = y\}, \quad \{e(t) = 2, \nu(t) = z\}$$

események közül legalább egy bekövetkezik.

Könnyű ellenőrizni, hogy az $Y(\ ) = \sum_1^5 \varepsilon_i$ halmazfüggvény az *a)*, *b)*, *c)* követelményeknek eleget tesz. Következésképpen fennáll az alábbi tétel:

2. TÉTEL. *Ha a $H(x)$ és $G(x)$ ($c > 1$ esetben a $H(x)$, $F(x)$ és $G(x)$) eloszlások közül legalább egy nem rácsos eloszlás és $M(\eta_i + \delta_i) < \infty$, akkor a $\gamma_1(t)$ folyamat ergodikus, azaz léteznek a* (3) *alatti határértékek.*

2. §

Várakozás, ha a készülék hibátlan — elvész az igény, ha a készülék hibás

1. A PROBLÉMA FELVETÉSE. Az alkalmazások különböző területein előfordulnak olyan helyzetek, amelyeknél egy meghibásodható készülékre bizonyos homogén funkciók elvégzése hárul. Emellett a munkaszervezés olyan, hogy amíg a készülék hibátlan, a kiszolgálandó egyedek torlódhatnak a készülék előtt, azaz ha valamely egyed érkezési pillanatában a készülék hibátlan ugyan, de foglalt, az egyed sorba áll, várakozik. Az esetben viszont, amikor a készülék meghibásodik, a rendszerben

tartózkodó összes igény megszűnik, elvész s hasonlóan megszűnnek azok az igények is, amelyek a készülék javítási ideje alatt lépnek fel. Az előző § eredményeinek felhasználásával erre az esetre is könnyen kiszámíthatók a π_i valószínűségek. Ezek a mennyiségek viszont meglehetősen gyengén jellemzik a rendszer effektivitását. A rendszer részletesebb tanulmányozásánál újabb karakterisztikák vizsgálatai merülnek fel, közben olyanoké is, amelyek az ún. abszolút megbízható készülékek esetében fel sem vetődhettek. A jelen §-ban vizsgálni fogjuk a rendszerben tartózkodó személyek számának eloszlását. További karakterisztikák vizsgálatával egy következő dolgozatban foglalkozunk.

2. A RENDSZERT LEÍRÓ MARKOV-FOLYAMAT. Tekintsük az 1. § 1. pontjában leírt egycsatornás kiszolgáló rendszert az elvesztési elv előző pontban vázolt módosításával. Ha tehát egy igény akkor érkezik a rendszerbe, amikor a készülék hibátlan, de egy korábban érkezett igény kiszolgálásával már foglalt, akkor ez az igény most nem vész el, hanem sorba áll, várakozik, míg a készülék meghibásodási pillanatában a rendszerben tartózkodó, s a javítási idő alatt fellépő igények mind elvesznek. Az $\omega(t)$ folyamat a jelen esetben is az 1. ábrán vázolt trajektóriához hasonló típusú realizációkkal fog rendelkezni. A különbség csak az, hogy azok a periódusok, amelyekben a készülék ü. b. tartaléka $c>1$ sebességgel csökken, most általában hosszabbak lesznek. Egy ilyen periódus nem más, mint egy abszolút megbízható készülék megfelelő feltételek melletti foglaltsági periódusa. Ennek értelmében, azon időszakaszok, amelyekben a készülék ü. b. tartaléka $c>1$ sebességgel csökken, függetlenek és

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} D^{*(n)}(x-u)\,dF(u) \tag{1}$$

közös eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. Szükségünk lesz az (1) eloszlásfüggvény *Laplace—Stieltjes*-transzformáltjára, melyet a következőkben $\Gamma(s)$-sel fogunk jelölni. Az irodalomból ismeretes (lásd pl. [6]), hogy $\Gamma(s)$ $\operatorname{Re} s>0$ mellett eleget tesz a

$$\Gamma(s) = \Phi[s+\lambda(1-\Gamma(s)]$$

függvényegyenletnek, s ennek a $\Gamma(\infty)=0$ és a $|\Gamma(s)|<1$ feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása.

Az 1. §-ban értelmezett π_i valószínűségeket jelen esetben is az 1. § (12)-es formulája adja, csupán az $F(x)$ függvényt kell helyettesítenünk $D(x)$-szel s ennek megfelelően az $L_c(u)$ helyett olyan $\mathfrak{L}_c(u)$ függvényt kell vennünk, amelynek *Laplace*-transzformáltja

$$\psi_c(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda[1-\Gamma(cs)]}.$$

A továbbiakban a rendszerben tartózkodó egyedek (igények) számának stacionárius eloszlásával kapcsolatos kérdéseket vizsgáljuk. Pontosabban, megmutatjuk, hogy az $F(x)$, $H(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvényekre vonatkozó 1. §-beli feltételek mellett léteznek a

$$P_k = \lim_{t\to\infty} P\left\{\begin{matrix}\text{a } t \text{ időpontban a rendszerben tartózkodó egyedek}\\ \text{száma } k\end{matrix}\right\}$$

$(k \geqq 1)$ határvalószínűségek, majd meghatározzuk az $R(z) = \sum_{1}^{\infty} P_k z^k$ generátorfüggvényt.

E célból bevezetjük a

$$\gamma_2(t) = \{e(t), v(t)\}$$

sztochasztikus folyamatot. Az $e(t)$ komponens értéke k, $(k \geqq 0)$ ha a t pillanatban pontosan k egyed tartózkodik a rendszerben, míg akkor, amikor a készüléket javítják, legyen $e(t) = -1$. A második komponens aszerint értelmeződik, hogy $e(t)$ milyen értékeket vesz fel. Az $e(t) = -1$ esetben $v(t)$ a soron levő javítás t időpillanatig eltelt ideje, az $e(t) = 0$ esetben $v(t) = \eta(t)$, ahol $\eta(t)$ a készülék ü. b. tartalékának a t pillanatig történő csökkenésével kapcsolatos, pontosan $\eta(t) = \omega(r_i + 0) - \omega(t)$, hol r_i a t-hez balról legközelebb álló javításbefejeződési pillanat. Végül $e(t) \geqq 1$ esetben $v(t)$ egy kétdimenziós vektor $\{\xi(t), \eta(t)\}$. A második komponens, $\eta(t)$ az előbb definiált mennyiség, $\xi(t)$ pedig a soron levő kiszolgálásnak a t pillanatig eltelt időtartama. Feltevéseink értelmében $\gamma_2(t)$ homogén *Markov*-folyamatot alkot.

Tetszőleges t időpontban a folyamat fázistérbeli eloszlását a

$$\begin{aligned} P_{-1}(z; t) &= P\{e(t) = -1, \mu(t) \leqq z\} \\ P_0(y; t) &= P\{e(t) = 0, \eta(t) \leqq z\} \\ P_k(x, y; t) &= P\{e(t) = k, \xi(t) \leqq x, \eta(t) \leqq y\} \qquad (k \geqq 1) \end{aligned} \tag{2}$$

valószínűségek írják le. Ugyanazokkal a meggondolásokkal, amelyeket az 1. § 4. pontjában alkalmaztunk, igazolható, hogy a $\gamma_2(t)$ folyamat a 2 tétel feltételei mellett ergodikus. Ennek értelmében, bármilyen legyen is a kezdőeloszlás, egyértelműen léteznek az alábbi határfüggvények:

$$\begin{aligned} P_{-1}(z) &= \lim_{t \to \infty} P_{-1}(z; t), \\ P_0(y) &= \lim_{t \to \infty} P_0(y; t), \\ P_k(x, y) &= \lim_{t \to \infty} P_k(x, y; t). \end{aligned} \tag{3}$$

A folyamat stacionárius eloszlásának megkeresésénél (az ergodicitás következtében ez egyúttal a (3) határfüggvények meghatározását is jelenti) az 1. §-hoz hasonlóan feltételezzük, hogy a folyamat kezdő eloszlása sima. Ez azt jelenti, hogy ha a kezdő eloszlás a $P_{-1}(z; 0)$, $P_0(y; 0)$ és $P_k(x, y; 0)$ függvényekkel van megadva, akkor léteznek a

$$p_{-1}(z; 0) = \frac{\partial p_{-1}(z; 0)}{\partial z}, \quad p_0(y; 0) = \frac{\partial P(y; 0)}{\partial y}, \quad p_k(x, y; 0) = \frac{\partial^2 P_k(x, y; 0)}{\partial x \, \partial y}$$

ún. sűrűségfüggvények. Feltételezzük még továbbá, hogy a

$$p_{-1}^*(z; 0) = \frac{p_{-1}(z; 0)}{1 - G(z)}, \quad p_0^*(y; 0) = \frac{p_0(y; 0)}{1 - H(y)}, \quad p_k^*(x, y; 0) = \frac{p_k(x, y; 0)}{[1 - F(x)][1 - Hy)]}$$

normált sűrűségfüggvények elsőrendben differenciálhatók. Könnyű verifikálni, hogy ez esetben a $\gamma_2(t)$ tetszőleges t pillanatbeli eloszlását leíró (2) függvények is hasonló tulajdonságokkal bírnak. Továbbá a kezdő eloszlás ilyen választása mellett a (3) határfüggvények is rendelkeznek a

$$p_1(z) = \frac{\partial P_{-1}(z)}{\partial z}, \quad p_0(y) = \frac{\partial P_0(y)}{\partial y}, \quad p_k(x,y) = \frac{\partial^2 P_k(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

sűrűségfüggvényekkel és a megfelelő $p_{-1}^*(z)$, $p_0^*(x)$ és $p_k^*(x,y)$ $(k \geqq 1)$ függvények differenciálhatók. Az 1. § (11) alatti eredményéből most következik, hogy

$$p_0(y) = \varrho \frac{1}{\lambda} \mathfrak{L}_c(y)[1-H(y)]$$

$$p_{-1}(z) = \varrho[1-G(z)],$$

ahol ϱ a megfelelő normáló konstans, $\mathfrak{L}_c(u)$ *Laplace*-transzformáltja pedig $\psi_c(s)$.

Az 1. § (5) egyenleteinek levezetésénél alkalmazott meggondolásokkal az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$p_1(x,y;t+\Delta) = p_1(x-\Delta, y-c\Delta; t)(1-\lambda\Delta)\frac{1-F(x)}{1-F(x-\Delta)}\cdot\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta)} + o(\Delta)$$

$$(k \geqq 2)$$

$$p_k(x,y;t+\Delta) = p_k(x-\Delta, y-c\Delta; t)(1-\lambda\Delta)\frac{1-F(x)}{1-F(x-\Delta)}\cdot\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta)} +$$

$$+\lambda\Delta p_{k-1}(x-\Delta, y-c\Delta; t)\frac{1-F(x)}{1-F(x-\Delta)}\cdot\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta)} + o(\Delta)$$

$$P_1(0,y;t+\Delta) = \lambda\Delta p_0(y-\Delta; t)\frac{1-H(y)}{1-H(y-\Delta)} +$$

$$+\Delta\int_0^{\frac{y}{c}} p_2(x, y-c\Delta; t)\frac{dF(x)}{1-F(x)}\cdot\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta)} + o(\Delta) \qquad (k \geqq 2)$$

$$p_k(0,y;t+\Delta)\Delta = \Delta\int_0^{\frac{y}{c}} p_{k-1}(x, y-c\Delta; t)\,\frac{1-H(y)}{1-H(y-c\Delta)}\cdot\frac{dF(x)}{1-F(x-\Delta)} + o(\Delta).$$

Ezekből a megfelelő normálás, majd a $\Delta \to 0$ határátmenet elvégzése után a $p_k^*(x,y;\,t)$ függvényekre a következő végtelen tagú parciális differenciál egyenletrendszert nyerjük;

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \lambda p_1^* = 0.$$

$$\frac{\partial p_k^*}{\partial t} + \frac{\partial p_k^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_k^*}{\partial y} + \lambda(p_k^* - p_{k-1}^*) = 0 \qquad (k \geqq 2).$$

A peremfeltételek az alábbiak lesznek:

$$p_1^*(0,y;t) = \lambda p_0^*(y;t) + \int_0^{\frac{y}{c}} p_2^*(x,y;t)\,dF(x)$$

$$p_k^*(0,y;t) = \int_0^{\frac{y}{c}} p_{k+1}^*(x,y;t)\,dF(x) \qquad (k \geqq 2).$$

3. A STACIONÁRIUS ELOSZLÁS. Bármely, a folyamat kezdő eloszlására megkövetelt tulajdonságoknak eleget tevő stacionárius eloszlás normált sűrűségfüggvényei szükségképpen kielégítik a

$$(4)\qquad \begin{aligned} p_1^*(0,y) &= \lambda p_0^*(y) + \int_0^{\frac{y}{c}} p_2^*(x,y)\,dF(x) \\ p_k^*(0,y) &= \int_0^{\frac{y}{c}} p_{k+1}^*(x,y)\,dF(x) \qquad (k \geqq 2) \end{aligned}$$

peremfeltételű

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_1^*}{\partial y} + \lambda p_1^* = 0 \\ &\frac{\partial p_k^*}{\partial x} + c\frac{\partial p_k^*}{\partial y} + \lambda(p_k^* - p_{k-1}^*) = 0 \qquad (k \geqq 2) \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A $p_0^*(y)$ függvényt már ismerjük, *Laplace*-transzformáltját a

$$\varrho\frac{1}{\lambda}\psi_c(s) = \varrho\frac{1}{s+\lambda[1-\Gamma(cs)]}$$

formula adja meg. Legyenek most

$$q_k(y) = \int_0^{\frac{y}{c}} p_k^*(x,y)\,dF(x) \qquad (k \geqq 2)$$

$$P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(x,y)z^k, \qquad Q(y,z) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(y)z^k.$$

A [8] dolgozatban igazolt, hogy ezek a végtelen sorok tetszőleges x, y mellett a $|z| \leqq 1$ körben abszolút konvergensek. Vegyük most észre, hogy az (5) egyenletrendszer ekvivalens a

$$\frac{\partial P}{\partial x} + c\frac{\partial P}{\partial y} + \lambda(1-z)P = 0$$

egyenlettel és hogy a (4) peremfeltételek értelmében

$$Q(y, z) = zP(0, y, z) - \lambda p_0^*(y) z^2.$$

Az utóbbiak figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= e^{-\lambda(1-z)x} P(x, y-cx, z) \\ &= e^{-\lambda(1-z)x} \left[\lambda p_0^*(y-cx) z + \frac{1}{z} Q(y-cx, z) \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Következésképpen az (5) egyenletrendszer (4) peremfeltételek melletti megoldásához elegendő meghatározni a $Q(u, z)$ függvényt, vagy annak *Laplace*-transzformáltját $\bar{Q}(s, z) = \int\limits_0^\infty Q(u, z) e^{-su} du$-t. $\bar{Q}(s, z)$ meghatározása érdekében összefüggéseket keresünk a $q_k(u)$ függvények között. (6) jobb oldalát z hatványai szerint haladó végtelen sorba írva, kapjuk:

$$e^{-\lambda(1-z)x} \left[\lambda p_0^*(y-cx) z + \frac{1}{z} Q(y-cx, z) \right] = e^{-\lambda x} \left(1 + \frac{\lambda x}{1!} z + \dots + \frac{(\lambda x)^k}{k!} z^k + \dots \right) \cdot$$

$$\cdot \{ [\lambda p_0^*(y-cx) + q_2(y-cx)] z + q_3(y-cx) z^2 + \dots + q_{k+1}(y-cx) z^k + \dots \} =$$

$$= e^{-\lambda x} \left\{ a(y-cx) + \left[a(y-cx) \frac{\lambda x}{1!} + q_3(y-cx) \right] z^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \left[a(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} + q_3(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + q_k(y-cx) \frac{\lambda x}{1!} + q_{k+1}(y-cx) \right] z^k + \dots \right\}.$$

Itt $a(y)$-nal a $\lambda p_0^*(y) + q_2(y)$ összeget jelöltük. (6) alapján

$$p_k^*(x, y) = e^{-\lambda x} \left[a(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + q_k(y-cx) \frac{\lambda x}{1!} + q_{k+1}(y-cx) \right].$$

Innen viszont a $q_k(u)$ függvények definíciója értelmében

$$q_k(y) = \int\limits_0^{\frac{y}{c}} \left[a(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + q_{k+1}(y-cx) \right] e^{-\lambda x} dF(x). \tag{7}$$

Az $u = cx$ helyettesítés elvégzése után a

$$q_k(y) = \int\limits_0^{\frac{y}{c}} \left[a(y-u) \frac{(\lambda u)^{k-1}}{c^{k-1}(k-1)!} + \dots + q_{k+1}(y-u) \right] e^{-\frac{y}{c} u} dF\left(\frac{u}{c} \right)$$

összefüggést kapjuk. Ha most bevezetjük az $\bar{a}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su} a(u) du$, $\bar{q}_k(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sa} q_k(u) du$

Laplace-transzformáltakat, akkor egyrészt $\bar{Q}(s,z)=\sum_{k=2}^{\infty}\bar{q}_k(s)z^k$ és (7) alapján

$$\bar{q}_k(s)=\bar{a}(s)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}(-1)^{k-1}\Phi^{(k-1)}(cs+\lambda)+\bar{q}_3(s)\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}(-1)^{k-2}\Phi^{(k-2)}(cs+\lambda)+$$

$$+\ldots+\bar{q}_k(s)\frac{\lambda}{1!}(-1)^1\Phi^{(1)}(cs+\lambda)+\bar{q}_{k+1}(s)\Phi(cs+\lambda),$$

továbbá

$$\bar{Q}(s,z)=\left[\bar{a}(s)\frac{\lambda}{1!}(-1)^1\Phi^{(1)}(cs+\lambda)+\bar{q}_3(s)\Phi(cs+\lambda)\right]z^2+$$

$$+\left[\bar{a}(s)\frac{\lambda^2}{2!}(-1)^2\Phi^{(2)}(cs+\lambda)+\bar{q}_3(s)\frac{\lambda}{1!}(-1)^1\Phi^{(1)}(cs+\lambda)+\bar{q}_4(s)\Phi(cs+\lambda)\right]z^3+$$

$$+[\ldots]z^4+\ldots.$$

Az összegezési sorrend felcserélésével nyerjük, hogy

$$\bar{Q}(s,z)=\bar{a}(s)z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}(-1)^k\Phi^{(k)}(cs+\lambda)+\bar{q}_3(s)z^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}(-1)^k\Phi^{(k)}(cs+\lambda)+$$

$$+\ldots+\bar{q}_k(s)z^{k-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}(-1)^k\Phi^{(k)}(cs+\lambda)+\ldots.$$

Itt most a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}(-1)^k\Phi^{(k)}(cs+\lambda)$ sor a $\Phi[cs+\lambda(1-z)]$ függvény z hatványai szerint haladó *Taylor*-sora, ennek következtében

$$\bar{Q}(s,z)=z\bar{a}(s)\{\Phi[cs+\lambda(1-z)]-\Phi(cs+\lambda)\}+\Phi[cs+\lambda(1-z)]\sum_{k=3}^{\infty}\bar{q}_n(s)z^{n-1}=$$

$$=z[\bar{a}(s)-\bar{q}_2(s)]\Phi[cs+\lambda(1-z)]-z\bar{a}(s)\Phi(cs+\lambda)+\frac{1}{z}\Phi[cs+\lambda(1-z)]\bar{Q}(s,z),$$

s innen

$$\text{(8)}\qquad \bar{Q}(s,z)=\frac{z^2\lambda\bar{p}_0^*(s)\Phi[cs+\lambda(1-z)]-z^2\Phi(cs+\lambda)[\lambda\bar{p}_0^*(s)+\bar{q}_2(s)]}{z-\Phi[cs+\lambda(1-z)]}.$$

(8)-ban még ismeretlen a $q_2(s)$. Ennek meghatározásánál felhasználhatjuk azt a tényt, hogy $\bar{Q}(s,z)$, $\operatorname{Re} s>0$ mellett a $|z|<1$ egységkörben analitikus függvény. Ennélfogva (8) jobb oldala nevezőjének a $|z|<1$ körbe eső zérushelyei szükségképpen a számláló zérushelyei is. Már említettük, hogy $w=\Gamma(s)$ a

$$\Phi[s+\lambda(1-w)]=w$$

egyenlet egyetlen létező megoldása. Emiatt a (8) jobb oldala nevezőjének egyetlen, a $|z|<1$ egységkörbe eső zérushelye $z=\Gamma(cs)$. Mármost innen számításokkal azt kapjuk, hogy

$$\bar{q}_2(s) = \lambda \bar{p}_0^*(s) \frac{\Gamma(cs) - \Phi(cs+\lambda)}{\Phi(cs+\lambda)} = \varrho\psi_c(s) \frac{\Gamma(cs) - \Phi(cs+\lambda)}{\Phi(cs+\lambda)}$$

és

$$\bar{Q}(s, z) = \varrho z^2 \psi_c(s) \frac{\Phi[cs+\lambda(1-z)] - \Gamma(cs)}{z - \Phi[cs+\lambda(1-z)]}.$$

Az $R(z) = \sum_1^\infty P_k z^k$ generátorfüggvény

$$R(z) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^{\frac{y}{c}} P(x, y, z)[1-F(x)]dx[1-H(y)] \right\} dy = \int_0^\infty U(y, z)[1-H(y)]dy$$

alakba írható. (6) szerint

$$U(y, z) = \int_0^{\frac{y}{c}} e^{-\lambda(1-z)x} \left\{ \lambda p_0^*(y-cx)z + \frac{1}{z} Q(y-cx, z) \right\} [1-F(x)]dx =$$

$$= \int_0^y e^{-\lambda(1-z)\frac{w}{c}} \left\{ \lambda p_0^*(y-w)z + \frac{1}{z} Q(y-w, z) \right\} \left[1 - F\left(\frac{w}{c}\right) \right] \frac{dw}{c}$$

s innen

$$\bar{U}(s, z) = \int_0^\infty e^{-sy} U(y, z) dy =$$

$$= \left\{ \varrho\psi_c(s) + \varrho z \psi_c(s) \frac{\Phi[cs+\lambda(1-z)] - \Gamma(cs)}{z - \Phi[cs+\lambda(1-z)]} \right\} \frac{1 - \Phi[cs+\lambda(1-z)]}{cs+\lambda(1-z)} = \tag{9}$$

$$= \varrho\psi_c(s) z \frac{z - \Gamma(cs)}{z - \Phi[cs+\lambda(1+z)]} \cdot \frac{1 - \Phi[cs+\lambda(1-z)]}{cs+\lambda(1-z)}.$$

Eredményünket a következő tételben foglalhatjuk össze:

3. TÉTEL. *A 2. tétel feltételei mellett az* $R(z) = \sum_1^\infty P_k z^k$ *generátorfüggvény*

$$R(z) = \int_0^\infty U(y, z)[1-H(y)]dy$$

alakban adható meg, ahol az $\bar{U}(s, z) = \int_0^\infty e^{-su} U(u, z) du$ *transzformáltat a* (9) *formula szolgáltatja.*

4. PÉLDA. Elemezzük most az

$$F(x) = 1-e^{-\mu x}, \quad H(x) = 1-e^{-\alpha x}, \quad G(x) = 1-e^{-\beta x}$$

esetet. Ekkor

$$\Phi(s) = \frac{\mu}{\mu+s}, \quad \Gamma(s) = \frac{\mu+\lambda+s-\sqrt{(\lambda+s-\mu)^2+4s\mu}}{2\lambda},$$

$$\psi_c(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda[1-\Gamma(cs)]} = \frac{2\lambda}{\lambda+(2-c)s-\mu+\sqrt{(\lambda+cs-\mu)^2+4cs\mu}},$$

és

$$\varrho = \frac{1}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{c\alpha}+\frac{c-1}{c\lambda}\psi_c(\alpha)}.$$

Az $R(z)$ generátorfüggvény pedig

$$R(z) = \bar{U}(\alpha, z) = \varrho\psi_c(\alpha)z\cdot\frac{\Gamma(c\alpha)-z}{\lambda z^2-(\mu+c\alpha+\lambda)z+\mu}$$

alakú, míg a π_i-valószínűségek az alábbiak lesznek:

$$\pi_1 = R(1) = \bar{U}(\alpha, 1) = \varrho\psi_c(\alpha)\frac{1-\Gamma(c\alpha)}{c\alpha},$$

$$\pi_2 = \frac{\varrho}{\beta}, \quad \pi_3 = \varrho\frac{1}{\lambda}\psi_c(\alpha).$$

A $c=1$ esetben

$$\varrho = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \quad \pi_1 = \lambda\pi_3\frac{1-\Gamma(\alpha)}{\alpha}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{2}{\lambda+\alpha-\mu+\sqrt{(\lambda+\alpha-\mu)^2+4\alpha\mu}}$$

és

$$R(z) = \lambda\pi_3 z\frac{\Gamma(\alpha)-z}{\lambda z^2-(u+\alpha+\lambda)z+\mu} = \pi_3 z\frac{\Gamma(\alpha)-z}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

ahol $$z_1 = \frac{\lambda+\alpha+\mu+\sqrt{(\lambda+\alpha-\mu)^2+4\alpha\mu}}{2\lambda} > 1, \text{ és } z_2 = \Gamma(\alpha).$$

Végeredményben tehát

$$R(z) = \pi_3\frac{z}{z_1-z} = \pi_3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z_1}\right)^k z^k,$$

és így

$$P_k = \pi_3\left(\frac{1}{z_1}\right)^k, \qquad (k \geqq 1).$$

5. AZ $\eta_i = T$ (KONSTANS) ESET VIZSGÁLATA $c=1$ ÉS $T\to\infty$ MELLETT. Legyen $c=1$ és

$$H(y)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad y<T\\ 1, & \text{ha} \quad y\geqq T.\end{cases}$$

Ekkor

$$R(z)=\int_0^T U(y\,z)=V(T,z).$$

Vizsgáljuk most a $P_0+R(z) = V(T,z)$ viselkedését $T\to\infty$ esetén. (9) és

$$\frac{1}{s}s\psi_c(s)=\frac{1}{s}\frac{\lambda}{1-\lambda\frac{\Gamma(cs)-1}{s}}$$

alapján következik, hogy $s\to 0$ mellett

$$\bar{U}(s,z)\sim\frac{1}{s}\varrho\frac{\lambda}{1-\lambda\Gamma'(0)}\cdot\frac{1-\Phi(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)}z\frac{z-1}{z-\Phi[\lambda(1-z)]}.$$

Minthogy

$$-\Gamma'(0)=\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda};\qquad \frac{\lambda}{1-\lambda\Gamma'(0)}=\lambda P_0,$$

ezért

$$\bar{U}(s,z)\sim\frac{1}{s}\varrho\lambda P_0\frac{1-\Phi[\lambda(1-z)]}{\lambda(1-z)}z\frac{z-1}{z-\Phi[\lambda(1-z)]}.$$

Innen egy *Tauber*-féle tétel értelmében ([10] 4. tétel 192. old.) következik, hogy $T\to\infty$ mellett

$$V(T,z)\sim T\varrho(T)P_0\frac{1-\Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)]-z}z.$$

Mivel pedig

$$\varrho(T)=\frac{1}{\int_0^\infty[1-G(u)]du+T},$$

így végül is

$$\lim_{T\to\infty}[P_0+V(T,z)] = P_0\left[1+\frac{1-\Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)]-z}z\right] = P_0\frac{(1-z)\Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)]-z} \tag{10}$$

A vizsgált $c=1$ és $T\to\infty$ határeset lényegében azt jelenti, hogy a készülék abszolút megbízható. Éppen ezért (10) megegyezik TAKÁCS L. [6] 72 old. (67)-es eredményével.

IRODALOM

[1] Гнеденко, Б. В.—Беляев, Ю. К.—Коваленко, И. Н.: Основные направления исследований в теории массового обслуживания, Труды I-го Всесоюзного Совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс (1962) 341—356.

[2] Марьянович, Т. П.: Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться, Укр. Мамем. Ж. XII, № 3, (1960).

[3] Севастьянов, Б. А.: Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами, *Теор. вер. и ее примен.* 2, I, (1957).

[4] SMITH, W. L.: Regenerative stochastic processes, *Proc. Roy. Soc.*, ser. A **232** (1955), 6—31.

[5] SMITH, W. L.: Renewal theory and its ramifications, *Journal of the Royal Stat. Society*, B. **20** (1955), No 2.

[6] TAKÁCS, L.: *Introduction to the Theory of Queues*, New York, Oxford University Press (1962).

[7] TOMKÓ, J.: Однолинейная система массового обслуживания с учетом ненадежности прибора, *Труды Мат. институра АН Венгрии* Т. IX, серия A, выпуск 1—2, (1964).

[8] TOMKÓ J.: Стационарное распределение длины очереди в однолинейной системе с учетом ненадежности прибора, *Труды Мат. инс.-та АН Венгрии* Т. IX, серия A, выпуск 3, (1964).

[9] Хинчин, А. Я.: *Работы по математической теории массового обслуживания*, Москва (1963).

[10] WIDDER, D. W.: *The Laplace Transform*, Princeton (1941).

(Beérkezett: 1965. V. 3.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ÉS STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSEK (III)*

Írta: ULF GRENANDER

6. fejezet

A REGRESSZIÓ PROBLÉMÁJA

6. 1. Regresszió a függvénytérben. A hipotézisvizsgálaton és a becslés problémáján kívül röviden foglalkozni kívánunk még a statisztikai következtetések két más típusú feladatával, és meg fogjuk mutatni, hogy vissza lehet őket vezetni a regresszió elméletére, amely a matematikai statisztikának régóta jól kidolgozott fejezete. Ezekkel a feladatokkal kapcsolatban gyakran lesz dolgunk feltételes valószínűségeloszlásokkal; minden esetben fel fogjuk tételezni, — amint ezt néhányszor eddig is tettük —, hogy ezeket a feltételes eloszlásokat úgy lehet definiálni, hogy 1 valószínűséggel valószínűségeloszlások legyenek.

Tegyük fel, hogy ismerjük az $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak a T időszakaszban megfigyelt értékeit, és ezeknek az adatoknak az alapján akarunk valamilyen következtetést levonni egy olyan y valószínűségi változóra, amely valószínűségi kapcsolatban áll az $x(t)$ folyamattal. Tegyük fel, hogy eleve ismerjük az $\{y, x(t);\, t \in T\}$ együttes valószínűségeloszlást, amely ezt a statisztikai kapcsolatot meghatározza. A folyamat észlelt realizációját ω-val jelölve, bevezetjük az y mennyiség $P\{y|\omega\}$ feltételes valószínűségeloszlását. Ha ilyen esetben az ω realizáció ismerete alapján ki akarunk jelölni y számára valamilyen valószínű értéket, közelfekvő e célra a $P(y|\omega)$ eloszlásnak egy centrális értékét választani. Ha y-nak létezik véges várható értéke, akkor célszerű y becsléseként az

$$y^* = \mathbf{E}[y|\omega]$$

feltételes várható értéket tekinteni. Ahhoz, hogy továbbjuthassunk, konkretizálnunk kell, milyen valószínűségeloszlásokat akarunk tekintetbe venni. Tegyük fel, hogy tudomásunk van róla, hogy a folyamat és az y valószínűségi változó normális eloszlásúak zérus átlaggal (az együttes eloszlást is beleértve), és hogy $x(t)$ középben folytonos. Jelöljük az $x(t)$, $t \in T$, folyamat által generált Hilbert-teret a szokásos módon $L_2(X)$-szel, és ezen tér projekciós operátorát $P_{L_2(X)}$-szel. Legyen

$$y_1 = P_{L_2(X)} y$$

és

$$y = y_1 + z.$$

* Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Matematik*, **1** (1950), 195—277. A fordítás első része az *MTA III. Oszt. Közl.*, **15** (1965), 51—87. oldalán, a második rész a 125—164. oldalakon jelent meg.

Ekkor $z \perp x(t)$, $t \in T$, tehát z és $x(t)$ függetlenek egymástól, mert az összes tekintetbe veendő valószínűségeloszlások normálisak. Ezért majdnem biztosan

$$\mathbf{E}[y|\omega] = \mathbf{E}[y_1|\omega] + \mathbf{E}[z|\omega] = y_1(\omega) + \mathbf{E}z = y_1(\omega).$$

De y_1 felfogható, mint az $L_2(X)$ térnek az $\|y-x\|$ kifejezést minimálissá tevő pontja. Ezért ésszerűnek látszik y_1-et az y becslésének tekinteni még abban az esetben is, amikor a valószínűségeloszlásokról semmit sem tudunk. Az $\|y-x\|$ kifejezést minimalizáló y_1 mennyiségnek az $\mathbf{E}[y|\omega]$ feltételes várható értékkel való egybeesése egyszerűen annak a ténynek az általánosításaként tekinthető, hogy a többdimenziós normális eloszlások esetében a regresszió mindig lineáris.

6. 2. Előrejelzés mint regresszió-probléma. Tegyük fel, hogy $x(t)$ mindazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, amelyeket az előző szakaszban feltételeztünk, és hogy normális eloszlású. Vegyük y valószínűségi változónak az $x(c)$ értéket, ahol $c \notin T$. Azt a feladatot, hogy $x(c)$-re becslést adjunk $x(t)$, $t \in T$ alapján, az előrejelzés, vagy extrapoláció feladatának nevezik. A 6.1. szakasz eredményeit közvetlenül alkalmazhatjuk erre a problémára. Állítsuk elő az $x(t)$ folyamatot (amint az előzőkben ezt már többször tettük) az alábbi átlagban konvergens sor alakjában:

$$x(t) = \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu(t)}{\sqrt{\lambda_\nu}}, \quad t \in T,$$

(az itt szereplő mennyiségek jelentését lásd az 1. 3. pontban). Könnyen belátható, hogy $L_2(X)$ itt egybeesik a z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ortonormált vektorrendszerre kifeszített Z térrel, tehát a folyamatnak a c időpontra való előrejelzéséhez csupán az

$$x^*(c) = P_Z x(t) = \sum_1^\infty z_\nu \mathbf{E} z_\nu x(c)$$

sort kell képezni. De

$$\mathbf{E} z_\nu x(c) = \sqrt{\lambda_\nu}\, \mathbf{E} x(c) \int_T x(t) \varphi_\nu(t)\, dt = \sqrt{\lambda_\nu} \int_T r(c,t) \varphi_\nu(t)\, dt,$$

és mivel $s \in T$ esetén

$$\lambda_\nu \int_T r(s,t) \varphi_\nu(t) dt = \varphi_\nu(s),$$

ezért természetes feltevés, hogy

$$\mathbf{E} z_\nu x(c) = \frac{\varphi_\nu^*(c)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

ahol a $\varphi_\nu^*(c)$ kifejezések a folyamathoz tartozó $r(s, t)$ magú integrálegyenlet sajátfüggvényeinek a c pontig vett folytatásai. Így tehát a legjobb előrejelzést az

$$x^*(c) = \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu^*(c)}{\sqrt{\lambda_\nu}}$$

képlettel adhatjuk meg. Az $x^*(c)$ becslésnek ez az előállítása, amely abból indul ki, hogy a legjobb előrebecslést az $L_2(X)$ térnek y-hoz legközelebb eső pontja adja, KARHUNEN-től származik. Az egyik irányban végtelen $T=(-\infty, a)$ intervallumon megfigyelt stacionárius folyamat fontos esetére WIENER [1] dolgozott ki olyan speciális módszert, amellyel ténylegesen meg lehet szerkeszteni a legjobb lineáris előrebecslést.

6. 3. Példa. Ha a folyamat nem normális eloszlású, akkor a legjobb lineáris előrebecslés általában nem esik egybe a feltételes valószínűségeloszlás várható értékével. Vizsgáljuk azt a nem-normális eloszlású egyszerű folyamatot, amellyel már a 4.11. szakaszban foglalkoztunk. Legyen $T=(a, b)$, ekkor $x(c)$ számára a következő feltételes eloszlásfüggvényt kapjuk:

$$F(x|\omega) = e^{-\beta(b-c)}\varepsilon[x-x(b)]+[1-e^{-\beta(b-c)}]\Phi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ a normális eloszlásfüggvény. A feltételes várható érték tehát

$$\mathbf{E}[x(c)|\omega] = x(b)e^{-\beta(b-c)},$$

ez pedig azonos azzal az eredménnyel, amit a legjobb lineáris előrebecslés megszerkesztése útján kaptunk volna.

6. 4. Előrejelzési tartományok. Egyes esetekben az lehet kívánatos, hogy a folyamatnak későbbi időpontokban felvett értékei számára ne egyetlen pontot, hanem egy *tartományt* adjunk meg, amelybe ezek az értékek várhatóan esni fognak. A kérdésnek ilyen módon való felvetése teljesen analóg a konfidencia tartományok alkalmazásával a becsléselméletben (lásd a 2. 3. pontot).

Tegyük fel, hogy valamilyen folyamatot az (a, b) időszakasz folyamán megfigyeltünk, és jelöljük az észlelt realizációt $\omega_{a,b}\in\Omega_{a,b}$-vel. A folyamat (c, d) intervallumához tartozó összes $\omega_{c,d}$ realizációinak $\Omega_{c,d}$ terében meg akarunk határozni egy olyan π tartományt (amely $\omega_{a,b}$-től függ), hogy ésszerűen elvárható legyen az $\omega_{c,d}$ realizációnak ebbe a π tartományba való esése, vagyis olyan π tartományt akarunk meghatározni, amelyre a $P(\pi|\omega_{a,b})$ feltételes valószínűség lehetőleg nagy. Hogy két különböző tartomány közül választani tudjunk, bevezetünk egy m mértéket Ω-ban úgy, hogy $\Omega_{c,d}$ véges m-mértékű halmazok legfeljebb megszámlálható összege legyen. Rögzített $\omega_{a,b}$ esetén a

$$P(S|\omega_{a,b}); \quad S\subset\Omega_{c,d},$$

feltételes valószínűség 1 valószínűséggel valószínűségeloszlás. Az additív halmazfüggvények felbontására vonatkozó LEBESGUE-tételnek megfelelően

$$P(S|\omega_{a,b}) = P(XS|\omega_{a,b})+\int_S f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})dm(\omega_{c,d}),$$

ahol $X=X(\omega_{a,b})$ a feltételes eloszlás szinguláris része. Keresünk egy $\pi\in\Omega_{c,d}$ halmazt, amelyre rögzített $m(\pi)$ esetén $P(\pi|\omega_{a,b})$ maximális. Ez a feladat formálisan megegyezik azzal, amelyet a 4.1. szakaszban vizsgáltunk, és az ottani eredménynek megfelelően

$$\pi = X(\omega_{a,b})+\{f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})\geqq k\}_{\omega_{c,d}}\subset\Omega_{c,d},$$

ahol a k állandót úgy kell megállapítani, hogy $m(\pi)$ a megadott értékű legyen. *A π tartományt a legjobb előrejelzés tartományának nevezik m-re nézve; amint láttuk, elő lehet állítani a maximum likelihood módszer egy egyszerű változata segítségével.*

A legjobb előrejelzés ilyen módon kapott tartománya nyilvánvalóan függ a választott m mértéktől. Markov-folyamatok esetére megmutatjuk e mérték megválasztásának két lehetséges módját.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $x(n)$ stacionárius, normális Markov-folyamat zérus átlaggal és 1 szórással, és a folyamatot az egész számú $(\dots, -1, 0, 1, \dots)$ időpontokban figyeljük meg. A korrelációs függvény ebben az esetben

$$r(n) = e^{-\beta|n|}, \qquad \beta > 0$$

alakú (a $\beta = 0$ és $\beta = \infty$ triviális esetekkel nem foglalkozunk). Legyen

$$(a, b) = (-N, -N+1, \dots, 0)$$

és a (c, d) intervallum álljon az egyetlen $t = \tau > 0$ pontból. Mivel Markov-folyamattal van dolgunk, azért adott $x(-N), x(-N+1), \dots, x(0)$ esetén $x(\tau)$ feltételes valószínűsége csupán $x(0)$-tól függ. Legyen m a $-\infty < x(\tau) < \infty$ tengelyen értelmezett Lebesgue-mérték. Szinguláris X-rész ebben az esetben nincsen, és

$$f = ce^{-\frac{1}{2}\frac{[x(\tau)-e^{-\beta\tau}x(0)]^2}{1-e^{-2\beta\tau}}}.$$

Így tehát a legjobb előrejelzés tartományát itt a

$$-k < x(\tau) - e^{-\beta\tau}x(0) < k$$

egyenlőtlenségek adják meg. Ha a (c, d) intervallum nem egyetlen pontból állna, hanem pl. a $(\tau, \tau+1, \dots, \tau+\nu)$ pontokat foglalná magában, akkor ugyanilyen meggondolással az $x(\tau), x(\tau+1), \dots, x(\tau+\nu)$ koordináták által meghatározott euklideszi térnek egy $(\nu+1)$-dimenziós ellipszoidját kapnánk. Ilyen előrejelzési tartomány azonban az alkalmazások céljaira nem előnyös, helyette célszerűbb a $\{a_\mu < x(\tau+\mu) < b_\mu;\ \mu = 0, 1, \dots, \nu\}$ $(\nu+1)$-dimenziós intervallumokra szorítkozni, és megkísérelni közülük olyan intervallum kiválasztását, amelynek rögzített LEBESGUE-térfogat esetén legnagyobb a feltételes valószínűsége. Könnyű belátni, hogy ekkor a feltételes valószínűség-sűrűség

$$f = ce^{-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\nu}\frac{(y_{i+1}-\varrho_i y_i)^2}{1-\varrho_i^2}},$$

ahol

$$\begin{cases} y_0 = x(0) \\ y_i = x(\tau+i-1), & i = 1, 2, \dots, \nu+1 \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \varrho_0 = e^{-\beta\tau} \\ \varrho_i = e^{-\beta}, & i = 1, 2, \dots, \nu. \end{cases}$$

A problémát tehát visszavezettük olyan, rögzített térfogatú $(\nu+1)$-dimenziós intervallum kikeresésére, amelynek a legnagyobb a valószínűsége az adott sűrűségfüggvényre nézve.

Az m mérték megválasztásának más lehetősége, hogy $\Omega_{c,d}$-ben a P abszolút (nem feltételes) valószínűséget vesszük m-nek. Vizsgáljunk megint egy diszkrét időparaméterű folyamatot és egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az eloszlás folytonos típusú. Ha $S \subset \Omega_{c,d}$, akkor ebben az esetben

$$\begin{cases} P(S|\omega_{a,b}) = \int\limits_S f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})dv \\ P(S) = \int\limits_S f(\omega_{c,d})dv, \end{cases}$$

ahonnan a P-mértékre nézve legjobb alábbi π előrejelzési tartományt kapjuk:

$$\pi = \left\{\frac{f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})}{f(\omega_{c,d})} \geqq k\right\} = \left\{\frac{f(\omega_{a,b})f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})}{f(\omega_{a,b})f(\omega_{c,d})} \geqq k\right\} =$$

$$= \left\{\frac{f(\omega_{a,b};\, \omega_{c,d})}{f(\omega_{a,b})f(\omega_{c,d})} \geqq k\right\} = \{f(\omega_{a,b}|\omega_{c,d}) \geqq kf(\omega_{a,b})\} \subset \Omega_{c,d}.$$

Így tehát adott $\omega_{a,b}$ esetén a $\pi(\omega_{a,b})$ tartományt úgy kapjuk, hogy $\Omega_{c,d}$-ben kiválasztunk olyan pontokat, amelyekben az $f(\omega_{a,b}|\omega_{c,d})$ feltételes sűrűség nagy.

Tekintsük példaként a fentebb vizsgált Markov-folyamatot. Ugyanolyan jelölésekkel

$$f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b}) = ke^{-\frac{1}{2}\sum\limits_0^v \frac{(y_{i+1}-\varrho_i y_i)^2}{1-\varrho_i^2}}$$

$$f(\omega_{c,d}) = k_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}\sum\limits_1^v \frac{(y_{i+1}-\varrho_i y_i)^2}{1-\varrho_i^2}}$$

és

$$\frac{f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})}{f(\omega_{c,d})} = k_2 e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(y_1-\varrho_0 y_0)^2}{1-\varrho_0^2} - y_1^2\right\}}.$$

Ezek szerint a jelen esetben

$$\pi = \{|x(\tau) - e^{\beta\tau}x(0)| < k\}.$$

Ez a tartomány különbözik a Lebesgue-mértékre nézve legjobb előrejelzési tartománytól annyiban is, hogy az $x(\tau+1), \ldots, x(\tau+v)$ értékeket semmiképpen sem korlátozza.

6. 5. Szűrés mint regresszió-probléma. Végezetül alkalmazni akarjuk a 6. 1. szakaszban ismertetett módszert a stacionárius folyamatok szűrésének problémájára. Ezt a feladatot részletesen vizsgálja WIENER [1], azonban csupán „egyoldalú szűrőkkel" foglalkozik, vagyis olyan szűrőkkel, amelyek csak a „múlt"-tól függnek. Noha ez sok műszaki alkalmazás számára természetes feltevés, elgondolható, hogy a matematikai statisztikában előforduló észlelési sorozatok szűrése esetén nincsen semmi okunk csupán a folyamat múltban észlelt értékeinek a használatára szorítkozni. Ennek megfelelően azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a realizációt olyan időintervallumban ismerjük, amelyet végtelen hosszúnak lehet tekinteni a folyamat effektív spektrum-szélessége által meghatározott természetes időegységhez képest.

Akár normális eloszlásúnak tételezzük fel a folyamatot és a feltételes valószínűségeloszlásoknak megfelelő várható értéket vesszük, akár pedig a legjobb lineáris szűrőt határozzuk meg, formálisan ugyanazt az eredményt kapjuk. Legyen $y(t)$ egy stacionárius folyamat zérus átlaggal és

$$r_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_y(\lambda) d\lambda$$

korrelációs függvénnyel, ahol $f_y(\lambda)$ az egész $(-\infty, \infty)$ tengelyen integrálható nemnegatív függvény. Az $y(t)$ folyamat legyen $\delta(t)$ additív zajjal eltorzítva; ez utóbbi legyen szintén stacionárius folyamat zérus átlaggal és

$$r_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_\delta(\lambda)\, d\lambda$$

korrelációs függvénnyel. Észleljük az $x(t) = y(t)+\delta(t)$ folyamatot. Tegyük fel először, hogy a zaj nem koherens, vagyis $\delta(t)$ és $y(t)$ között nincs kölcsönös korreláció. Becslést kívánunk adni $y(t)$-re $x(t)$-nek $-\infty < t < \infty$ folyamán észlelt értékei alapján. Tekintsük a lineáris kombinációk alábbi sorát:

$$z_n = \sum_1^n c_i^{(n)} x(t_i^{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_1^n c_i^{(n)} e^{it_i^{(n)}} dZ(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(\lambda) dZ(\lambda),$$

ahol $Z(\lambda)$ az $x(t)$-hez tartozó ortogonális (korrelálatlan növekményű) folyamat (lásd az 1. 3. pontot). Annak, hogy a z_n sorozat átlagban konvergáljon egy $z \in L_2(X)$ elemhez, szükséges és elegendő feltétele, hogy $\gamma_n(\lambda)$ átlagban konvergáljon egy $\gamma_n(\lambda) \in L_2(F)$ függvényhez, ahol

$$F(\lambda) = \mathbf{E}|Z(\lambda)|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} [f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)\, d\lambda$$

és

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) dZ(\lambda).$$

A 6.1. pontban ismertetett módszernek megfelelően az $y(T)$ mennyiség becsléseként a $z = P_{L_2(X)} y(T)$ kifejezést választjuk, amely minimálissá teszi a $\|z-y(T)\|$ „távolságot" a $z \in L_2(X)$ mellékfeltétellel. De

$$z-y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dZ_y(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dZ_\delta(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iT\lambda} dZ_y(\lambda),$$

tehát

$$\|z-y(T)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda) - e^{iT\lambda}|^2 f_y(\lambda)\, d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 f_\delta(\lambda) d\lambda.$$

Azonban az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|\gamma(\lambda)-e^{iT\lambda}|^2 f_y(\lambda)+|\gamma(\lambda)|^2 f_\delta(\lambda)\}\,d\lambda$$

mennyiség értéke akkor minimális, ha

$$\gamma(\lambda)=\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\,e^{iT\lambda},$$

mert minden λ-ra $\gamma(\lambda)$-nak éppen ez az értéke teszi az integrál alatti kifejezést minimummá. Ez a $\gamma(\lambda)$ továbbá $L_2(F)$ eleme, mert $|\gamma(\lambda)|\leqq 1$. Ilyen szűrővel a hiba négyzetes átlagát a

$$\|z-y(T)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(\lambda)f_\delta(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\,d\lambda$$

kifejezés adja meg. A legjobb szűrő tehát az

$$y^*_{\text{opt}}(T)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\,e^{iT\lambda}dZ(\lambda)$$

képletnek felel meg. Előfordulhat, hogy ez a kifejezés túlságosan bonyolult; ez esetben meg lehet kísérelni $y^*_{\text{opt}}(T)$ approximálását egyszerűbb kifejezésekkel. Nyilvánvaló, hogy ez egyenértékű az $\dfrac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}$ függvény megközelítésének feladatával az f_y+f_δ súlyfüggvény által megadott négyzetes metrikájú függvénytérben. Ha például

$$\sum_1^N c_\nu e^{ia_\nu\lambda_\nu}\sim\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}$$

alakú approximációt alkalmazunk úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_1^N c_\nu e^{ia_\nu\lambda}-\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\right|^2[f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)]\,d\lambda<\varepsilon$$

legyen, akkor egy „majdnem legjobb" $y^*_{\text{appr}}(T)$ szűrőt kapunk:

$$y^*_{\text{appr}}(T)=\sum_1^N c_\nu x(T+a_\nu),$$

amelyre

$$\|y^*_{\text{opt}}(T)-y^*_{\text{appr}}(T)\|^2<\varepsilon.$$

6. 6. Egy általánosabb szűrési probléma. Vizsgáljuk most a következő esetet, amely teljesen analóg a véges dimenziójú térre vonatkozó szokásos regressziós feladattal. Legyenek $x(t)$ és $y(t)$ stacionárius folyamatok az

$$\begin{cases} r_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_x(\lambda)\, d\lambda \\ r_y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda \end{cases}$$

korrelációs függvényekkel. Tegyük fel, hogy az

$$r_{yx}(t) = E\overline{y(s)}\, x(s+t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha} f_{yx}(\lambda)\, d\lambda$$

kölcsönös korrelációs függvény által meghatározott stacionárius valószínűségi kapcsolatban állnak. Ez a kifejezés azt az egyetlen korlátozást feltételezi, hogy a kölcsönös korrelációs függvénynek abszolút folytonos spektruma van.

Becslést keresünk $y(T)$ értékére az $x(t)$ folyamatra ható lineáris szűrő alakjában. Legyen

$$y^*(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dZ_x(\lambda),$$

akkor

$$\|y^*(T) - y(T)\|^2 = \|y^*(T)\|^2 + \|y(T)\|^2 - 2\mathrm{Re}\mathrm{E} y^*(T)\overline{y(T)} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 f_x(\lambda)\, d\lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_y(\lambda)\, d\lambda - 2\mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) e^{-iT\lambda} f_{yx}(\lambda)\, d\lambda.$$

Könnyen belátható, hogy a

$$\|y^*(T) - y(T)\|$$

négyzetes középhiba akkor lesz a legkisebb, ha a $\gamma(\lambda)$ függvényt a következőképpen választjuk:

$$\gamma^*(\lambda) = \frac{\bar{f}_{yx}(\lambda)}{f_x(\lambda)} e^{iT\lambda}.$$

Ugyanis nyilvánvalóan

$$2\mathrm{Re}\, \gamma e^{-iT\lambda} f_{yx} \leqq 2|\gamma \sqrt{f_x}| \left| \frac{f_{yx}}{f_x} \right| \leqq |\gamma|^2 f_x + \frac{|f_{yx}|^2}{f_x},$$

amiből következik, hogy

$$|\gamma|^2 f_x - 2\mathrm{Re}\, \gamma e^{-iT\lambda} f_{yx} \geqq -\frac{|f_{yx}|^2}{f_x};$$

azonban a

$$\gamma^*(\lambda) = \frac{\bar{f}_{yx}(\lambda)}{f_x(\lambda)} e^{iT\lambda}$$

választott becslésünk következtében érvényes a

$$|\gamma^*(\lambda)|^2 f_x(\lambda) - 2\mathrm{Re}\,\gamma^*(\lambda)e^{-iT\lambda} f_{yx}(\lambda) = -\frac{|f_{yx}(\lambda)|^2}{f_x(\lambda)}$$

egyenlet. A $\gamma^*(\lambda)$ függvényt lehet szűrő szerkesztésére használni, mert (lásd CRAMÉR [2], 3. tétel):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma^*(\lambda)|^2 f_x(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_{yx}(\lambda)|^2}{f_x(\lambda)} d\lambda \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_y(\lambda)d\lambda < \infty.$$

Az ilyen szűrő alkalmazásakor fellépő hiba négyzetes középértéke

$$\|y^*(T) - y(T)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x(\lambda)f_y(\lambda) - |f_{yx}(\lambda)|^2}{f_x(\lambda)} d\lambda \geqq 0.$$

A 6. 5. szakaszban tárgyalt feladat a most vizsgált feladat egy speciális esetének tekinthető. Ha ugyanis koherens zaj esetében a kölcsönös korrelációs függvény

$$r_{y\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_y(\lambda) = E\overline{y(s)}\,\delta(s+t),$$

akkor a spektrális sűrűségek a következők:

$$\begin{cases} x(t) \text{ folyamat:} & f_y(\lambda) + f_\delta(\lambda) + 2\mathrm{Re} f_{y\delta}(\lambda) \\ y(t) \text{ folyamat:} & f_y(\lambda) \\ x(t) \text{ és } y(t) \text{ kapcsolata:} & f_y(\lambda) + f_{y\delta}(\lambda). \end{cases}$$

Ekkor a szűrőfüggvény

$$\gamma^*(\lambda) = \frac{\overline{f_y(\lambda) + f_{y\delta}(\lambda)}}{f_y(\lambda) + f_\delta(\lambda) + 2\,\mathrm{Re} f_{y\delta}(\lambda)} e^{iT\lambda}.$$

Látható tehát, hogy $f_{y\delta} = 0$ esetén a korábban kapott eredményhez jutunk.

Megjegyezzük még, hogy ha a T értéket paraméternek tekintjük, akkor az így kapott szűrők az $x(t)$ folyamat stacionárius lineáris transzformációinak felelnek meg KARHUNEN [2] definíciója értelmében.

A. M. JAGLOM KIEGÉSZÍTÉSE U. GRENANDER „SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ÉS STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSEK" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

A következő kiegészítésben utalunk néhány, az utóbbi években megjelent munkára, amelyeknek a tárgya szoros kapcsolatban van GRENANDER munkájának a tartalmával. Irodalmi utalásaink, és még kevésbé az idézett konkrét eredmények nem tartanak igényt a teljességre; csupán arra törekedtünk, hogy az olvasónak segítséget nyújtsunk mind magában a GRENANDER-féle dolgozatban való tájékozódáshoz, mind pedig az alkalmazások és a dolgozatban foglalt gondolatok továbbfejlesztése tekintetében.

1. fejezet

A sztochasztikus folyamatok matematikai elméletének kimerítő és korszerű tárgyalását foglalja magában DOOB részletes monográfiája [1*].

3. fejezet

Rámutatunk még egy, a sztochasztikus folyamatok elméletének korszerű műszaki alkalmazásaiban nagyon fontos koordináta-típusra. Legyen $x(t)$ olyan stacionárius sztochasztikus folyamat, amelynek $F(\lambda)$ spektrálfüggvénye azonosan állandó a $|\lambda| < 2\pi(W-\varepsilon)$ sávon kívül valamilyen $\varepsilon > 0$ esetében (sőt ezt a feltételt valójában még kissé gyengíteni lehet). Ebben az esetben minden rögzített t_0-ra és a folyamat majdnem minden realizációjára (vagyis egy valószínűséggel) teljesül az

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t_0 + \frac{k}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W\left(t - t_0 - \frac{k}{2W}\right)}{2\pi W\left(t - t_0 - \frac{k}{2W}\right)}$$

összefüggés (lásd pl. BELJAJEV [1*]), amiből következik, hogy *az $x(t)$ realizációt ekkor az egész $-\infty < t < \infty$ tengelyen teljesen meghatározza az $x_k = x\left(t_0 + \frac{k}{2W}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ megszámlálhatóan végtelen sok koordináta.* Ezt a tényt már 1933-ban észrevette KOTELNIKOV [1*] (szigorú bizonyítás nélkül); lásd még PETERSON, BIRDSALL, FOX [1*], ahol hasonló előállítás található olyan $x(t)$ folyamatokra, amelyeknek a spektruma a $2\pi W_0 < |\lambda| < 2\pi(W_0 + W)$ sávra korlátozódik. Lehet még az $x_k = x\left(t_0 + \frac{k}{2W}\right)$ koordináták helyett az $x_{2k} = x\left(t_0 + \frac{k}{W}\right)$, $x_{2k+1} = x'\left(t_0 + \frac{k}{W}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ koordinátákat is használni; még több ilyen jellegű változat létezik.

Az $x(t)$ folyamat koordinátáiként a $t_k \in T$ pontok egy megszámlálható, mindenütt sűrű halmazán vett $x(t_k)$ értékek választását illetően lásd még a STRIBEL [2*] munkájára vonatkozó megjegyzést a 4. fejezet 4. 2. szakaszához tartozó kiegészítésben.

4. fejezet

A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó statisztikai hipotézisek vizsgálatának kérdése az utóbbi években igen nagy jelentőségre tett szert a következő gyakorlati feladattal kapcsolatban. Tegyük fel, hogy valamilyen $s(t)$ „jel"-nek a jelenlétét kell megállapítani olyan megfigyelt adatok alapján, amelyek ismert valószínűségeloszlású sztochasztikus folyamatot alkotó $n(t)$ „zajjal" vannak eltorzítva. Így tehát a ténylegesen megfigyelt $x(t)$ folyamat vagy az $s(t)+n(t)$ összeggel (ha a jel valóban jelen van[1]), vagy csupán az $n(t)$ folyamattal azonos. Meg kell állapítani

[1] Csupán azzal a legegyszerűbb (és legfontosabb) esettel foglalkozunk, amikor a zaj additív, vagyis egyszerűen hozzáadódik a jel értékeihez. Elvileg természetesen semmi sem változik azokban az esetekben sem, amikor a zaj valamilyen más ismert módon torzítja el a jeleket.

az $x(t)$ folyamat egy realizációjának a véges $(0, T)$ intervallumon (vagy némely esetben megengedhető végtelen intervallum is) történő megfigyelése alapján, hogy a H_0: $x(t)=n(t)$ hipotézis igaz-e, vagy pedig a H_1: $x(t) = s(t)+n(t)$ hipotézis. Ekkor abban az esetben, amikor az $s(t)$ jelet pontosan ismerjük (vagy pedig a jel ismert valószínűségeloszlású sztochasztikus folyamat), két egyszerű hipotézis összehasonlításával van dolgunk; ha viszont a jel többféle értéket vehet fel (például egy vagy több ismeretlen paramétertől függ), akkor több alternatívát tartalmazó hipotézisvizsgálatról van szó.

Az itt leírt feladat: „jel detektálása zajháttérben", igen nagy fontosságú a gyakorlatban (elsősorban a rádiólokátorok technikájában); ezért az utóbbi években nagyon sok munka foglalkozik vele; bizonyos eredményekre a későbbiek során még visszatérünk.

Jó bevezetőül szolgálhat ebbe a feladatkörbe DAVENPORT és ROOT [1*] könyvének 14. fejezete, amely a kérdést mérnökök számára alkalmas módon tárgyalja és különösen GRENANDER jelen dolgozata 4. fejezetének jelentős részét számukra hozzáférhetővé teszi. Némileg speciálisabb jellegű PETERSON, BIRDSALL és FOX [1*] nagyobb szabású áttekintő munkája (lásd alább, a 4. 4.—4. 12. szakaszokra vonatkozó kiegészítéseket). Ide tartozik még az [1*] cikkgyűjtemény és HELSTROM [1*] monográfiája is.

4. 2. Ennek a szakasznak a fő tétele lényegileg a martingálok elméletének egyszerű következménye — erre a körülményre utal implicit módon pl. DOOB [1*] könyve VII. fejezetének 9. paragrafusában. Ugyanis teljesen világos, hogy ha a $P_1(x_1, \ldots, x_n)$ n-dimenziós eloszlás minden véges n-re abszolút folytonos a $P_0(x_1, \ldots, x_n)$ eloszlásra nézve, akkor $m>n$ esetén

$$l_n(x_1, \ldots, x_n)=M_0\left[l_m(x_1, \ldots, x_m)|x_1, \ldots, x_n\right].$$

Ebből következik, hogy az $l_1(x_1)$, $l_2(x_1, x_2), \ldots$ nem-negatív valószínűségi változók sorozata (ahol az $x_1, x_2, \ldots$ mennyiségek eloszlása P_0) martingál. Ezért az

$$l_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} l_n(\omega)$$

határérték létezése majdnem mindenütt P_0-ra nézve (tehát P_1-re nézve is), közvetlen folyománya a DOOB [1*] könyv VII. fejezete 4.1. tételének. (Ugyanennek a könyvnek a 312. oldalán levő megjegyzés szerint ezt az eredményt a szemi-martingálok konvergenciájáról szóló általános tétel alapján is le lehet vezetni a $P_1(x_1, \ldots, x_n$ eloszlás $P_0(x_1, \ldots, x_n)$-re nézve abszolút folytonosságának a feltevése nélkül is.) Ha most a P_1 eloszlás a végtelen dimenziójú Ω térben abszolút folytonos P_0-ra nézve (vagyis a 4. 2. szakasz A esete áll fenn), akkor

$$M_0 f(\omega)=M_0\frac{dP_1}{dP_0}=1 \quad \text{és} \quad \text{az} \quad l_1(\omega), l_2(\omega), \ldots, f(\omega)$$

mennyiségek martingált alkotnak; ebből a DOOB könyv ugyanezen 4.1. tétele alapján következik, hogy $l_\infty(\omega)=f(\omega)$ majdnem mindenütt P_0-ra nézve. Ezzel az A eset vizsgálata befejeződött. A B és C eseteket ezek után vissza lehet vezetni az A esetre, ahogy ezt GRENANDER teszi, de lehet a martingálok elméletét közvetlenül is alkalmazni ezekre az esetekre.

Ha $x(t)$ a véges vagy végtelen T intervallumon megadott sztochasztikus folyamat, és $x_1, x_2, \ldots$ koordinátákként számára a T-n mindenütt sűrű $D=(t_1, t_2, \ldots)$ megszámlálható halmazon felvett értékeit használjuk, akkor a fent bizonyítottakból következik, hogy (feltéve, ha az A esettel van dolgunk)

$$\lim_{n\to\infty} l_n(\omega) = \frac{dP_1^{(D)}}{dP_0^{(D)}} = f^{(D)}(\omega)$$

majdnem mindenütt $P_0^{(D)}$-re nézve, ahol $P_0^{(D)}$ és $P_1^{(D)}$ a megszámlálható dimenziójú $\Omega^{(D)} = \{x(t_1), x(t_2), \ldots\}$ tér véges dimenziós intervallumai által származtatott Borel-halmaztesten megadott mértékek. Ebből a szempontból érdekes STRIBEL [2*] egyszerű eredménye, amely szerint, ha az összes valós függvények Ω terén a *minden lehetséges* véges dimenziós intervallum által generált Borel-testen megadott, az $x(t)$ folyamathoz tartozó P_1 mérték abszolút folytonos a megfelelő P_0 mértékre nézve, akkor a D halmaz bármely választása esetén a $\frac{dP_1^{(D)}}{dP_0^{(D)}}$ derivált P_0-ra nézve majdnem mindenütt azonos a $\frac{dP_1}{dP_0}$ deriválttal. Ez az eredmény jogossá teszi az $x(t_1), x(t_2), \ldots$ koordináták használatát (ahol $(t_1, t_2, \ldots)$ tetszőleges, T-n mindenütt sűrű, megszámlálható halmaz) minden valószínűségben folytonos $x(t)$ sztochasztikus folyamat esetében.

A 4. 2. szakasz legvégén példaként szerepel az az eset, amikor az $x_1, x_2, \ldots$ koordinátákat úgy lehet megválasztani, hogy független valószínűségi változók legyenek mind a P_0, mind a P_1 valószínűségi mértékre nézve. Az erre vonatkozó megjegyzésben egy kis pontatlanság van: világos, hogy a „nulla vagy egy” törvénynek e példára való alkalmazásához még meg kell követelni, hogy az x_n mennyiség P_1-eloszlása, $P_1^{(n)}$ abszolút folytonos legyen a megfelelő P_0-eloszlásra, $P_0^{(n)}$-re nézve. Egy másik módszert annak bizonyítására, hogy az említett feltétel teljesülése esetén a végtelen dimenziójú Ω térben megadott P_1 eloszlás vagy abszolút folytonos a P_0 eloszlásra nézve, vagy pedig teljesen olyan H halmazon összpontosul, amelyre $P_0(H)=1$, már KAKUTANI [1*] alkalmazott egy viszonylag régi munkájában, amelyben egyszerű feltételt sikerült találnia az A és B eset megkülönböztetésére. Azt bizonyította ugyanis, hogy P_1 *P_0-ra nézve abszolút folytonosságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dP_1^{(n)}(x)}{dP_0^{(n)}(x)}\right]^{\frac{1}{2}} dP_0^{(n)}(x) > 0$$

egyenlőtlenség teljesüljön; ha viszont a szélsőséges szinguláris eset áll fenn, akkor az itt felírt végtelen szorzat feltétlenül nullához tart. Abban a speciális esetben, amikor mindegyik $P_0^{(n)}$, $P_1^{(n)}$ eloszlás normális, továbbá $P_0^{(n)}$ és $P_1^{(n)}$ várható értékei egyenlők, a fenti feltételt a következő alakra lehet hozni:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\sigma_0^{(n)} - \sigma_1^{(n)})^2}{\sigma_0^{(n)} \sigma_1^{(n)}} < \infty,$$

ahol $\sigma_0^{(n)}$ és $\sigma_1^{(n)}$ a $P_0^{(n)}$ és $P_1^{(n)}$ eloszlások szórásai. Könnyen érthető, hogy a normális eloszlás esetében ez utóbbi feltétel szükséges és elegendő P_1 abszolút folytonosságához P_0-ra nézve, anélkül, hogy bármit is ki kellene kötni $P_1^{(n)}$-nek $P_0^{(n)}$-re nézve való abszolút folytonosságára vonatkozóan, ha csak megállapodunk abban, hogy $\frac{(\sigma_0-\sigma_1)^2}{\sigma_0\sigma_1}=1$, amikor $\sigma_0=\sigma_1=0$ (és végtelen, ha a σ_0, σ_1 mennyiségeknek csupán az egyike nulla).

Kakutani eredményeit továbbfejlesztette Kraft [1*], aki egy végtelen dimenziós téren definiált két mérték szélsőséges szingularitásának érdekes általános feltételét fogalmazta meg, és ezt a feltételt a statisztikai hipotézisek ellenőrzésének feladatára alkalmazta. Kakutani idézett eredményével kapcsolatos egyéb munkákról lásd alább a 4. 4.—4. 12. szakaszokhoz tartozó kiegészítéseket.

4. 4. A jelek zajháttérben való felismerésének elmélete szempontjából az ebben a szakaszban tárgyalt problémát úgy lehet felfogni, mint két, ismert alakú — additív normális zajjal eltorzított — jel (amelyek közül az egyik pl. azonosan nulla is lehet) megkülönböztetésének a feladatát (vö. Davis [2*], Davenport és Root [1*], 14—15. paragrafusok). Az itt bevezetett feltétel, amely meghatározza, hogy az A reguláris esettel, vagy pedig a C szélsőséges szinguláris esettel van-e dolgunk, nyilvánvalóan következik a 4. 2. szakaszhoz tartozó kiegészítéseinkben idézett Kakutani-féle eredményből is.

Stribel [2*] munkájában az $l_n(\omega)$ és $f(\omega)$ likelihood hányadosok más alakját alkalmazza, amennyiben a folyamat koordinátáiként nem az x_ν, y_ν, $\nu=1, 2, \ldots$ mennyiségeket használja, hanem az $x(t_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots$ mennyiségeket, ahol a $(t_1, t_2, \ldots)$ megszámlálható halmaz mindenütt sűrű az (a, b) intervallumon. Ebben az esetben $l_n(\omega)$ explicit kiszámításához nem kell az $r(s, t)$-magú integrálegyenletet megoldani, azonban ehelyett invertálni kell az $\|r(t_i, t_j)\|$, $i, j=1, \ldots, n$ mátrixot, aminek a tényleges végrehajtása szintén csak kivételes esetekben lehetséges.

További, a 4. 4. szakasz tartalmával szorosan kapcsolatos eredmények találhatók Pitcher [1*], Béthoux [1*], Chover és Feldman [1*], valamint Hanen [1*, 2*] munkáiban.

4. 5.—4. 6. Ezeknek a szakaszoknak minden eredményét egészen könnyen át lehet vinni arra az esetre, amikor az $x(t)$ folyamat átlaga a H_1 hipotézis szerint több ismeretlen paramétertől függ az alábbi módon:

$$H_1\colon\ M_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i(t),$$

ahol $m_1(t), \ldots, m_n(t)$ ismert függvények (vö. például Grenander, Rosenblatt [1*], 7. fejezet; Stribel [2*].

Az egyetlen ismeretlen paramétert tartalmazó esetet:

$$H_0\colon\ M_0 x(t)=0, \qquad H_\alpha\colon\ M_\alpha x(t)=\alpha m(t),$$

$$(-\infty<\alpha<\infty)$$

részletesen tárgyalja Hájek [3*] a Hilbert-terek elmélete alapján. Kimutatja, hogy ha az összes $\Sigma c_k x_k(t)$ alakú véges lineáris kombinációk H_x halmazához hozzácsatolunk minden olyan x valószínűségi változót, amelyre fennáll, hogy valamilyen

$x_n \in H_x$, $n=1, 2, \ldots$ sorozatra minden α esetén érvényes a $\lim\limits_{n\to\infty} M_\alpha |x-x_n|^2 = 0$ összefüggés, akkor a H_0 Hilbert-térhez jutunk $\big((x, y) = M_1\, x\bar{y}$ skalár szorzattal), és minden P_α, $-\infty < \alpha < \infty$ eloszlást H_0-ban definiált eloszlásként foghatunk fel. Ekkor H_0-ban létezik olyan u valószínűségi változó, (amelyet az $M_1\big(ux(t)\big) = m(t) \cdot M_1 u^2$ összefüggés egyértelműen meghatároz), hogy az u-ra ortogonális $H_u \subset H_0$ altérben az összes P_α eloszlások pontosan egybeesnek; ebből következik, hogy $x \in H_0$ esetén az

$$f_\alpha(x) = \frac{dP_\alpha(x)}{dP_0(x)}$$

likelihood hányadost vissza lehet vezetni az $x_u = (x, u)$ mennyiségek két egydimenziós Gauss-eloszlásának a hányadosára. Világos, hogy ekkor vagy a reguláris, vagy a szélsőségesen szinguláris esettel állunk szemben, attól függően, hogy az u mennyiség szórása nullánál nagyobb-e, vagy pedig nulla; a fontos speciális esetek egész sorában találni lehet HÁJEK eredményei alapján teljesen hatékony kritériumokat a H_0 és H_α hipotézisek összehasonlítására.

4. 6. Abban a speciális esetben, amikor $r(s, t) = r(t-s)$ egy racionális $f_x(\lambda) = F'(\lambda)$ függvény Fourier-transzformáltja, az ebben a szakaszban az $f(t)$ függvényre kapott integrálegyenletet vissza lehet vezetni állandó együtthatójú differenciálegyenletre és explicite meg lehet oldani (lásd pl. DAVENPORT és ROOT [1*], 2. függelék, vagy LANING és BATTIN [1*], 8. fejezet). Az így kapott megoldás azonban általában elfajult függvényeket tartalmaz: a δ-függvényt és deriváltjait; annak a feltétele, hogy létezzék $f(t) \in L_2(T)$ megoldás, itt egyenértékű azzal a feltétellel, hogy $f(t)$ kifejezése ne tartalmazzon ilyen elfajult függvényeket.

A feltételeknek az ebben a szakaszban adott alakja és a jel/zaj-viszonyt maximalizáló szűrők konstruálásának feladata közötti összefüggésről lásd DAVIS [2*]; DAVENPORT és ROOT [1*], 14—15. paragrafusokat.

4.7. Ennek a szakasznak a fő eredménye közvetlenül adódik KAKUTANI eredményeiből, amelyekről a 4. 2. szakaszhoz tartozó kiegészítésekben szóltunk.

4. 8. Ennek a szakasznak az elején utalás történik arra, hogy az $r(s, t)$-magú integrálegyenlet megoldása bonyolult feladat. Ezzel kapcsolatban szem előtt kell tartani, hogy ha $r(s, t) = r(t-s)$ racionális függvénynek a Fourier-transzformáltja, akkor a hozzá tartozó egyenletet hasonlóan lehet megoldani, mint ahogy megoldható az $f(t)$-re a 4. 6. szakaszban levezetett egyenlet (lásd DAVENPORT és ROOT [1*], SLEPIAN [1*], GELFAND és JAGLOM [2*]). Itt azonban a λ_ν sajátértékek és $\varphi_\nu(t)$ sajátfüggvények végső meghatározása egy transzcendens egyenlet megoldására (amelynek éppen a λ_ν értékek a gyökei) vezetődik vissza, ezt az egyenletet pedig csak közelítő numerikus módszerekkel lehet megoldani.

4.10. Pólya-folyamatnak (PÓLYA GYÖRGY-ről) olyan pontfolyamatot neveznek, amelynél az esemény megjelenésének a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban

$$p(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

a valószínűsége, ahol $p(t) = \dfrac{1+\beta n}{1+\beta\lambda t}$, β és λ rögzített állandók, n pedig a $(0, t)$ időben történt események száma. Ebben az esetben a $(0, t)$ időben történt események számának a valószínűségeloszlása az ún. Pólya-eloszlás:

$$P(0) = (1+\beta\lambda t)^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$P(n) = \left(\frac{\lambda t}{1+\beta\lambda t}\right)^n \frac{1\cdot(1+\beta)\ldots(1+(n-1)\beta)}{n!} P(0).$$

Ha $\beta\to 0$, akkor a Pólya-eloszlás a Poisson-eloszláshoz tart, a Pólya-folyamat pedig a Poisson-folyamathoz.

GRENANDER csak a $\lambda=1$ esettel foglalkozik, amelyre az általános eset az időlépték egyszerű változtatásával visszavezethető.

4.11. Az a tény, hogy nincs olyan $f(t)\in L_2(T)$ függvény, amellyel a feltételt ki lehetne fejezni, abból is belátható, hogy az

$$\int_0^T e^{-\beta|t-s|} f(t)\,dt = 1$$

integrálegyenlet megoldására alkalmazott szokásos módszer (lásd DAVENPORT és ROOT [1*], 2. függelék) az

$$f(t) = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-T)$$

eredményre vezet, amely δ-függvényt tartalmaz.

STRIBEL [2*] és HÁJEK [3*] kimutatják, hogy a H_0: $M_0x(t)=0$ és H_1: $M_1x(t)= =m(t)$ általánosabb hipotézis-összehasonlítás esetében, ha az $x(t)$ normális folyamat korrelációs függvénye

$$r(s,t) = M[x(s)-Mx(s)][x(t)-Mx(t)] = e^{-\beta|t-s|},$$

akkor az $f(\omega)$ likelihood-függvény alakja:

$$f(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2}\left[x(0)\left(m(0)-\frac{m'(0)}{\beta}\right)+x(T)\left(m(T)+\frac{m'(T)}{\beta}\right)-\frac{1}{2}m^2(0)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}m^2(T)+\int_0^T x(t)\left(\beta m(t)-\frac{m''(t)}{\beta^2}\right)dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\beta m^2(t)+\frac{m'^2(t)}{\beta}\right)dt\right\}$$

(ahol feltesszük, hogy az $m(t)$ függvény kétszer differenciálható).

A 4.11. szakasz eredményeinek egy másik általánosítása található SEGUCHI és IKEDA [1*] munkájában, ahol a H_0: $M_0x(t)=0$ és H_1: $M_1x(t)=m$ hipotézis-összehasonlítás feladatot az (általában nem stacionárius) $x(t)$ normális Markov-folyamatok olyan osztályának esetére tárgyalják, amelyet az $y(t)$ Wiener-folyamatból az időléptéknek a t-ponttól függő változtatásával és a folyamat által felvett értékek megfelelő normálásával lehet származtatni. Ebben a munkában az $f(\omega)$ likelihood-függvényre kapott általános kifejezés alakja hasonló a 4.12. szakaszban kapott speciális kifejezés alakjához.

4.4.—4.12. Ezeknek a szakaszoknak a fő tartalma olyan válogatott példák gyűjteménye, amelyekben az $f(\omega)$ likelihood-függvényt explicit alakban lehet meghatározni (és ezen az úton meg lehet találni a vizsgált hipotézisek megkülönböztetésének a leghatékonyabb kritériumait), továbbá meg lehet adni annak a feltételeit, hogy a reguláris A esettel, vagy pedig a szélsőségesen szinguláris C esettel van-e dolgunk (a közbenső B eset ezekben a példákban egyszer sem fordul elő). A jelen kiegészítésben még néhány hasonló jellegű példát kívánunk bemutatni, és röviden kitérünk a példákkal kapcsolatos általános eredményekre is.

Elsőként egy speciális példát tárgyalunk, amelynek jellege nagyon közel áll a 4.4.—4.11. szakaszokban foglalt példákéhoz, de még közvetlenebbül érinti a rádiólokáció gyakorlati feladatait. Legyen

$$H_0:\ x(t)=n(t), \qquad H_1:\ x(t)=A\cos(\omega t+\vartheta)+n(t),$$

ahol $n(t)$ stacionárius normális folyamat nulla átlaggal és $r(s,t)=\sigma^2 e^{-\alpha|t-s|}$ korrelációs függvénnyel, A ismert paraméter, ϑ pedig a $0\leq\vartheta<2\pi$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az ehhez a feladathoz tartozó $f(\omega)=\dfrac{dP_1}{dP_0}$ likelihood-hányadosra REICH és SWERLING [1*] explicit kifejezést vezetnek le oly módon, hogy kiszámítják a sűrűségfüggvények $x_k=x\left(\dfrac{kT}{n}\right)$, $k=0,1,\dots,n$ helyeken vett értékeinek az $l_n(x_0,\dots,x_n)$ hányadosait és azután képezik az $n\to\infty$ határértéket. Ebben az esetben adódott, hogy az $f(\omega)$ függvény csak az $x(0)$, $x(T)$, $\int\limits_T^\infty x(t)\cos\omega t\,dt$ és $\int\limits_0^T x(t)\sin\omega t\,dt$ mennyiségektől függ; az $\alpha\to\infty$, $\sigma^2\to\infty$, $\dfrac{\sigma^2}{\alpha}\to K=\text{konst.}$ határátmenet után (azaz a „fehér zaj" esetében) $f(\omega)$ függése $x(0)$-tól és $x(T)$-től megszűnik és ebben a határesetben a leghatékonyabb kritérium az alábbi nagyon egyszerű alakot ölti:

$$\left|\int\limits_0^T e^{i\omega t}x(t)\,dt\right|^2\geq k.$$

REICH és SWERLING munkájukban megmutatják az $f(\omega)$ függvény meghatározásának általános módszerét az $n(t)$ „zaj" számos más alakú $r(s,t)$ korrelációs függvényeinek az esetére is.

PETERSON, BIRDSALL és FOX [1*] munkájukban néhány olyan feladatot vizsgálnak, ahol az $n(t)$ zaj „normális, korlátos spektrumú fehér zaj", azaz olyan folytonos normális folyamat, amelynek a $t_k=\dfrac{K}{2W}$, $k=0,1,\dots,2WT$ időpontokban vett értékei (valamilyen $W>0$ esetén) független valószínűségi változók nulla átlaggal és egyenlő szórásokkal. Így tehát ezekben a feladatokban az $x(t)$ folyamatot rögzített véges számú $x_1,x_2,\dots,x_n$ koordinátákkal megadottnak tekintik; világos, hogy az ilyen feltevés alapján kapott kritériumok közelítő jellegűek a GRENANDER-dolgozat 4.12. szakaszában kifejtett értelemben.

Hipotézisek megkülönböztetésére vonatkozó, konkrét műszaki problémákból eredő további feladatok találhatók az [1*] cikkfordítás-gyűjteményben, továbbá DAVENPORT és ROOT [1*], valamint HELSTROM [1*] könyveiben.

Abban a speciális esetben, amikor P_0 az ún. Wiener-mérték, amely a Wiener-folyamatnak felel meg — vagyis azon normális $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak, amelyre $x(0)=0$, $Mx(t)=0$ és $Mx(s)x(t)=\min(s,t)$ —, P_1 pedig a Wiener-mértékből néhány speciális jellegű egyszerű transzformációval származtatott mérték, meg lehet határozni az $f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}$ likelihood-hányadost CAMERON, MARTIN és más szerzőknek a Wiener-mérték szerinti integrálok különféle változó-helyettesítésekkel végzett átalakításainak szabályaira vonatkozó eredményeiből. Így például a CAMERON és MARTIN [1*], CAMERON [1*] és SEGAL [1*] munkákban kimutatták, hogy a H_0: $Mx(t)=0$ és H_1: $Mx(t)=m(t)$ hipotézisek összehasonlítása esetén, ha $x(t)$ olyan folyamat, hogy az $x(t)-Mx(t)$ különbség Wiener-folyamat, akkor

$$f(\omega)=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T[m'(t)]^2\,dt+\int\limits_0^T m'(t)\,dx(t)},$$

feltéve, hogy $m(t)$ olyan abszolút folytonos függvény, amelyre $m'(t)\in L_2(T)$; az ellenkező esetben a P_0 és P_1 mértékek diszjunkt halmazokon összpontosulnak, tehát a szélsőségesen szinguláris C eset következik be. A CAMERON és MARTIN [2*], SEGAL [1*] és SEIDMAN [1*] munkákban azt az esetet vizsgálják, amikor a P_1 mértéket a P_0 Wiener-mértékből az Ω függvénytéren végrehajtott lineáris transzformációkkal származtatják, a CAMERON és MARTIN [3*], valamint a CAMERON és FAGEN [1*] munkákban pedig ezeket az eredményeket kiterjesztik a nem-lineáris transzformációk néhány típusára (lásd még e tekintetben GELFAND és JAGLOM [1*] összefoglaló dolgozatát.

A Wiener-folyamat normális, független növekményű Markov-folyamat, és kitűnik, hogy a reá vonatkozó eredményeket általánosítani lehet az olyan folyamatok viszonylag tág osztályára, amelyek e három tulajdonság közül legalább az egyikkel rendelkeznek. Legelőször is megjegyezzük, hogy ha mindkét eloszlás — P_0 és P_1 —, normális, akkor KAKUTANI [1*] eredményének értelmében (lásd még a GRENANDER-dolgozat 4. 2. szakaszának a végén található megjegyzést) az várható, hogy csupán csak az A reguláris eset vagy a szélsőségesen szinguláris C eset lehetséges (ugyanis itt a folyamat koordinátáit úgy lehet megválasztani, hogy kölcsönösen függetlenek legyenek mind a P_0, mind a P_1 mértékre nézve; e célra csupán diagonális alakra kell hozni egyszerre két pozitív definit kvadratikus alakot, amelyeket az M_0xy és M_1xy várható értékek határoznak meg, egy végtelen dimenziószámú térben). Ennek a ténynek a szigorú bizonyítása (a reguláris és a szinguláris esetet jellemző feltételekkel együtt) megtalálható két, újabban — egymástól függetlenül — megjelent munkában: FELDMAN [1*] (amely lényegében SEGAL [1*] régebbi általános eredményeit alkalmazza) és HÁJEK [1*]. A P_0 és P_1 normális mértékek regularitására (illetve szélsőséges szingularitására) e két munkában kapott szükséges és elegendő feltételek külső alakjukban erősen különböznek, valójában azonban egymásra vissza lehet őket vezetni. A normális mértékek regularitásának és szingularitásának általános feltételeit még egy másik alakban adta meg SZKOROHOD [3*], ezenkívül megmutatta az $f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}$ likelihood-hányados általános előállítását a reguláris esetben.

Sajnos, FELDMAN, HÁJEK, és SZKOROHOD általános feltételei nem eléggé konstruktívak — nagyon nehéz (ha éppen nem lehetetlen) adott esetekben meggyőződni róla, hogy teljesülnek-e. Ezért igen nagy a jelentősége azoknak a regularitásra vagy a szingularitásra vonatkozó speciálisabb elegendő feltételeknek, amelyeket hatékonyan lehet alkalmazni a sztochasztikus folyamatok egyes fontos osztályaira. A szingularitás legfontosabb elegendő feltételei azok, amelyek az $x(t)$ folyamat realizációinak valamilyen „majdnem biztos" tulajdonságaival kapcsolatosak. Ha ki lehet mutatni, hogy az $x(t)$ folyamat realizációja valamilyen meghatározott tulajdonsággal bír 1 valószínűséggel a P_0 mértékre nézve, és ugyanannak a tulajdonságnak 0 a valószínűsége a P_1 mértékre nézve, akkor ebből azonnal következik, hogy a P_0 és P_1 eloszlások a függvénytér diszjunkt halmazain összpontosulnak, és ekkor a folyamat egyetlen realizációja alapján 1 valószínűséggel meg lehet állapítani, hogy a H_0 vagy a H_1 hipotézis igaz-e. Például az analitikus sztochasztikus folyamatok fontos osztálya esetében (amelyekre vonatkozóan lásd BELJAJEV [1*] munkáját) a folyamat egyetlen realizációjának az időtengely bármilyen rövid szakaszán való ismerete alapján meg lehet határozni 1 valószínűséggel ennek a realizációnak az egész tengelyen felvett értékeit. A stacionárius, metrikusan tranzitív $x(t)$ folyamat esetén ebből máris következik, hogy a realizáció bármilyen rövid szakasza alapján 1 valószínűséggel meg lehet határozni a folyamatnak megfelelő P_0 mértéket. Ennek az eredménynek egy speciális esete az a tétel, amely szerint két tetszőleges, egymástól különböző, normális stacionárius mérték szinguláris, ha akár csak egyikük is metrikusan tranzitív, stacionárius, korlátos spektrumú folyamatnak felel meg (vö. SLEPIAN [2*]).

A nem-analitikus normális sztochasztikus folyamatok esetére HUNT [1*], LOÉVE [1*], BAXTER [1*], BELJAJEV [2*], GLADÜSEV [1*] munkái a folyamat realizációinak számos olyan „majdnem biztos" tulajdonságára mutatnak rá, amelyeket az $r(s, t)$ korrelációs függvény vagy (a stacionárius esetben) az $F(\lambda)$ spektrálfüggvény különféle tulajdonságai határoznak meg. Ezekből a tulajdonságokból kiindulva, két normális P_0 és P_1 mérték szingularitására sokféle elegendő feltételt lehet megadni; ezek közül itt csupán a következőt idézzük: *ha két, tetszőleges véges T intervallumon megadott normális stacionárius folyamathoz (vagy stacionárius növekményű folyamathoz) tartozó P_0 és P_1 mértékek, amelyeknek az átlaga zérus és a spektrálsűrűségei $f_0(\lambda)$ és $f_1(\lambda)$ olyanok, hogy $|\lambda| \to \infty$ esetén $f_i(\lambda) = C_i\lambda^{-\alpha_i}[1+0(\lambda^{-2})]$, $i=0, 1$, (ahol C_i és α_i valós állandók, $C_i>0$, $\alpha_i>1$) és $\lim \frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)} \neq 1$, akkor a P_0 és P_1 mértékekre a szélsőségesen szinguláris C eset áll fenn* (SLEPIAN [2*], GLADÜSEV [1*].

Ami két normális P_0 és P_1 mérték regularitásának hatékony feltételeit illeti, ilyen irányú eredmény még nagyon kevés ismeretes. A legfontosabb ilyen jellegű bebizonyított tény az, hogy *nulla várható értékű és racionális $f_0(\lambda)$ és $f_1(\lambda)$ spektrálsűrűségű normális, stacionárius folyamatoknak megfelelő P_0 és P_1 mértékek abszolút folytonosak egymásra nézve, feltéve hogy* $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)} = 1$ [2] (lásd pl. PISZARENKO [1*]

[2] Azt az esetet, amikor a P_0 és P_1 mértékek azonos (de nem feltétlenül nulla) várható értékű folyamatnak felelnek meg, közvetlenül vissza lehet vezetni az előző esetre, ha pedig az $m_0(t)$ és $m_1(t)$ várható értékek különböznek, akkor elegendő e célra pótlólag a 4. 4.—4. 5. szakaszok eredményeit alkalmazni. Megemlítjük még, hogy a fenti állítás értelmében a P_0 és P_1 mértékekre feltétlenül a szélsőségesen szinguláris eset áll fenn, ha a spektrálsűrűségek ugyan racionálisak, de $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \neq 1.$

mérnöki szintnek megfelelő szigorúsággal írt munkáját, valamint GIRSZANOV [1*] dolgozatát, amely néhány olyan általános eredményt tartalmaz, amelyeknek a fent idézett tény a következménye, továbbá PINSZKER [1*] monográfiáját, amelyről a következőkben még szó lesz).

PISZARENKO munkájában még az alábbi szabályt adja meg az $f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}$ likelihood hányados előállítására két ilyen P_1 és P_0 mérték esetében:

$$f(\omega) = Ae^{-\frac{1}{2}\int_0^T x(t)[u(t)-v(t)]\,dt},$$

ahol A valamilyen állandó (amelyet meghatározott módon lehet kiszámítani), $u(t)$ és $v(t)$ pedig a vizsgált sztochasztikus folyamat $x(t)$ realizációjával az

$$\int_0^T r_0(t-s)u(s)\,ds = x(t), \quad \int_0^T r_1(t-s)v(s)\,ds = x(t)$$

integrálegyenletek útján kapcsolatos függvények ($r_0(t-s)$ és $r_1(t-s)$ az $x(t)$ folyamat korrelációs függvényei a P_0, illetve P_1 mértékre nézve). Abban a speciális esetben, amikor

$$r_0(t-s) = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha|t-s|} \quad \text{és} \quad r_1(t-s) = \frac{1}{\beta}e^{-\beta|t-s|},$$

$$\left(\text{tehát } f_0(\lambda)=\frac{1}{\pi(\lambda^2+\alpha^2)} \text{ és } f_1(\lambda)=\frac{1}{\pi(\lambda^2+\beta^2)}\right)$$

a fentiekből könnyen következik, hogy

$$f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}=Ae^{-\frac{\beta^2-\alpha^2}{4}\int_0^T x^2(t)\,dt+\frac{\beta-\alpha}{4}[x^2(0)+x^2(T)]}.$$

Ezekhez közelálló eredményeket lehet még találni a GELFAND és JAGLOM [2*], valamint PINSZKER [1*] munkáiban, amelyek információelmélettel foglalkoznak. A dolog lényege, hogy a T intervallumon megadott $x_0(t)$, $x_1(t)$ sztochasztikus folyamatok egyikében a másikra vonatkozó információmennyiség értéke

$$I(x_0(t), x_1(t)) = M_{01}\log\frac{dP_{01}}{d(P_0XP_1)},$$

ahol P_0 és P_1 az $x_0(t)$, illetőleg $x_1(t)$ folyamatoknak megfelelő mértékek, P_{01} az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ értékek együttes valószínűségeloszlását a függvénypárok terében meghatározó mérték, P_0XP_1 a független $x_0(t)$ és $x_1(t)$ esetének megfelelő mérték ugyanebben a térben, és M_{01} a várható érték a P_{01} mértékre nézve (lásd GELFAND és JAGLOM [2*]). Ennélfogva az $I(x_0(t), x_1(t))$ mennyiség kiszámítása szoros kapcsolatban áll a $\frac{dP_{01}}{d(P_0XP_1)}$ likelihood-hányados meghatározásával, vagyis azzal a feladattal, hogy összehasonlítsuk az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamatok adott együttes valószínűségeloszlásának megfelelő H_1 hipotézist azzal az alternatív H_0 hipotézissel, hogy ugyanezek a folyamatok kölcsönösen függetlenek; $I(x_0(t), x_1(t))$ csupán akkor lehet véges mennyiség, ha a két hipotézis összehasonlítása a reguláris esetnek felel meg. PINSZKER [1*] munkájában bevezeti még az $x_1(t)$ sztochasztikus folyamatnak egy másik $x_0(t)$ folyamatra vonatkoztatott „entrópiasűrűsége" fogalmát, amelyet a $h(x_0(t), x_1(t)) = M_1 \log \frac{dP_1}{dP_0}$ összefüggés határoz meg, ahol M_1 a várható érték a P_1 mértékre nézve (a B vagy C szinguláris esetben definíció szerint $h(x_0(t), x_1(t)) = \infty$). A $h(x_0(t), x_1(t))$ mennyiség kiszámításának a feladata magától értetődően nagyon közel áll sztochasztikus folyamatokra vonatkozó két hipotézis összehasonlításának a feladatához. Például PINSZKER eredményeiből azonnal következik, hogy *ha a P_0 és P_1 mértékek véges intervallumon megadott normális stacionárius folyamatoknak felelnek meg, amelyek átlaga nulla és $f_0(\lambda), f_1(\lambda)$ spektrálsűrűségeik közül legalább az egyik olyan racionális függvénye λ-nak, amelynek nincsenek valós gyökei, akkor a P_0 és P_1 mértékekre vagy az A reguláris eset, vagy a C szélsőségesen szinguláris eset áll fenn, attól függően, hogy az alábbi két integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)} - 1 \right) d\lambda \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} d\lambda$$

egyszerre konvergens-e vagy pedig nem. PINSZKER eredményei magukban foglalnak még néhány általánosabb esetet is (például azt az esetet, amikor az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamatok várható értékei nullától különböznek, vagy amikor a folyamatok többdimenziósak, vagyis ha $x_0(t) = (x_{01}(t), \ldots, x_{0m}(t))$ és hasonlóan $x_1(t)$).

Térjünk most át arra az esetre, amikor P_0 és P_1 Markov-mértékek (vagyis a nekik megfelelő sztochasztikus folyamatok Markov-folyamatok).

A legegyszerűbb ismert eredmény itt a következő: *ha $x_0(t)$ és $x_1(t)$ diffúziós-típusú Markov-folyamatok, amelyekre $x_0(0) = x_1(0)$ és amelyeket a Fokker—Planck egyenletek írnak le, ahol a b_0 és b_1 diffúziós együtthatók állandók és az $a_0(x, t), a_1(x, t)$ átviteli együtthatók kielégítenek valamilyen természetes regularitási feltételt, akkor $b_0 \neq b_1$ esetében a P_0 és P_1 mértékek a függvénytér diszjunkt halmazain összpontosulnak, viszont a $b_0 = b_1$ esetben e mértékek abszolút folytonosak egymásra nézve és P_1 sűrűsége P_0-hoz viszonyítva*

$$f(\omega) = \frac{dP_1}{dP_0} = e^{\frac{1}{4b_0}\left\{ \int_0^T \left[a_1^2(x(t), t) - a_0^2(x(t), t)\right] dt - 2 \int_0^T \left[a_1(x(t), t) - a_0(x(t), t)\right] dx(t) \right\}}$$

(lásd pl. PROHOROV [1*], 2. függelék, továbbá a Wiener-mérték szerinti integrálok transzformációira fent megadott irodalmat). Tegyük most fel, hogy a $b_0(x, t)$ és $b_1(x, t)$ diffúziós együtthatók x-től és t-től függnek (és e két változónak eléggé sima függvényei), akkor $b_0(x, t) \neq b_1(x, t)$ esetén a P_0 és P_1 mértékek szintén szingulárisak egymásra nézve a könnyen bizonyítható

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[x\left(\frac{(t_1 - t_0)(k+1)}{n} \right) - x\left(\frac{(t_1 - t_0)k}{n} \right) \right]^2 = 2 \int_{t_0}^{t} b(x(t), t)\, dt$$

1 valószínűséggel érvényes összefüggés következményeképpen.[3] Ezeknek az eredményeknek további lényeges általánosításai találhatók SZKOROHOD [2*] és GIRSZANOV [1*, 2*] újabb keletű munkáiban. E munkák közül az első az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ Markov-folyamatok igen általános típusára (amely mint nagyon speciális esetet a diffúziós folyamatokat is magában foglalja) megadja a P_0 és P_1 mértékek abszolút folytonosságának tág elégséges feltételeit, és e feltételekkel kapcsolatban előállítja az egyik mértéknek a másikra vonatkoztatott sűrűségét meghatározó kifejezést. A második munka hasonló eredményeket tartalmaz a sztochasztikus folyamatok egy másik érdekes osztályának az esetére, amely a Markov-féle diffúziós folyamatok osztályának a természetes általánosítása (ebben az osztályban maguk az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamatok nem kell hogy Markov-folyamatok legyenek, de olyan típusú sztochasztikus egyenletekkel kell megadva legyenek, mint ITÔ egyenlete a diffúziós Markov-folyamatokra). Végül a harmadik munka a szingularitás és regularitás feltételeit vizsgálja az olyan függvények terében megadott mértékek esetére, amelyeknek értéktartománya korlátos; ezek a mértékek különféle határfeltételekkel megadott korlátos tartományban értelmezett Markov-folyamatokhoz tartoznak.

Végül két független növekményű $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamat esetére SZKOROHOD [1*] munkája adja meg a P_1 mérték P_0-ra vonatkozó abszolút folytonosságának általános feltételeit és a megfelelő $f(\omega)=\dfrac{dP_1}{dP_0}$ sűrűség kifejezését (ugyanez a szerző ezeket az eredményeket pl. lényegesen felhasználja [2*] munkájában).

5. fejezet

A műszaki alkalmazások szempontjából a becsléselmélet alapfeladatát a következőképpen lehet megfogalmazni: Legyen $x(t)$ a vett jel, amely néhány, számunkra ismeretlen paramétertől függ és ezenkívül tartalmaz néhány véletlen paramétert, amelyeknek a valószínűségeloszlása ismeretes, továbbá eltorzítják véletlen zavarok („zajok"). A folyamat véges T intervallumon megfigyelt $x(t)$ realizációja alapján becslést kell adni az ismeretlen paraméterek értékeire. Az így kitűzött feladat rendkívül fontos a rádiólokáció céljaira; lásd pl. DAVENPORT és ROOT [1*] könyvét és SLEPIAN [1*], YOULA [1*], SWERLING [1*] és HANEN [1*] munkáit, amelyek közvetlen gyakorlati fontosságú konkrét becslési példákat foglalnak magukban.

5.1. A minimális D_0t szórású torzítatlan $t(\omega)$ becslés szerkesztésére lásd pl. SWERLING [1*] munkáját és az ott idézett matematikai irodalmat. A Poisson-folyamat paramétereinek a becslése tekintetében lásd még MORAN [1*]-et.

5.4. Az itt levezetett

$$M m^* \overline{x(\alpha)} = C, \quad a \leqq t \leqq b$$

[3] Az itt megadott összefüggés helyett abból is ki lehet indulni, hogy a

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \frac{|x(t+h)-x(t)|}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}} = [2b(x(t),t)]^{\frac{1}{2}}$$

összefüggés 1 valószínűséggel érvényes (lásd MARUYAMA [2*]). Ehhez csupán annyit kívánunk megjegyezni, hogy mindkét idézett összefüggés csak annyit mond, hogy a szélsőségesen szinguláris C eset feltétlenül bekövetkezik, ha $b_0(x, t_0) \neq b_1(x, t_0)$ valamilyen $t_0 \in T$-re és x *minden lehetséges értékére* (pl. ha $b_0(t)$ és $b_1(t)$ nem függnek x-től és $b_0(t_0) \neq b_1(t_0)$); ha azonban x-nek csupán egyes értékei esetén igaz, hogy $b_0(x, t_0) \neq b_1(x, t_0)$, akkor csak annyit lehet kimondani, hogy a P_1 mérték nem lehet abszolút folytonos P_0-ra nézve a függvénytér valamilyen részében).

feltételnek, amely egyértelműen meghatározza a minimális szórású torzítatlan lineáris m^* becslést, egyszerű geometriai értelmezése van. Tekintsük az $L_2(Y; a, b)$ Hilbert-teret; világos, hogy az m átlagnak minden lehetséges torzítatlan lineáris μ^* becslése ebben a térben valamilyen M hipersíkot tölt be, amely nem megy keresztül az $L_2(Y; a, b)$ tér O kezdőpontján. A μ^* becslés szórása $\|\mu\|^2 - m^2$; ezért a legkisebb szórású becslésnek az O ponthoz legközelebbi $m^* \in M$ pont felel meg. Ez a legközelebbi pont az O-ból M-re bocsátott merőleges talppontja; tehát m^*-ot egyértelműen meghatározzák a következő feltételek: $m^* \in M$, és hogy minden $m^* - \mu^*$ vektor merőleges m^*-ra (ahol $\mu^* \in M$ tetszőleges torzítatlan becslése m-nek). Az összes torzítatlan becslések helyett elegendő csupán a $\mu = x(\alpha)$, $a \leqq \alpha \leqq b$ típusú becsléseket tekinteni, és éppen ezen az úton juthatunk a GRENANDER által levezetett feltételhez, egyszersmind megkapjuk, hogy $c = Dm^*$.

A 137—138. oldalakon m^* legjobb becslését adja meg arra az esetre, amikor $x(t)$ olyan stacionárius folyamat, amelynek a spektrálsűrűsége egy 1 számlálójú racionális törtfüggvény; semmit sem közöl azonban arról, hogyan találta meg ezt a becslést. Az eredmény levezetésének egy lehetséges módja az m^* mennyiség egy, — GRENANDER későbbi [1*] munkájában megadott —, előállításának a felhasználása. E dolgozat szerint stacionárius $x(t)$ folyamat esetén a legkisebb szórású m^* becslést az alábbi alakban lehet előállítani:

$$m^* = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} x^*(t)\,dt,$$

ahol $t \notin T$ esetén $x^*(t)$ az $x(t)$ értékeinek a $t \in T$-re adott $x(t)$ értékek alapján szerkesztett legjobb lineáris torzítatlan előrejelzése; $t \in T$ esetén pedig természetesen $x^*(t) = x(t)$. Ugyanebben a munkában bizonyos regularitási feltételekkel egy további, még alkalmasabb képletet vezet le:

$$m^* = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\,dt,$$

ahol $\tilde{x}(t)$ az $x(t)$ értékeinek legjobb lineáris előrejelzése az $m = 0$ feltétellel, γ pedig egy állandó (amelyet az m^* becslés torzítatlanságának a feltétele egyértelműen meghatároz). Az 5. 4. szakaszban vizsgált speciális $x(t)$ folyamat esetében az utóbbi képletből nagyon egyszerűen kaphatunk explicit kifejezést m^*-ra (az $\tilde{x}(t)$ előrejelzést itt ugyanis nagyon könnyen és igen egyszerű alakban lehet előállítani; lásd JAGLOM [1*]).

Egy másik módszer m^* explicit képletének az előállítására e mennyiség alábbi alakú formális kifejezésén alapul:

$$m^* = \int_a^b f(t)x(t)\,dt.$$

Ebből $f(t)$ számára az

$$\int_a^b r(s, t) f(t)\,dt = c$$

integrálegyenletet kapjuk (lásd az 5. 2. és 4. 6. szakaszokat), amelyet explicite meg lehet oldani, ha az $r(s,t) = r(t-s)$ korrelációs függvénynek racionális Fourier-transzformáltja van (lásd a 4. 6. szakaszhoz tartozó kiegészítésekben idézett irodalmat). Az így kapott megoldás általában tartalmazza a $\delta(t-a)$ és $\delta(t-b)$ δ-függvényeket és azok deriváltjait, a legjobb m^* becslést tehát a folyamat megfigyelési intervallumának a határain vett értékeiből és minden létező deriváltjának ugyanott vett értékeiből képezett lineáris kombinációknak és az $x(t)$ ezen az intervallumon valamilyen folytonos súlyfüggvénnyel vett integráljának az összege állítja elő. A 136—137. oldalon vizsgált speciális esetben ez az eljárás az ott megadott képletre vezet.

Végül még egy módszer m^* legjobb becslésére stacionárius $x(t)$ folyamat esetén abban áll, hogy m^*-ot

$$m^* = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dZ(\lambda)$$

alakban állítjuk elő és vizsgáljuk $Z(\lambda)$ viselkedését komplex λ értékekre; ezzel a módszerrel szintén egyszerű módon le lehet vezetni a 138. oldalon megadott képletet, és általánosítani lehet tetszőleges racionális spektrumú stacionárius folyamatok esetére (lásd JAGLOM [2*]). Ezzel kapcsolatban például könnyű bizonyítani, hogy tetszőleges ilyen folyamatok esetében

$$\lim_{T\to\infty} \frac{Dm^*}{T} = \pi h(0)\,,$$

ahol $h(\lambda)$ az $x(t)$ folyamat spektrálsűrűsége; ebből közvetlenül folyik, hogy ebben az esetben a számtani közép szerinti becslés aszimptotikusan efficiens a lineáris becslések osztályában.

A racionális spektrálsűrűségű stacionárius $y(t)$ sztochasztikus folyamat állandó m átlagának a becslésére vonatkozó legtöbb eredményt minden nehézség nélkül általánosítani lehet az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ paraméterek becslésére abban az esetben, amikor az $My(t) = m(t)$ várható érték

$$m(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i(t)$$

alakban írható, ahol $m_1(t), \ldots, m_n(t)$ ismert függvények. Az m^* becslés előállítására az előzőkben megadott mindkét módszert (az integrálegyenletek módszerét és a $\Phi(\lambda)$ függvény vizsgálatának a módszerét) alkalmazni lehet az α_i paraméterek becslésére szolgáló explicit képletek szerkesztésére is (vö. LANING és BATTIN [1*], 8. fej.; BÉTHOUX [2*]). Egy hasonló folyamat speciális esetét, az

$$y(t) = x(t) + m(t)$$

folyamatot — ahol $r(s,t) = Mx(t)x(s) = e^{-|t-s|}$ —, vizsgálták MANN és MORANDA [1*], és STRIBEL [1*]. Ezekben a munkákban az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ paraméterek minimális szórású torzítatlan $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ becslésein kívül vizsgálták még a „legkisebb négyzetek módszerével való becslést" (amely nem függ az $r(s,t)$ korrelációs függvény explicit alakjától, és az $m(t) = \Sigma \alpha_\nu m_\nu(t)$ alakú várható érték esetében ugyanaz a szerepe, mint az $m(t) = m = \text{konst.}$ esetben az m paraméter számtani közép szerinti becslésének), és kimutatták, hogy az aszimptotikus efficiencia fogalmának ésszerű általánosítása esetén a legkisebb négyzetek módszerével így kapott becslések aszimptotikusan efficiensek a lineáris becslések osztályában, feltéve, hogy $m(t)$ ismeretlen együtthatójú polinom vagy trigonometrikus polinom, de nem rendelkeznek az aszimptotikus efficiencia tulajdonsággal a legtöbb más esetben.

5. 5. A sztochasztikus folyamatokra ebben a szakaszban kirótt feltételek nem előnyösek a gyakorlati alkalmazás céljaira, mert az $f(\lambda)$ függvény viselkedésére vonatkoznak, amelynek a kiszámítása mindig nagyon nehéz feladat, kivéve a racionális spektrálsűrűség esetét. Később GRENANDER [1*] munkájában kimutatta, hogy diszkrét időparaméterű $x(t)$ sztochasztikus folyamatok (sztochasztikus sorozatok) esetén e feltételek helyett pl. azt a követelményt lehet támasztani, hogy az $x(t)$ folyamat reguláris legyen, spektrálsűrűsége $h(\lambda)=F'(\lambda)$ pozitív legyen és a spektrálsűrűségnek létezzék folytonos első két deriváltja. Folytonos időparaméterű $x(t)$ folyamatokra vonatkozó, hasonló jellegű, de erősebb eredmény található CHIANG TSE-PEI [1*] munkájában, aki ennek segítségével pl. kimutatta, hogy az 5. 5. szakasz fő eredménye, az m mennyiség számtani közép szerinti becslésének a lineáris becslések osztályában való aszimptotikus efficienciájáról szóló tétel érvényes marad minden olyan reguláris sztochasztikus folyamat esetében is, amelynek $h(\lambda)$ spektrálsűrűsége pozitív és folytonos a $\lambda=0$ pontban. CHIANG TSE-PEI egyszersmind egy általánosabb erdményt is kapott, amely szerint $m(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu e^{i\lambda_\nu t}$ alakú várható értékek esetén (ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ismeretesek) az α_ν, $\nu=1, \ldots, n$ paramétereknek a legkisebb négyzetek módszerével kapott becslése aszimptotikusan efficiens e paraméterek torzítatlan lineáris becsléseinek az osztályában minden olyan reguláris stacionárius $x(t)$ folyamat esetében, amelynek spektrálsűrűsége pozitív és folytonos a $\lambda=\lambda_\nu$, $\nu=1, \ldots, n$ pontokban.

A stacionárius sztochasztikus folyamatok egy másik osztálya, amelyre kimutatták a várható érték számtani közép szerinti becslésének aszimptotikus efficienciáját az összes lineáris torzítatlan becslések osztályában, azokat az $x(t)$ folyamatokat foglalja magában, amelyeknek $r(t)$ korrelációs függvénye konvex (lásd HÁJEK [1*][4]). Erre az esetre azt is kimutatták, hogy a minimális szórású torzítatlan m^* becslést minden $T>0$ esetén elő lehet állítani az alábbi alakban:

$$m^* = \int_0^T x(t)\, dF(t),$$

ahol $F(t)$ olyan nem-csökkenő függvény, amelyre $\int_0^T dF(t)=1$.

5. 6. Az $y(t) = x(t)+m(t)$ alakú normális folyamatok tág osztályára — ahol $Mx(t)=0$, és $m(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu m_\nu(t)$ —, STRIBEL [2*] munkájában kimutatta, hogy az α_ν paraméterek α_ν^* maximum likelihood becslése efficiens; ugyanebben a munkában általános képleteket is ad (amelyek általában a gyakorlati használatra kevéssé

[4] Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az olyan folytonos konvex $r(t)$, $0\leq t<\infty$ függvények, amelyekre $r(t)\to 0$, ha $t\to\infty$, mindig valamilyen reguláris stacionárius folyamat korrelációs függvényei.

alkalmasak) ezeknek az α_ν^* becsléseknek a kiszámítására (vö. a 4. 4. szakaszhoz tartozó kiegészítéseket). Az 5. 6. szakasz utolsó eredményének az általánosítása néhány nem-stacionárius normális Markov-folyamatra megtalálható SEGUCHI és IKEDA [1*] munkájában (vö. a 4.11. szakaszhoz tartozó kiegészítéseket).

SLEPIAN [1*] munkájában az $m(t) = V\cos(\omega t + \Theta)$ rezgés V amplitúdójára ad maximum likelihood becslést, amelyet az $y(t) = x(t) + m(t)$ folyamat egy realizációjának véges intervallumon megfigyelt értékei alapján szerkeszt meg (ahol $x(t)$ normális stacionárius „fehér" vagy „Markov-"zaj és $Mx(t) = 0$). Általánosabb eset az $Mx(t) = \alpha m(t)$ α-paraméterének α^* becslése, ahol $m(t)$ ismert függvény; ezzel az esettel HÁJEK [3*] munkája foglalkozik, amelyről már szó volt a 4. 5.—4. 6. szakaszokhoz tartozó kiegészítésben.

5. 9. Ennek a szakasznak az eredményeiből a gyenge függésű valószínűségi változókra vonatkozó központi határeloszlástétel értelmében (lásd pl. VOLKONSZKIJ és ROZANOV [1*]) az is közvetlenül folyik, hogy a megadott feltételekkel a maximum likelihood becslés aszimptotikusan normális.

5.10. Az $x(t)$ normális, stacionárius folyamat metrikus tranzitivitásának szükséges és elegendő feltételeiről szóló tételt már MARUYAMA [1*] bebizonyította, valamivel korábban, mint GRENANDER. Nem-normális stacionárius $x(t)$ folyamatok metrikus tranzitivitására vonatkozó néhány elégséges feltétel található LEONOV egy újabb [1*] megjegyzésében; ezeket a feltételeket a folyamat karakterisztikus funkcionáljára, illetve a szemi-invariánsaira vonatkozó korlátozások alakjában adja meg.

5.14. Ergodikus stacionárius sztochasztikus $x(t)$ folyamat korrelációs függvényének a becslése a folyamat egy realizációja alapján (vagy ami ugyanaz, a spektrálfüggvény, illetve spektrálsűrűség becslése) rendkívül fontos gyakorlati probléma és kiterjedt irodalma van. Lásd e tekintetben az alábbi monográfiákat: BARTLETT [1*], 9. fej. és GRENANDER és ROSENBLATT [1*], 4. és 6. fej., amelyek főleg a diszkrét paraméterű folyamatokkal foglalkoznak. Lásd még BLACKMAN és TUKEY [1*] kis terjedelmű könyvét, amely a folytonos paraméterű $x(t)$ folyamatokat tárgyalja. Ezekben a könyvekben további irodalmi utalások találhatók.

6. fejezet

Ez a fejezet röviden tárgyal néhány, a sztochasztikus folyamatok előrejelzésének (prognózisának, extrapolációjának) és szűrésének először KOLMOGOROV [1*, 2*] és WIENER [1*] által kidolgozott elméletére vonatkozó kérdést, éspedig ennek az elméletnek az alkalmazását a $-\infty < t < T$ féltengelyen megadott stacionárius $x(t)$ folyamatokra. A KOLMOGOROV—WIENER elmélet fő tételeinek szigorú matematikai tárgyalását az alábbi munkákban lehet megtalálni: DOOB [1*] monográfiája, 12. fej.; lásd még JAGLOM [1*] összefoglaló művét, DAVENPORT és ROOT [1*] könyve, 11. fej.; LANING és BATTIN [1*] könyve, 7. fej.; SZOLODOVNYIKOV [1*] könyvét. Ezekben számos példa és folyóirat-cikkekre való utalás található. A véges intervallumon megadott stacionárius és azzal rokon sztochasztikus folyamatok extrapolációjára és szűrésére vonatkozó feladattal foglalkoznak: ZADEH és RAGAZZINI [1*] és JAGLOM [2*, 3*]; lásd még LANING és BATTIN [1*], 8. fej. és SZOLODOVNYIKOV [1*], 8. fej. A tetszőleges sztochasztikus folyamatok előrejelzésére és szűrésére vonatkozó feladatoknak a 6. 2. szakaszban vázolt általános megközelítését jelentősen továbbfejlesztették DAVIS [1*] és PUGACSOV [1*] munkái.

KIEGÉSZÍTŐ IRODALOM[5]

M. S. Bartlett: [1*] *An Introduction to Stochastic Processes*, Cambridge, 1955.

G. Baxter: [1*] A strong limit theorem for Gaussian processes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 522–527.

P. Béthoux [1*] Discrimination entre plusieurs signaux en telecommunication, *C. R. Acad. Sci.*, **247** (1958), 412–415.
[2*] Filtrage d'une fonction aléatoire dont la moyenne est une fonction linéaire, *C. R. Acad. Sci.*, **248** (1959), 3685–3686.

R. P. Blackman and J. W. Tukey: [1*] *The Measurement of Power Spectra*, New York, 1959.

J. Hájek: [1*] Линейная оценка средней стационарного процесса с выпуклой корреляционной функцией, *Чехосл. матем. журн.*, **6 (81)**, (1956), 94—117.
[2*] Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса, *Чехосл. матем. журн.*, **8 (83)**, (1958), 610—618.
[3*] On a simple regression model in Gaussian processes, *Trans. 2nd Prague Conf. on Inform. Theory*, Prague, 1960, 185–198.

U. Grenander: [1*] On empirical spectral analysis of stochastic processes, *Ark. för Mat.*, **1** (1951), 503–531.

U. Grenander and M. Rosenblatt: [1*] *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, New York, 1956.

W. B. Davenport and W. L. Root: [1*] *Введение в теорию случайных сигналов и шумов*, Москва, 1960.

J. L. Doob: [1*] *Stochastic Processes*, New York, 1953.

R. S. Davies: [1*] On the theory of prediction of nonstationary stochastic processes *Journ. Appl. Phys.*, **23** (1952), 1047–1053.
[2*] On the detection of sure signals in noise, *Journ. Appl. Phys.*, **25** (1954), 76–82.

R. C. Cameron: [1*] The translation pathology of Wiener space, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 623–627.

R. C. Cameron and W. T. Martin: [1*] Transformations of Wiener integrals under translations, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 386–396.
[2*] Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 184–219.
[3*] Transformations of Wiener integrals by nonlinear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 253–283.

R. C. Cameron and R. E. Fagen: [1*] Nonlinear transformations of Volterra type in Wiener space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 552–575.

Chiang Tse-pei: [1*] On the estimation of regression coefficients of a continuous parameter time series with a stationary residual, *Теория вероят. и ее примен.*, **4** (1959), 405—423.

J. Chover and J. Feldman: [1*] On positive-definite integral kernels and a related quadratic form, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 405–423.

A. Hanen: [1*] Quelques problémes de tests d'hypothese et d'estimation en théorie des communications, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 3940–3942.
[2*] Étude géometrique du maximum de vraisemblance pour processes stochastiques laplaciens, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 4100–4101.

C. W. Helstrom: [1*] *Statistical Theory of Signal Detection*, London, 1959.

G. A. Hunt: [1*] Случайные преобразования Фурье, сб. *Математика*, **2** (1958), 87—114.

J. Feldman: [1*] Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 699–708. (Corrections: uo. **9** (1959), 1295–1296).

S. Kakutani: [1*] On equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 214–224.

C. Kraft: [1*] Some conditions for consistency and uniform consistence of statistical procedures, *Univ. Calif. Publ. Stat.*, **2** (1955), 125–142.

M. Loéve: [1*] *Теория вероятностей*, Москва, 1961.

J. H. Laning and R. H. Battin: [1*] *Случайные процессы в задачах автоматического управления*, Москва. 1958.

H. B. Mann and P. B. Moranda: [1*] On the efficiency of the least square estimates of parameters in the Ornstein-Uhlenbeck process, *Sankhya*, **13** (1954), 351–358.

G. Maruyama [1*] The harmonic analysis of stationary stochastic processes, *Mem. Fac. Sci. Kyusu Univ.*, **A4** (1949), 45–106.

[5] A. M. Jaglom összeállítása.

[2*] Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Mat. Palermo*, **4** (1955), 1–43.

P. A. P. Moran: [1*] Estimation methods for evolutive processes, *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, **13** (1951), 141–146.

W. W. Peterson, T. G. Birdsall and W. C. Fox: [1*] Теория обнаружения сигналов, сб. *Теория информации и ее приложения*, Москва, 1959, 210—274.

T. S. Pitcher: [1*] Likelihood ratios of Gaussian processes, *Ark. för Mat.*, **4** (1960), 35–44.

E. Reich and P. Swerling: [1*] The detection of a sine wave in Gaussian noise, *J. Appl. Phys.*, **24** (1954), 289–296.

T. Seguchi and N. Ikeda: [1*] Note on the statistical inferences of certain continuous stochastic processes, *Mem. Fac. Sci. Kyusu Univ.*, **A8** (1954), 187–199.

T. Seidman: [1*] Linear transformations of a functional integral, I., *Commun. pure and appl. Math.*, **12** (1959), 611–621.

I. E. Segal: [1*] Distribution in Hilbert space and canonical systems of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 12–41.

D. Slepian: [1*] Estimation of signal parameters in the presence of noise, *Trans. IRE*, **Pgit-3** (1954), 68–89.

[2*] Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise, *Trans. IRE*, Pgit-**4** (1958), 65–68.

Ch. Stribel: [1*] On the efficiency of the estimates of trend in the Ornstein-Uhlenbeck process, *Ann Math. Stat.*, **29** (1958), 192–200.

[2*] Densities for stochastic processes, *Ann. Math. Stat.*, **30** (1959), 559–567.

P. Swerling: [1*] Parameter estimation for wave-forms in additive Gaussian noise, *SIAM Journ.*, **7** (1959), 152–166.

D. C. Youla: [1*] The use of the method of maximum likelihood in estimating continuous-modulated intelligence which has been corrupted by noise, *Trans. IRE*, **Pgit-3** (1954), 90–105.

Ю. К. Беляев: [1*] Аналитические случайные процессы, *Теория вероят. и ее примен.* **4** (1959), 437—444.

[2*] Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов, *Теория вероят. и ее притен.*, **5** (1960), 128—131.

В. А. Волконский и Ю. А. Розанов: [1*] Некоторые предельные теоремы для случайных функций, *Теория вероят. и ее примен.*, **4** (1959), 186—207.

И. М. Гельфанд и А. М. Яглом: [1*] Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике, *Усп. матем. наук*, **11** (1956), 77—114.

[2*] О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции, *Усп. матем. наук*, **12** (1957), 3 —52.

И. В. Гирсанов [1*] О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, *Теор. вероят. и ее примен.*, **5** (1960), 314—330.

[2*] О фактор-процессах марковских процессов. *Теор. вероят. и ее примен.*, **6** (1961).

А. Н. Колмогоров: [1*] Стационарные последовательности в гильбертовом простванстве. *Бюлл. Моск. гос. ун-та*, **2** (1941), 3—40.

[2*] Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, *Изв. Акад. Наук СССР*, сер. матем., **5** (1941), 3—14.

В. А. Котельников: [1*] О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи, Матер. к 1 Всесоюзн. сьезду по вопросам техн. реконстр. дела связи, Москва, 1933.

В. П. Леонов: [1*] Применение характеристического функционала и семиинвариантов к эргодической теории стационарных процессов, *ДАН, СССР.* **133** (1960), 523—526.

М. С. Пинскер: [1*] *Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов*, Москва, 1960.

В. Ф. Писаренко: [1*] К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума, *Радиотехн. и электр.*, **5** (1960), № 12.

Ю. В. Прохоров: [1*] Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теор. вероят. и ее примен.*, **1** (1956), 177—238.

В. С. Пугачев: [1*] *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.* Москва, 1957.

Сборник переводных статей [1*] *Прием сигналов при наличии шума,* Москва, 1960.

А. В. Скороход: [1*] О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, 1. *Теор. вероят. и ее примен.*, **2** (1957), 417—443.

[2*] О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, 2. *Теор. вероят. и ее примен.*, **5** (1960), 45—53.

[3*] Про одне питання статистики гауссовских прочесив, *Доп. Укр. АН* (1960).

В. В. Солодовников: [1*] *Введение в статистическую динамику систем автоматического управления,* Москва—Ленинград, 1952.

А. М. Яглом: [1*] Введение в теорию стационарных случайных функций, *Усп. матем. наук,* **7** (1952), 3—168.

[2*] Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, *Тр. Моск. матем. общ-ва,* **4** (1955), 237—278.

[3*] Корреляционная теория процессов со случайными стационарными приращениями. *Матем. сб.*, **37 (79)**, (1955), 141—196.

Fordította: dr. Korodi Albert
a műszaki tudományok
kandidátusa

Ára 31,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XV. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1965

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XV. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kézir atok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21 (Magyar Nemzet Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32 (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae.
2. Acta Physica Hungaricae.

BOLYAI JÁNOS — A KATONA

Írta: SARLÓSKA ERNŐ

„... der Menschheit den möglichst großen Dienst zu leisten ... worein er so sehr sein höchstes Glück setzt, daß er seinen eigenen Wert einzig nach der Fähigkeit bemißt und sich selbst stets nur in dem Maße schätzt, als er zu seiner eigenen Veredelung und somit zur Ausbildung des ganzen Menschengeschlechts beizutragen Kraft in sich fühlt."
Bolyai János Lembergben János főherceghez.

Emlékezésül Szabó Péterre

Az idegenek érdeklődésére itthon is kíváncsiság ébred, mit is műveltek a Bolyaiak. De a vélemény megnyilatkozása tetteikről sokáig várat magára. Már 1884-et írnak, mikor SZILY KÁLMÁN, a Magyar Tudományos Akadémia későbbi főtitkára egy osztályülésen adatokat terjeszt elő BOLYAI FARKASról[1]. BOLYAI JÁNOSról csak mellékesen tesz említést pontatlan forrásból szerzett értesüléseket hitetvén el hallgatóival. „Eszméi a fennálló világrendtől teljesen eltérőkké váltak", jelenti ki SZILY KÁLMÁN összefoglalva tudakozódásának eredményét. „Valami sajátságos cynismus lepte el az egész embert, s mint elzüllött genie halt meg."

Később SCHMIDT FERENC nyújt életrajzi vázlatot BOLYAI JÁNOSról, mikor több évtizedes vágyakozása után áldozatkész támogatásával SUTÁK fordításában végre magyarul is megjelenik az *Appendix*. Értesülései számára sem engednek meg más következtetést, mint a sajnálkozó distanciát. „Magával és a világgal meghasonolva" meddő maradt minden elmélkedése, vélekedik SCHMIDT FERENC.[2]

Száz esztendővel BOLYAI JÁNOS születése után Kolozsvárott ünnepséget rendeznek tiszteletére. Az ünnepi szónok, SCHLESINGER sem tud mást megállapítani, mint amit már előtte is hangoztattak. SCHLESINGER szerint GAUSS magatartása, az elismerés teljes kimaradása ferdíti el BOLYAI JÁNOS kapcsolatait társadalmával. „Az elismerést beteges önmagasztalással akarja pótolni", fejtegeti nézetét SCHLESINGER, „minek következtében az ő szenvedélyes ugyan, de személyes ismerősei tanúsága szerint rendkívül szeretetreméltó természete ingerlékenyre és bizalmatlankodóra változik; büszkén és elzárkózva kerüli a körét, személyes bátorsága viszálykodó, igazságszeretete sértő ridegséggé fajul."[3]

A mindenkinél jobban tájékozott DÁVID LAJOS sem enyhíti végső következtetésében BOLYAI JÁNOS életformájáról elterjedt ítélkezést. „Ha nehéz anyai öröksége is ingerlékennyé tette már gyermekkorától fogva", írja DÁVID LAJOS, „csak méginkább fokozódhattak e vonások a várva-várt dicsőség elmaradása és elsőbbségének veszélyeztetése miatt. A személyes bátorságot és igazságérzést har-

[1] SZILY KÁLMÁN: Adatok Bolyai Farkas életrajzához. Budapest, 1884. *Értekezések a mathematikai tudományok köréből.* Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia. XI. köt. IX. sz. 1884.

[2] J. BOLYAI: *Scientia spatii absolute vera.* Előszóval, magyar fordítással s magyarázatokkal Suták Józseftől. Bolyai J. életrajzával Schmidt F.-től. Budapest, 1897. XXVII. 1.

[3] SCHLESINGER LAJOS: Bolyai János. A kolozsvári Ferencz-József m. kir. Tudomány Egyetem Bolyai-ünepén, 1903. jan. 15. mondott emlékbeszéd. *Mathematikai és Physikai Lapok,* Budapest, 1903. XII. k. 74. l.

monikusan egyeztető kedves ifjúból mindinkább nehéz természetű és ridegen gondolkodó férfi lett. ... az alig korlátozó polgári életben mégjobban elferdült a viselkedése. Környezete csak a kórjeleket látta s ezekért bírálta, hibáztatta nagyonis hangosan. Ő ellenben büszke lelkének nagy, fájdalmas sebét hallgatagon hordozta magában."[4]

Mint szilárd, megingathatatlan tény plántálódik tovább az egyszer megformulázott elmarasztaló ítélet, és ünnepségekről ünnepségekre vonszolódik ugyanannak a leszögezése: „Lassankint meghasonlott mindenkivel", ismétli BERZEVICZY ALBERT is az annyiszor hangoztatott vélekedést, mikor megint száz esztendőre tekint vissza a magyar tudomány, és az *Appendix* megjelenésének centenáriumát üli meg a legmagasabb fórumon, a Magyar Tudományos Akadémia ünnepi ülésén.[5]

Így aztán érthető, ha egy lexikon végső rövidséggel csak annyit mond a gondolat mellett a gondolkodóról, amennyit a tapintatos rövidség megenged: „Munkáját kortársai — GAUSS kivételével — nem értették meg és nem méltányolták. Pedig a kérdés felvetése és kutatása időszerű volt. ... BOLYAI JÁNOS eredményei annál figyelemre méltóbbak, mert rendkívül nehéz anyagi viszonyok és kezdetleges körülmények között, elszigetelten, a matematikai alkotómunka lehetőségétől megfosztva élte életét. ... Az elismerés hiánya mélységesen elkeserítette; önmagával meghasonlottan halt meg."[6]

Egyben mindenkinek egyforma a nézete: BOLYAI JÁNOS pályája nem úgy alakult, mint ahogy indult. BOLYAI JÁNOS 1822 szeptemberében fejezi be a bécsi „Ingenieur Akademie" VII., utolsó osztályát. 1822. szeptember 6-án August Freyherr von HERZOGENBERG, k. k. Generalmajor, und Lokal-Direktor der Ingenieur-Akademie felterjesztést tesz János Főherceghez, melyben a 9 rangelső növendéket az Akadémia VII. osztályában előléptetésre javasolja „k. k. Ingenieurs-Korps-Kadett" címmel a „k. k. Genie-Korps" kötelékébe. „Nach meinen besten Wissen und Gewissen", írja HERZOGENBERG a felterjesztésében, „fühle ich mich verpflichtet nachstehende Zöglinge der 7-ten Klasse — von welchen ich die innigste Ueberzeugung hege: dass sie alle — der letzte: wie der erste zum ausgezeichneten Dienste des k. k. Genie-Korps, unter der dreifachen Hinsicht der Moralität, des Fleisses, und der Geschicklichkeit, vollkommen geeignet sind — és itt következik a 9 rangelső növendék felsorolása név szerint — Eueren Kais. Hoheit zu k. k. Ingenieurs-Korps-Kadetten ganz gehorsamst vorzuschlagen."[7]

A rangsorolás, az osztályozás a tanároknak és az akadémiai ifjúságnak nyilvános szavazatával történt, minthogy "deren (der akad. Jugend) Beurtheilung in solchen Fällen stets als unparteiisch, und ganz gegründet bewähret werden." A rangsorolás két tanár és az öt első növendék megkérdezése („Rapport") alapján lett eldöntve. HERZOGENBERG jelentése szerint, a két tanár BOLYAIt teszi az első helyre,

[4] DÁVID LAJOS: *A két Bolyai élete és munkássága*, Budapest, 1923. 101. l.

[5] *A Magyar Tudományos Akadémia ünnepi ülése Bolyai Farkas Tentamenje és Bolyai János Appendixe megjelenésének centenariuma alkalmából* 1932. *február* 22-én, Budapest, 1932. l. Berzeviczy Albert ig. és t. t. elnök megnyitó beszéde. 3. l.

[6] *Új Magyar Lexikon*, Budapest, 1959.

[7] Adatainkat a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattárában őrzött Bolyai-gyűjteményből vettük. Bolyai János katonai pályafutására vonatkozó iratok részben eredetiek, részben Szabó Péter bécsi kutatásai alkalmával az eredetiekről készült másolatok és kivonatok. Ahol külön megjegyzést nem teszünk, ott adatközlésünkhöz a forrás az Akadémia Könyvtárának Bolyai-gyűjteménye volt.

a növendékek azonban egy CZERMAK nevezetűt. BOLYAI előnye azonban csak az erődítéstan és a polgári építészet szakjaira értendő, és nem terjed ki a többi tudományos szakban szerzett ismeretekre, amelyekben a 3. osztálytól kezdve CZERMAK az első helyet mindig megtartotta. Egyébként a 9 első növendékben nincs eltérés. CZERMAK a szavazatban 10 pontot szerez, Bolyai 14-et. BOLYAI a félévi vizsgán is második volt. Természetesen BOLYAI is szavazott, és a rangsorolást egészen a többivel egyezően javasolta. Magára nem szavazott senki sem. BOLYAIval együtt 19 növendék végzett.

A polgári építészetet, „bürg. Baukunst", Ferdinand REUTER, „Lieut. im Génie Corps", tanította. Osztályozása BOLYAIról: Fähigkeiten: Vorzüglich; Fleiss: I. Klasse mit Vorzug; Theorie: I. Klasse mit Vorzug; Zeichnung: I. Klasse; Fortgang: I. Klasse mit Vorzug.

Az erődítéstant, „Befestigungskunst", Mich. LENKER, „Major im Ing. Corps", tanította. Szerinte is BOLYAI: „Fähigkeiten: Sehr gute; Verwendung: I. Klasse mit Vorzug; Fortgang: I. Klasse mit Vorzug.

Következményképpen a János Főherceg elé került előterjesztésben „Johann Bolyai de Bolya" a rangsorban a 2. helyre került. Minősítése: „Fähigkeiten: Vorzüglich; Fleiss: I. Klasse mit Vorzug; Aufführung: I. Klasse mit Vorzug." A magaviselet rovatot, „Aufführung", maga HERZOGENBERG töltötte ki.

János Főherceg már szeptember 7-én intézkedik az előterjesztésre. Sajátkezűleg írja az ügyirat bevezető indokolását: „Bei dem Umstand, dass nur noch wenige Lieutenants Stellen im Ing. Corps offen sind, finde mich veranlasst diessmal nur 7 Stellen zu bestzen". Majd így folytatódik: „Ich ernenne nach dem Vorschlage der . . . vom gestrigen Tage die Zőglinge der 7-ten Klasse Joseph Czermak, Johann Bolyai de Bolya, Primus Adamich, Joseph Kirchner, Karl Hurecz, Friedrich Baron Hacke, und Moritz Grafen Braida zu Kadetten in k. k. Ing.-Corps und das Hauptgenieamt wird sich bei dem niederösterreichischen Generalkommando verwenden, dass ihnen vom heutigen Tage an die Gage bei dem hiesigen Provinzial Kriegszahlamte angewiesen werde."

János Főherceg megjegyzi még: „Für die Zukunft werde ich aus der Eingangs erwähnten Ursache mich bemüssiget sehen die Zahl der zu ernennenden Corps Cadetten nach dem Verhältnisse an offenen Lieutenants Stellen zu beschränken und dürften im Durchschnitte kaum 6 höchstens 8 dazu ernannt werden. Es versteht sich von selbst, dass Ich bei der Auswahl derselben, auf das strengste verfahren und nur diejenigen berücksichtigen werde, welche verbunden mit den ausgezeichnetesten Fähigkeiten die eifrigsten Verwendung beweisen und die grössten Fortschritte gemacht haben werden. Hiebei muss Ich noch bemerken, dass die Ernennung zum Corps-Cadeten keineswegs die Folge nach sich zieht zum Offizieren im Ing. Corps befördert zu werden, indem hiezu nur die fortgesetzte angestrengteste eifrige Verwendung und der Erfolg der Prüfungen berechtigen sollen." Aztán János Főherceg még ezeket fűzi hozzá: „Hinsichtlich der Prüfungen der 7. und 8. Classe, werde Ich der . . . I. (Direktion) da ich die gegenwärtige Weise dem Zwecke nicht entsprechend finde, zu seiner Zeit meine Willensmeinung bekannt geben."

A szigorú kikötések dacára egy esztendő múlva BOLYAI JÁNOS kinevezést kap. „Ich habe befunden", rendelkezik János Főherceg Bécsben 1823. szeptember 1-én aláírt okmányon, „den Ingenieurs Corps Cadetten Johann Bolyai de Bolya in Rücksicht seiner Fähigkeiten, den sich erworbenen Kenntnisse und des bewiesenen guten moralischen Betragens mit 1-ten des laufenden Monats September zum Unter Lieutenant im k. k. Ingenieurs Corps zu ernennen" (l. 1. és 2. képmelléklet).

1823. szeptember 2-ról van keltezve a dekrétum, mely a kinevezéseket közli az „Ingenieur Akademie" igazgatóságával. „Seine Kais. Hoheit der General Genie Direktor haben die nachbenannten Ing. Corps-Cadetten als Joseph Czermak, Johann Bolyai de Bolya, Primus Adamich, Joseph Kirchner, Karl Hurez, Moritz Graf Braida und Friedrich Baron Hacke in Anbetracht ihrer bewiesenen Kenntnisse ihres ausgezeichneten Fleisses zu Unterlieutenants im k. k. Ingenieurs-Corps von 1-ten des gegenwärtigen Monats September zu ernennen befunden." A dekrétumhoz készült fogalmazványon intézkedés történik a rangsorolás napjáról is. CZERMAK rangja 1823. szeptember 1-től számítódik, BOLYAI rangja szeptember 3-tól, ADAMICH rangja szeptember 5-től, stb. Vagyis a rangban első a kinevezés napjától számítja a rangját, minden következő két nappal később.

A dekrétum közli a kinevezettek beosztását is. BOLYAI JÁNOSt Temesvárra küldik. „Die Bestimmung zur künftigen Dienstleistung für dieselben ist folgende: ... Bolyai de Bolya zur Fortifications-Direction in Temeswar, ..."

BOLYAI FARKAS megelégedett. KENDEFFI ÁDÁM grófnak ezt írja: „A fiam minden tudósítások szerint 1-a stbris 1823 igen ditséretesen censurázott Hertzeg Jánosnak nagy megelégedésével, úgy hogy ott helybe mindjárt Port d'épét adott s két hét múlva mindjárt kiküldötte egy több esztendeig tartó fontos munkára Temesvárra, a honnan fel-írtak volt, hogy egy ügyes Ingenieur Tisztre van szükség."[8]

Temesvár! ...

1823. november 3-án írja BOLYAI JÁNOS nevezetes levelét az apjának: „Kedves Édes Apám! Annyi teménytelen meg írni valóm van az ujj találmányaimról, hogy éppen most nem tudok másként segíteni magamon, mintha semmibe se ereszkedem belé, tsak egy quartára írok; ...... A fel-tételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, el-készítem, s mód leszsz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba nints kitalálva, de az az út, mellyen mentem, tsaknem bizonyosan igérte a tzél el-érésit, ha az egyébaránt lehetséges; nints meg, de ollyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna el-veszni; ha meg-látja Édes Apám meg-esméri; most többet nem szollhatok, tsak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem; mind az, valamint eddig küldöttem, tsak kártyaház a toronyhoz képpest."

Et incipit tragoedia ...

BOLYAI JÁNOS mintegy 10 évvel később folyamodványt ír János Főherceghez. Felemelt javadalmazással szeretne nyugalomba vonulni. Indokolásul katonai pályáján ellátott különleges megbizatásairól beszél. „Dürfte er als Ingenieur, denn doch schon dadurch, dass er die Esplanaden der beiden Festungen Temesvár und Arad, in deren jeder drei ziemlich ausgedehnte Ortschaften liegen, grössten Theils, und zwar der Bestättigung seiner Herren Vorgesetzten gemäss, mit einer unübertrefflichen Genauigkeit aufgenommen hat (l. 3., 4. és 5. képmellékletet), dem Staate keinen ganz und gar unbedeutenden Dienst geleistet haben — sowohl in Ansehung des Resultates selbst, als auch in so fern Aufnahme zwar Eine der den Kopf am Wenigsten in Anspruch nehmenden, gleichwohl Eine der beschwerlichsten Arbeiten

[8] DÁVID L.: *A két Bolyai.* 85. l.

des Ingenieurs ist. Auch besorgte er Theils die Posten Grosswardein und Szegedin, war längere Zeit der Arader Local Direction allein zugetheilt, und führte sogar, nebst mehreren anderen Malen, statt des damals mit Urlaub in Wien gewesenen Herrn Ingenieurs Majors von Dósa, vier Monate hindurch die Local-Direction ganz allein Welches Alles die betreffenden jährlichen Verwendungs Rapporta detaillirter ausweisen."

BOLYAI JÁNOS felettesei a jelek szerint annak idején egyet-mást másként ítéltek meg. 1826. december 15-én Bécsben az előléptetésekről tárgyalnak az illetékes helyen. „Haupt-Genie-Amt" előterjesztése szerint: „Die ältesten Unterlieutenants sind dermalen nach der Rangsordnung v. Miksa Alexander, Czermak Joseph, Bolyai de Bolya Johann, Adamich Primus, Kirchner Joseph." A hivatalos vélemény szerint Miksa nem érdemli meg az előléptetést, de nem érdemli meg Bolyai sem. „Ebenso wenig verdient auch der Lieutenant Bolyai das Avancement, da er vor einigen Jahren von seinem Direktor dem Haupt-Genie-Amte als ein im Dienste sehr fahrlässiger Offizier geschildert wurde, und auf jetzt noch keine Beweise seiner Besserung vorliegen." Mely oknál fogva: „Das Haupt-Genie-Amt erlaubt sich daher für die vacanten drei Oberlieutenants-Stellen mit Übergang der Lieutenants Miksa und Bolyai die Lieutenants Czermak, Adamich und Kirchner ehrerbiethiegst vorzuschlagen." (L. 6. képmelléklet.)

Csak 1827. szeptember 12-én tesz javaslatot BOLYAI előléptetésére a „Haupt-Genie-Amt": „Da der schon einige Mahle übergangene Ingenieurs-Unterlieutenant Johann Bolyai de Bolya nach den ehrerbiethigst im 2-ten Anschlusse mitfolgenden von der Fortif. Local Direktion zu Arad in folge hierortigen Auftrags erstatteten gewissenhaften Äusserung von 31-ten März 1827 seinen Conduit sehr gebessert hat, so glaubt das Haupt-Genie-Amt Eueren ... bitten zu dürfen, diesen Unterlieutenant nunmehr zum Oberlieutenante gnädigst vorrücken zu lassen." (L. 6. képmelléklet.)

Az előterjesztésre BOLYAI előlép, és erről az aradi várparancsnokság leíratot kap. „Wien, am 12-ten September 1827. N° 3255. Da nach der Äusserung des ... vom 31-ten März d. J. N° 69 des Ingenieurs Unterl. Johann Bolyai de Bolya seine Conduite sehr gebessert hat, so haben seine Kais. Hoheit des Gen.-Genie-Direktors denselben bei einigen sich ergebenen Appertur mit 8-ten September 1827 zum Oberlieutenante in k. k. Ingenieurs-Corps zu ernennen geruhet." Egyben meghagyják, hogy adják tudtára BOLYAInak: " ... demnach diesen Offizier von seiner Beförderung unter Aushändigung des hier mitfolgenden Dekretes mit dem Beifügen zu verständigen, dass seine weitere Vorrückung nur seiner fortgesetzten guten Conduite abhängen wird." (L. 7. képmelléklet.)

BOLYAI FARKAS már esztendőkkel előbb intette a fiát, már 1820 tavaszán teli aggodalommal írja a levelét: " ... az Istenért kérlek! haggy békét a' parallelláknak — úgy írtózz tölle mint akármitsoda feslett társalkodástól, éppen úgy megfoszthat minden idödtöl, egésségedtöl, tsendességedtöl 's egész életed boldogságától ... Tanulj te az én példámon; én a parallélákat akarva megtudni, tudatlan maradtam, életem 's idöm virágját mind az vette el — sőt minden azutáni hibáimnak töve mind ott volt ..." És később megint csak azt hajtogatja az apa a fiának: „Ha nekem ... sikerült volna (a parallelák elméletét rendbehozni) egészen más ember vált volna belőlem, nem házasodtam volna kétszer, sem magamat a kertészetre, a költészetre, sem pedig a fazekasságra nem adtam volna, elvesztett kedvemet másutt keresve; erkölcsileg jobb ember vált volna belőlem és hivatalomban és háztartásomban a helyemet jobban töltöttem volna be. A ki boldog, könynyebben boldogít másokat is; mi csurogjon az olyan forrásból, mely maga is száraz? Egyetlen órát se vesztegess vele. Jutalmat nem hoz, és megmérgezi az egész életet."

1830. augusztus 25-én N° 774 szám alatt a „Fortif. Districtdirektion in Ungarn" felterjesztést intéz János Főherceghez: „Die Arader Fort. Local Direktion hat ... die Anzeige hieher erstattet, dass der daselbst angestellte Ing. Oberlieut. v. Bolyai gegenwärtig wieder am Fieber erkrankt sei." Mivel az ottani éghajlatot nem tűri az egészsége, jelentik BOLYAIról, a szolgálat érdekében egy másik kerületbe volna áthelyezendő. Az év legnagyobb részében BOLYAI beteg, és nem tud szolgálatot teljesíteni. Szükséges tehát az áthelyezés, de nem ugyanabban a kerületben. Kérik, hogy BOLYAIt egy más tartományba helyezzék át.

1830. szeptember 2-án már intézkednek is Bécsben BOLYAI ügyében ."Wegen wiederholten Erkrankung des Ingenieur Oberlieutenant v. Bolyai auf seinem dermaligen Anstellungsposten zu Arad haben Seine K. H. des G. G. Dir. befunden denselben 'zur Dienstleistung bei der Fortif. Districtdirektion zu Lemberg übersetzen."

És BOLYAI JÁNOS 1831 tavaszán megérkezik Lembergbe.

És júniusban — az „ujj más világ" már nyomtatásban is olvasható. Az apa, BOLYAI FARKAS már küldi is a nagy magasságokban járó GAUSSnak. „Légy szíves", hangzik a kérés, „ítéld meg éles, átható szemeddel és kímélet nélkül írd meg véleményed válaszodban, amelyet epedve várok."[9]

És csak ennyi, és semmi más nem történt a korábbi emlékezetes nap óta? ... 1823! ... Szeptember elseje! ... „Ich habe befunden den Ingenieurs Corps Cadetten Johann Bolyai de Bolya in Rücksicht seiner Fähigkeiten, den sich erworbenen Kenntnisse und des bewiesenen guten moralischen Betragens mit 1-ten des laufenden Monats September zum Unter Lieutenant im k. k. Ingenieurs Corps zu ernennen." ... Tulajdonképp mibe került az „új, még fogalma szerint sem sejtett tudomány, a tér tudománya"? ... Mennyiben igaz a közhiedelem?

„Johann Bolyai wurde vom Vater in die Mathematik eingeführt", írja HANS JOACHIM STÖRIG az 1957-ben W. Kohlhammer stuttgarti kiadónál megjelent művében, *Kleine Weltgeschichte der Wissenschaft* 445. oldalán. „Mit 13 Jahren meisterte er die Infinitesimalrechnung, mit fünfzehn begann er in Wien zu studieren, mit zwanzig wurde er Militäringenieur, 1823, mit 21 Jahren also, schickte der junge Bolyai, der seine Zeit zwischen Militärdienst, zahlreichen Duellen, Geigenspielen und mathematischen Studien aufteilte, seinem Vater eine Abhandlung *Die absolute Wissenschaft des Raumes.*"

STÖRIG vélekedésének a forrása alighanem a kiváló ERIC TEMPLE BELL hiedelme. ERIC TEMPLE BELL, „Professor of Mathematics, California Institute of Technology, Pasadena; author of Men of Mathematics" ugyanis az *Encyclopaedia Britannica* 1960-ban megjelent kiadásában ezt írja: „In the army, young Bolyai divided his time between his duties, dueling, violin playing and mathematics. In 1823, in his 22nd year, he sent his father the draft of his Absolute Science of Space, a complete and consistent system of geometry constructed without assumption of Euclid's parallel postulate."

[9] DÁVID L.: A két Bolyai. 95. l.

De hasonlóan képzeli el magának BOLYAI életét más is. ETTORE CARRUCCIO, a matematika másik történésze az *Enciclopedia Italiana* 1930-ból származó kiadásában így ír: „Il Bolyai segui la carriera militare fino all' anno 1833, in cui fu nominato capitano in ritiro. Valentissimo schermitore e appassionato dilettante di violino, fu d'indole originale e visse in solitudine tra le sue meditazioni." ...

Megfigyelték, leírták, analizálták már, hogyan alakul annak a napja, az élete, akinek a figyelmét a matematika kérdései nyűgözik le? Lehet-e valaki egyszer mélyen magaelé merengő, majd hirtelen mindent felejtve katonásan friss a kötelességteljesítésben, eleven a mások ügyességének kijátszásában, és önfeledetten elégedett a hegedűjáték örömében? Milyen a matematikus az „ihletettség" pillanatában? Jár, ül, virraszt, szendergéséből ébred, vagy éppenséggel eszik, iszik és — ölelkezik? Mi fér meg mivel, mikor a Gondolat előtoppan? Ki kutatta az ilyesmit? Ki gondolkozott el az alkalmi találgatásokon? Milyen is tulajdonképp a „problémamegoldó gondolkodás"? Vagy akármit lehet állítani — megrökönyödés nélkül?

Gradus ad Parnassum a címe az egyik „drámai költeménynek", mely BOLYAI JÁNOS sorsát szándékozik a színpadon bemutatni.[10] A harmadik felvonásban BOLYAI JÁNOSt látjuk „szegényes lakásában" Marosvásárhelyt. A költő szárnyaló fantáziája szerint JÁNOS szobájában van íróasztal, van könyvespolc, és van természetesen imazsámoly is. De látható még a színen „jobboldalt szekrény, hátul ágy, éjjeli szekrény és szék". A tisztes, nyugalmazott kapitányi szobába a háttér közepén ajtó nyílik. Az ajtótól jobbra-balra további szekrény illetve pohárszék van állítva. A „szegényes lakás" inventára azonban ezzel még nem kész. A „drámai költemény" feltevésében JÁNOS annyira tágasan él, hogy az előtérbe a középen még bátran állítható egy asztal három székkel. Amikor a függöny felgördül, „az íróasztalon két, csaknem egészen leégett gyertya ég, az ágy meg van vetve, de látszik, hogy abban senki sem aludt". BOLYAI JÁNOS ugyanis már a harmadik reggelre ébred az éjt álmatlanul töltve szüntelenül problémáival küzködve. A gondolataitól zaklatva még mindig az „íróasztalnál ül könyvek és írások között". Amikor a színen megpillantjuk, BOLYAI JÁNOS „egy könyvet olvas, majd hátra dőlve, behunyt szemmel gondolkodik, azután újra föltekint és idegesen tollat ragad". „Nem tévedek!" — szólal meg BOLYAI JÁNOS három át nem aludt éjszaka után a szakadatlan elmebeli erőfeszítés eredményeképpen. Ebben a pillanatban ZSUZSA, JÁNOS „tejtestvére" nyit be igen óvatosan. „Tudtam!" mormolja magában ZSUZSA amint rátekint a használatlan ágyra. ZSUZSA a reggelit hozza JÁNOSnak, tejet és kenyeret. Félhangon köszönti JÁNOSt: „Dí-csér-tes-sék!" De JÁNOS nem vesz semmiről sem tudomást, gondolataival van elfoglalva, sebesen jegyezget. ZSUZSA szelíden állítja meg JÁNOSt gondolatai kergetésében, kedvesen figyelmezteti, világos nappal van, térjen már pihenni, de JÁNOS makacsul hangoztatja: „Lekésni az alvásról még senki sem tudott!" ....

A „drámai költemény", *Gradus ad Parnassum* 1923-ban jelent meg Budapesten. Kiadónak nincs megjelölve senki. A nyomda, a Globus nyomda, csak szerényen jelzi, hogy a könyv a műhelyében készült, finom, fehér, famentes papíron, ízléses borítóval, tehát az akkori viszonyok között luxuskiadásban. Minden jel arra mutat, hogy a szerző saját költségén jelent meg, egyszerűen a „múzsák kedvéért". „Írta Tolnay Lajos" olvasható a borítón, olvasható a címlapon. Ki volt ez a TOLNAY LAJOS? Személyéről jelenleg még semmit sem állíthatunk határozottan. Egy bizo-

[10] TOLNAY LAJOS: *Gradus ad Parnassum*. Drámai költemény. Budapest, 1923.

nyos, az 1902. március 19-én elhunyt TOLNAI LAJOS nem a TOLNAY LAJOS, aki a „drámai költeményt" írta a BOLYAIAKról. Különös világot vet irodalomtörténészeink egészséges ítélőképességére, hogy kísérlet történhetett a *Gradus ad Parnassum* besorolására Tolnai Lajos művei közé. A „drámai költemény" a BOLYAIAKról egészen más eszmevilágot hordoz, mint ami TOLNAI LAJOSt a leleplezésekre ingerelte. TOLNAY LAJOSnak más a műveltsége, mint a TOLNAI LAJOSnak. A *Gradus ad Parnassum* zenei kompozíciókat is tartalmaz. És ezek félreérthetetlenül megjelölik azt a társadalmi réteget, ahol az ilyesmik kihajthattak.

A *Gradus ad Parnassum* megjelenése előtt az Akadémia egyik irodalmi pályázatán is részt vett. 1920. november 22-én a harmincnegyedik akadémiai ülésen HEINRICH GUSZTÁV, SZINNYEI FERENC, SOLYMOSSY SÁNDOR jelentést tesz a KÓCZÁN-pályázatról.[11] „A nagy matematikus Bolyai Jánosnak megrendítő élettörténete hálás drámatárgyul kínálkozott két szerzőnek is", közli a bírálóbizottság. „Az egyiké, A két Bolyai, elhibázott gyenge alkotás. ... „Értékesebb, fegyelmezettebb a másik mű, Gradus ad Parnassum. ... egy fékezhetetlen nagy tehetség szomorú élettörténetének elég hű ábrázolása. Kezdi 1827. évvel, midőn Bolyai János, a fiú, Bécsben lemond tiszti rangjáról és hazajön, hogy kis birtokukon, Domáldon, gazdálkodjék s a csendes elvonultságban zavartalanul foglalkozhassék elméleti rendszere teljes kiépítésével. Otthon öregedő apja mellett fiatal asszonyt talál, aki rögtön kacérkodni kezd vele. Eleinte azt hisszük, talán a fiatal Bolyai hódító férfiassága tántorítja meg pillanatra, de később kiderül, hogy a mostoha alapjában csélcsap, élveteg teremtés, kitől János méltó megbotránkozással fordul el. Növeli ellenszenvét fiatal mostohája iránt az a szent kegyelet, mellyel a fiú elhalt édesanyja emlékén csüng. Az összezördülésbe belesodródik apja is. János szakít velük s kivonul a kis birtokra. Ott tejtestvére, a belé szerelmes Zsuzsa él mellette és viszi háztartását. János már előbb megírta absolut geometriája alaptervezetét: az Appendixet; kint tovább dolgozik, ... várja emésztő türelmetlenséggel Gauss feleletét az Appendixre. Annakidején apjára, Gauss ifjúkori barátjára bízta, hogy küldje el saját Tentamenéhez mellékelve az Appendixet is. Feleletre azonban hasztalan vár. ... Apja, az agg tudós, halálos ágyáról küld fiának búcsúlevelet. Közli vele, hogy művét valóban elküldte Gaussnak, aki a küldeményre felelt is, de az Appendixről nem tett benn említést. ... Nem vehetjük ki tisztán, de sejthetjük, hogy Bolyainé ádáz gyűlöletében annakidején kivette a küldeményből János értekezését s az Gauss szeme elé soha sem került." .... „A darab", állapítják meg a jelentésttevő akadémikusok, „miként a vázlatból kitetszhetik, nagyjában híven kíséri a való történetet." ... És a „való történethez" bizonyára az is hozzátartozik, hogy 1860 tavaszán az egész BOLYAI-család még él. Él tehát BOLYAI JÁNOS, él BOLYAI FARKAS, él a mostoha, és él ZSUZSA, a „tejtestvér", aki sohasem élt. Amiért aztán úgy végződik a „való történet", ahogy az a „valóságban" volt. JÁNOSt végülis annyi indulat emészti a mostohája iránt, hogy amint újra a szeme elé kerül és megpillantja BOLYAInét, „elordítja magát és nekiugrik", olvashatjuk a színi utasításban. „Fejbevágja Bolyainét a hegedűvel, amely darabokra törik", szól tovább az intézkedés. „Leszakítja az asszonyról a gyászfátyolt, azzal fojtogatni kezdi." A sok indulatoskodás nem tesz jót JÁNOSnak. Egy hörgéssel hátratántorodik, JÁNOSt szélütés éri, összeesik és meghal. Kár, mert éppen két német úr érkezik, akik hozzák már JÁNOSnak az elismerés babérait ... Amit elcsodálkozva kérdezni lehet: hol

[11] *Akadémiai Értesítő.* 1920. évf. 31. köt. 218. l.

keresett tájékozódást HEINRICH GUSZTÁV, SZINNYEI FERENC, SOLYMOSSY SÁNDOR, mikor hozzáértéssel, szavahihetően, hivatalosan kellett nyilatkozniok? ... Menynyiben öregbítette a helyes ismeretet magán az Akadémián a BOLYAI-díj? ....

Milyen emberi közelséget enged meg egy nehéz, lenyűgöző probléma? Az összecsukott könyv DÜRER réveteg tekintetű asszonyának az ölében, a kibogozhatatlan feladatok melancholiája csábíthat egy Juppitert kíváncsiskodásra, mint egy önfeledten szendergő Antiope?

A kérdés korántsem mellékes. EGMONT COLERUS regényes életrajzot írt Leibnizről.[12] A „brachistochrone" problémája is szóba kerül benne. Találgatja, ki mit is csinált éppen, mikor a kérdés nyitjára talált. JAKOB BERNOULLI a késő esti órákban egy korsó sör mellett oldja meg öccse furfanggal feltett kérdését. LEIBNIZ útra indul, mikor tudomást szerez a feladatról. Míg a kocsi rázza, kényelmesen engedi át magát gondolatainak. S mire egy fogadóhoz ér, a „lemma" meg van oldva. NEWTON vacsora idején értesül, hogy mit is akarnak újra megtudni a tudós világban. Figyelmét megragadja a feladat, elfelejtkezik környezetéről, és tanakodásba merül. Az estéje azért nem borul fel. A „matematika démonjai" mosolyogva néznek össze, megint valaki, aki átlát a szövevényen. L'HOSPITAL a pásztoróra örömei között veszi elő az *Acta Eruditorum* füzetét, melyet az ifjabb BERNOULLI küldött meg neki. Ragyogó holdfénynél kezdi olvasni a levelet, óvatosan, hogy a mellette szendergő grófnő fel ne riadjon. De a grófnő csak csendben volt, és félig nyitott szemmel figyelt. Mikor megérti a helyzetet, suttogva biztatja a matematikust: „Tedd csak a vállamra a lapokat. Hadd legyek munkádban is segítségedre." És a különös „pult" gyökereiben éleszti az értelmet. Nincs megoldhatatlan rejtély.[13]

Nem kétséges, COLERUS az ötletet Liaisons dangereuses levelei között találta, és a különös „asztalkáról" C. MONNET metszetet is készített.[14] Csakhogy Choderlos de Laclos „kritikájában" egy „kanti" világról van szó! „Im Innern ist ein Universum auch!" És ebben a belső világban, akár az „égi mechanikában" könyörtelenül érvényesül a „gravitáció", és az erény feltartózhatatlanul hull bele a megsemmisítő mélységbe. A pokol „számító értelme" azonban más talányon dolgozik, mint a nyom, amit egy egyenesen gördülő kör kerületének egyik pontja leír. És ezért céljaihoz alapvetően más helyzet lehetséges, mint ami a matematikus számára „szükséges és elégséges".

BOLZANO a Wissenschaftslehre harmadik kötetében terjedelmesen értekezik az „Erfindungskunst" megfontolandó feltételeiről. Egyik figyelmeztetése: „Die Erfahrung lehrt, dass wir nicht jederzeit gleich fähig und aufgelegt zu dem Geschäfte des Nachdenkens sind. Es lässt sich auch leicht begreiffen, woher diess rühre. ... Wir müssen also, so viel es möglich ist, zu dem Geschäfte des Nachdenkens einen Zeitpunct auswählen, in dem wir dazu gehörig aufgelegt sind. Wir müssen gesund oder wenigstens von jeder solchen Krankheit frei sein, welche die Denkkraft lähmet oder das Aufmerken auf einen bestimmten Gegenstand hindert. Unser Gemüth muss sich ferner in Ruhe befinden, es muss kein fremder Gegenstand da seyn, der uns so anzieht, dass wir uns nicht von ihm losreissen können." Helyénvaló továbbá, ha abbanhagyjuk a töprengést, mihelyt a fáradtság jeleit észleljük magunkon. „Denn

[12] EGMONT COLERUS: *Leibniz.* Der Lebensroman eines weltumspannenden Geistes. Berlin, Wien, Leipzig, 1941.

[13] COLERUS: *Leibniz.* 570—572. l.

[14] CHODERLOS DE LACLOS: *Gefährliche Liebschaften,* Hyperion Verl. Berlin. I. köt. 152. oldalához mellékelt illusztráció, mely MONNET eredeti metszetéről készült.

nicht nur, dass wir bei schon erschöpfter Kraft ohne Erfolg arbeiten und nur Zeit verlieren, ja in Gefahr gerathen, Irrthum für Wahrheit anzunehmen; selbst unsere Gesundheit kann durch solche Anstrengungen einen sehr wesentlichen und schwer wieder zu hebenden Schaden erleiden."[15]

Szelíd derű ömlik el a „Paradoxien des Unendlichen" egyenletes érvelésén. Szinte érzékelni lehet a már leáldozó élet nyugalmát LIBOCH[16] kedves környezetében, ahol az értekezés gondolatsora elindul. Az ismeretközlés szempontjából természetesen mindegy a dikció formája. Az elegáncia, mondja BOLTZMANN, a suszterek és a szabók dolga.[17] Csakhogy minden beszéd egyszersmind tett is, és az emberi tett mindenkor duzzad a gondolkodás moráljától.

És milyen „morál" hordozza BOLYAI JÁNOS tudományos tettét? Mi volt számára az „új, még fogalma szerint sem sejtett tudomány, a tér tudománya"? Az talán, ami a két BERNOULLI számára a brachistochrone, a találékonyság mérkőzése? Tehetett BOLYAI JÁNOS úgy, mint LEIBNIZ, mint NEWTON, vagy éppenséggel úgy, ahogy COLERUS fantáziájában L'HOSPITAL? Csak egyszerűen egy értelmi ügyességen múlott, hogy „semmiből egy új, más világ" törjön magának utat az emberi gondolkodásba? A megbékélt élet csöndes, egyenletes, óvatos elmélkedésének az eredménye a *Tentamen* függeléke akárcsak a *„Paradoxien des Unendlichen"*? BOLYAI beszél a lendületről, mellyel célhoz ér. „. . . semilyen a legnagyobb mértékben is áthághatatlannak látszó akadály sem lohasztotta le bátorságomat. . . . Vígasztalva magamat SENECA szavaival: Suspice viros, etsi deciderint, magna conantes, ami annyit tesz: Becsüld a nagyra törekvő férfiakat bukásukban is, és új bátorságot merítve, még inkább fokozódó vággyal újra fogtam neki a támadásnak, és így váltakozó fordulatokkal folytatott küzdelmek közt és némely részleges és barátságtalan győzelem és terep-elfoglalás után végre az 1823. évben sikerült teljesen keresztül törnöm, ezt a minden módon megvihatatlan sziklavárat megrohannom és véglegesen bevennem és evvel egy új, még fogalma szerint sem sejtett tudományt, a tér tudományát megalapítanom."[18]

„Minden hivatalok közt leginkább szereti a katonaságot; csak az Otiumot szeretné inkább, melybe dolgozhatnék", írja BOLYAI FARKAS a fiáról 1825-ben Marosvásárhelyt tett látogatása alkalmából.[19] De hogy vágyakozott az „Otium" után BOLYAI JÁNOS? Mi volt a dinamikája a sóvárgásának, mikor eszméi sodrában állt? A beletörődés jegyében vette a katonaélet mindennapi nyűgét, vagy pedig lázongott és — keresve kereste az ürügyet, mellyel magát a szolgálatból kivonhatja? . . .

[15] BOLZANO: *Wissenschaftslehre,* Sulzbach, 1837. 3. köt. 383. l. §. 348. Noch einige Regeln, die gewisse, beim Denken zu beobachtende Umstände betreffen.

[16] BOLZANO: *Paradoxien des Unendlichen herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky.* Vorwort: Die merkwürdige Abhandlung über die Paradoxien des Unendlichen begann ihr Verfasser bereits im Jahre 1847 während eines ländlichen Aufenthaltes in Gesellschaft des Herausgebers auf der anmuthigen Villa zu Liboch bei Melnik.

[17] FRAENKEL, ADOLF: *Einleitung in die Mengenlehre,* Berlin, 1923. Vorwort z. 1. Aufl.: „. . .ich verweise gegenüber der Forderung nach „Eleganz" auf ein jüngst von Herrn Einstein (Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Braunschweig, 1917.) angeführtes Wort Boltzmanns: man solle die Eleganz Sache der Schneider und Schuster sein lassen."

[18] STÄCKEL PÁL: *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai,* I. rész. 81. l.

[19] DÁVID L.: *A két Bolyai.* 87. l.

1832-ben ZITTA őrnagy Olmützben így foglalja össze BOLYAI JÁNOS szolgálati idejét és helyét a minősítési lapon:

Diente in Wien als Corps-Cadet in der Ingenieur-Akademie unter der Direktion des Herrn Feldmarschall Lieutenants Br. Herzogenberg von 7. Sept. 1822 bis 1-ten Septemb. 1823.
Szolgálat: 1 esztendő

in Temesvar als Unterleutnant vom 1-ten September 1823 bis 10-ten April 1826 unter der Direktion des Herrn Oberstlieutn. von Doczy
Szolgálat: 2 év és 7 hónap

in Arad von 10 April 1826 bis 8. September 1827 quatalis unter der Direktion des Herrn Hauptmann Wolter dann als Oberleutnant unter der Direktionen des Herrn Major von Broglia bis 8-ten Dezember 1830
Szolgálat: 4 év és 8 hónap

in Lemberg vom 8 Dezember 1830 bis 11 Mai 1832 mit 14. März als Capitain Lieutnant unter dem Herrn Oberstleutnant von Zimmer
Szolgálat: 1 év és 5 hónap

in Olmütz von 11 Mai 1832 bis nun unter den gefertigten Herrn Direktor
Szolgálat: 6 hónap

Aradról tehát 1830. december 8-án lett útnak indítva Lembergbe. De mikor ért Lembergbe BOLYAI JÁNOS? Egy 1857. nov. 27-én kelt levelében BOLYAI JÁNOS úgy írja öccsének, GERGELYnek, hogy 1831 májusában Besztercén át utazott Lembergbe. Hol töltötte az időt közben és mivel?

1832. május 11-én BOLYAI JÁNOSt törlik a lembergi állományból és útnak indítják új szolgálati helyére Olmützbe. BOLYAI el is indul Lembergből még május 12-én, de csak július 10-én jelentkezik Olmützben. Itt szkeptikus emberekre talál és felelősségre vonják. A „Fortifications Districts Direction zu Brünn" 1832. július 14-én N° 531 jelzetű aktán jelenti is már „an die Genie Direction", BOLYAI csak július 10-én jelentkezett Olmützben, bár elindult Lembergből még május 12-én, s az út nagy részét szerencsésen megtette, de május 17-én Bielitz táján felborították a lovak szekerét az országút árkába. BOLYAI megsebesült és megzúzódott, „dass er leblos in den angrenzenden Ort gelangte". Minden orvosi segítség ellenére is, kivált fejsebei nem engedték, hogy balesetét bejelentse. Mihelyt lehetett tovább utazott s reméli, hogy nemsokára teljesen jobban lesz. A „Genie Direction" N° 486 jelzetű aktán válaszol. János Főherceg a referenstől tervezett dorgáló iratot amennyiben BOLYAIt illette volna egészen megváltoztatta, saját kezűleg írta: „ . . . ich kann nur der Beschädigung und der Mangel an Mitteln zuschreiben, dass er darüber der Localdirection zu Ollmütz keine Anzeige machte".

A két esemény egymást kommentálja. Kivált ha meggondoljuk, hogy annak idején, 1823-ban BOLYAI szeptember 17-én indul el Bécsből első állomás helyére, és 30-án már jelentkezik is szolgálati beosztásában.

A „Distrikts-Direktion in Lemberg" 1832. január 29-én felterjesztést tesz N° 122 jelzetű aktán „an die Genie Direction in Wien". BOLYAI JÁNOSt előléptetésre javasolják. (L. 8. és 9. képmelléklet.) ZIMMER alezredes terjedelmesen adja elő a nézetét. Úgy véli, hogy BOLYAI szolgálatot csak matematikából láthat el eredményesen. Ugyanis az első BOLYAIra bízott munka Lembergben az lett volna, hogy tervet készít a katonai fürdőházhoz egy egyszerű toldalékra. Nem készítette el, beteget jelentett. ZIMMER előadja, úgy vélte, hogy BOLYAI hypochondriáján segít az utazás és a kellemes foglalkozás. Reá bízta a Hohenzollern könnyű lovasezred (Chevauxlegers) kerületének beutazását és egyes javítások felülvizsgálatát. BOLYAI nem tudott eredményt felmutatni. „Die Ausarbeitung war so verwirrt", állapítja meg ZIMMER, hogy a feladattal mást kellett megbízni. A legkönnyebb szolgálattal lett aztán BOLYAI megbízva: a tűzérségi épületek évenkinti felvételénél kellett volna segédkeznie, „oder gar zu figuriren", mert a tűzér tisztek amúgyis mindent maguk el tudnak végezni. Ez sem ment. BOLYAI már másodnap beteget jelentett „mit dem Bedeuten, dass er diesen Dienst wegen Verkühlung nicht zu verrichten im Stande ist." Azután az ottani katonakórház új szárnyának építéséről kellett volna jelentést készítenie, de 8 nap múlva is csak néhány ceruzavonás látszott. BOLYAI újra beteget jelentett s már a harmadik hónapja nem teljesít szolgálatot.

Aradról úgy van jelentve, hogy ott lázas volt, ami az idegeit BOLYAInak megtámadta. Ezért talán ott a benyomás, hogy veszekedő természetű. Lembergben ezt a hibáját nem tapasztalják. „Nichts von dieser Zanksucht oder Unerträglichkeit wahrgenommen", állapítja meg Zimmer alezredes, „ein Gegentheil, (als) einen mehr schuthernen und sehr guthmüthigen Menschen erkannt."

Az orvosi bizonyítvány szerint BOLYAI „mit nervös hypochondrischen Leiden behaftet und soll jede geistanstrengende Arbeiten vermeiden." ZIMMER szerint: „Schon diese Krankheit bringt es mit sich, alles im schwärzesten Lichte zu sehen, und nach einer Zuschrift an die Districts-Direction fürchtet der Kranke in ein Nervenfieber zu verfallen."

„Gedachte Oberlieutenant", folytatja ZIMMER, „besitzt für die reine höhere Mathematik enthusiastische Vorliebe, und er soll an einem Werke der höheren Mathematik arbeiten, welches als Fortsetzung von einem seines Vaters, nach seyner Meynung und Äusserung Epoche machen wird. Was Gehalt daran ist, hat hier Niemand beurtheilen können." Talán WOLTER százados tudna erről felvilágosítást adni, véli ZIMMER a jelentésében, akinek BOLYAI egy munkáját átadta.

„Gewiss ist es", fejtegeti tovább ZIMMER, „dass diese angestrengte Arbeit, der er in seiner Einsamkeit fast immerwährend obliegt, seine Nerven immer mehr angreift, wahrscheinlich wie derselbe selbst befürchtet, seine Krankheit in ein Nervenfieber übergeht, oder aber, wie ich kein kürzeres oder passlicheres Wort finden kann, dass es mit ihm überschnapt."

ZIMMER kéri a Főherceg atyai és kegyelmes szívbeli jóságát (Herzensgüte): „bei einem sich ergebenden Avancement diesen Unglücklichen wohlwollend zu berücksichtigen. Bei einer Hintansetzung würde sowohl für sein psychisches als phisisches das Schlimmste zu befürchten seyn."

„Kaum glaube ich", folytatja ZIMMER, „wenn nicht besonders günstige Änderungen eintreten, die man niemals voraussehen, oder bezweifeln mit Gewissheit kann, dass derselbe noch lange brauchbar beim Ingenieur-Corps wird dienen können. Durch ein Avancement würden daher seine künftigen pecuniären Lebensverhältnisse bedeutend verbessert, ohne würdigeren Schaden zu verursachen. Darf ich mir ... einen ... Vorschlag erlauben, so dürfte eine einstweilige Anstellung in Wien und durch eine gnädigste von Eureren Kaiserlichen Hoheit ihm selbst gegebener Ausarbeitung in der höheren Mathematik, dessen Auftrag ihm nicht nur alleyn höchst schmeichelhaft seyn, sondern auch seinen gedrückten Geist erheben, und mit Erhebung von diesen auch sein Körper eine Stärke erlangen dürfte."

ZIMMER szerint a rendes szolgálatban, ahol önállóan kell cselekedni, és minden alkalommal magunkon segíteni tudni, „ist der Oblt. Bolyai für den Dienst ganz verlohren, und dieses Fühlend wird auch seine Hypochondrie immer mehr zunehmen."

ZIMMER az 1831. esztendőről kiállított minősítésben BOLYAIról a következő megjegyzéseket teszi: „Kenntnisse: Scheint vorzüglich Anlagen und Verwendung zur höheren Mathematik zu haben, daher derselbe mehr zu einer Professur als zu einem Dienst bei einer Genie-Direction geeignet ist, dessen Dienstleistung bei selben schwach ist, wozu auch seine immerwährende Kränklichkeit viel beitragen kann. Von der Geschichte, Geographie und Philosophie scheint er gute Kenntnisse zu haben." ... Verdienst zum Avancement: Wird er keinen brauchbaren praktischen Genie-Officier abgeben, wäre aber vorteilhaft in einer Anstellung, wo theoretisch math. Kenntnisse erforderlich sind, verwendet werden." ZIMMER végül még hozzáírja: „Wie aus der Vorhergehenden zu entnehmen ist, kann derselbe bei einer Direction keine angeforderte und entsprechende Dienste leisten. Würde aber bei seinem Hange zu höhere mathematische Wissenschaften bei einer Professur vielleicht gut zu verwenden seyn, wenn sein Vortrag seines Eifer zur höheren Mathematik entspricht."

A különös ajánló sorokhoz BOLYAI kérvényét is mellékelik, melyben az előléptetésre „als bereits Ältesten unter seinen Kameraden im Range" tart igényt.

Bécsben foglalkoznak a kérelemmel, minthogy éppen üresedés van, amelynek hiányában legutóbb az esedékes időben, májusban és novemberben nem volt előléptetés. 1832. március 14-én János Főherceg N° 122 aktajelzet alatt rendelkezik: „An Graf Hardegg, Gen. d. Cav. und Hofkriegsraths Vice Präsident. Nachdem ... im Ing. Corps eine Capitainstelle eröffnet ist so habe Ich dieselbe dem, bei der Fortif. Districts Directin zu Lemberg in Verwendung stehenden Oberlieutenant Johann Bolyai ... und zwar ... mit 14-ten März 1832 und dem Range von eben diesem Tage verliehen."

És BOLYAI utolsó katonai kinevezése:

„ad N° 122"

„Ich habe befunden, den Herrn Oberlieutenant in Berücksichtigung ihrer Fähigkeiten und guten Dienstleistung zum Kapitainlieutenant im kaiserl. königl. Igenieurs Korps mit 14-ten März 1832 zu ernennen." ... „Wien am 14-ten März 1832. E. H. Johann" (l. 10. képmelléklet).

BOLYAI az előléptetését 1832. március 24-én köszöni meg Lembergből. De szolgálati helyén már csak egészen rövid ideig marad. Bécsben 1832. április 26-án a „Genie Direction" N° 267 szám alatt BOLYAI áthelyezéséről rendelkezik. BOLYAI JÁNOSt Ollmützbe vezénylik, „wo wichtige Aufträge im reinen Fortifications-Dienst eine Mehrzahl der Ingenieurs-Officiere in Anspruch nehmen".

1832. május 13-án „Galizische Genie und Fortifications Distrikts-Direction" már jelenti is Lembergből N° 717 akta jelzet alatt „an die Genie Direction", hogy BOLYAI JÁNOS május 11-én elindult, és mert sok a dolog és kevés a tiszt, pótlásra van szükség.

Ezzel BOLYAI JÁNOS katonai pályafutása utolsó fejezetéhez ért.

1831. november 9-én Lembergbe levél érkezik BOLYAI JÁNOS címére. „An des löblichen kaiserl. königl. Ingenieurs Korps Herrn Oberlieutenant Johann Bolyai von Bolya zu Lemberg". A levelet Gratzban adták fel november 2-án, és már a nyolcadik napon Lembergben volt. (L. 11. és 12. képmelléklet.)

A levelet WOLTER írta.

„Schätzbarster Herr Oberlieutenant, und Freund!" — szólítja meg WOLTER BOLYAIt. „Eben zu der Zeit, als ich Ihr werthes Schreiben vom 27ten August l. J. erhielt, war ich mit der Übernahme der hiesigen Districts — und Local-Directions Geschäfte, und nach derselben mit der Aufarbeitung der Rückstände um so anhaltender beschäftigt, als nebst dem Herrn Districts — Director, auch alle der hierortigen Direkzion zugetheilten Ingenieur-Offiziere auswärts kommandiert waren, und zum grosseren Theile es noch sind. Diess zur Entschuldigung der verspäteten Beantwortung Ihres Schreibens."

A levél tulajdonképpeni problémája:

„Die Perspective" — folytatja a bevezetés után WOLTER, „beabsichtigt, einen jeden Gegenstand, für einen angenommenen oder gegebenen Augpunkt, auf einer angenommenen oder gegebenen Fläche so abzubilden, dass dessen plötzliches Verschwinden, bei unveränderter Lage des Bildes und des Augpunktes, von demselben Auge durchaus nicht wahrgenommen werden könne, oder dass der auf das Auge hervorgebrachte Eindruck, auch nach dessen Verschwinden unverändert fortbestehe. Das perspektivische Bild ersetzt also jedesmal den Gegenstand selbst und niemals den auf das Auge hervorgebrachten Eindruck. Diesen hat es, unter den beibehaltenen Umständen, eben so vollständig hervorzubringen, als der Gegenstand selbst. Da gleiche Ursachen gleiche Wirkungen, und gleiche Wirkungen gleiche Ursachen bedingen, so ist klar, dass das perspektivische Bild einer Geraden auf einer Ebene da es auf das Auge denselben Eindruck machen muss, wie die Gerade selbst, ebenfalls eine Gerade seyn muss. Den Irrthum Ihres Gegners haben Sie ganz richtig angegeben."

Aztán egy mondat, — és „más semmi"!

„Rücksichtlich Ihres Werkes werden Sie Sich wohl nach dem Ausspruche des weltberühmten Gauss verhalten, und wenn Sie mich mit einem Exemplare desselben werden beehren wollen, wird es mich erfreuen."

És búcsúzik is már az osztrák tiszt korrekt udvariassággal:

„Von meiner Familie einen herzlichen Dank für Ihre gütige Erinnerung, und ich habe die Ehre mit vieler Achtung zu verbleiben

Ihr Freund
Wolter
Ingenieur Hauptmann."

SZABÓ PÉTERnek a levél kéziratához csatolt megjegyzése szerint WOLTER GAUSS egykori szavaira céloz, mikor BOLYAI JÁNOSt az egyetlen ésszerű magatartásra készteti. Ugyanis GAUSS ezt írta FARKASnak 1799. dec. 16-án: „Mach doch Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grossen Publikums ... einerndten ..., aber den Dank aller derer, deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann".

Ám ha tényleg tudott is WOLTER valamit GAUSSnak érintkezéséről JÁNOS apjával, akkor is mi mást jelent az emlékeztetés a „világhírű Gauss" bölcsességére, mint azt, hogy az ember nemcsak halálában marad magára, de olykor meglátásában is. Világos, hogy WOLTER sohasem volt BOLYAI JÁNOS eszmetársa. És a levél olvastára eszünkbe juthat GAUSS másik, néhány hónappal később tett megjegyzése JÁNOS aláhúzásában: „Nur wenige Menschen besitzen einen Sinn zur Auffassung des Wesens des darin behandelten Gegenstandes, und es können nur jene ein höheres Interesse dafür haben, die sowohl hinsichtlich dessen, worum es sich dabei handelt, und somit über die äusserste Wichtigkeit der Sache, im Klaren sind, als die mit Lösung dieses gordischen Knotens verbundenen Hindernisse an gescheiterten eigenen Versuchen lebhaft gefühlt haben."

Nem kétséges, WOLTER sohasem küzdött a „parallelák" problémájával. Sem sikerrel, sem sikertelenül. Számára a matematika, akár a többi kortársa számára, az ilyen-olyan kérdés szellemes vagy kevésbé szellemes megoldását jelentette. A „brachistochrone" jegyében gondolkozott akkor a világ. Csak „példákat" ismertek, melyeket sör mellett, zörgő kerekeken, vagy akár pajkosan az ágyban lehetett kitalálni. A „parallelák" problémája, mihelyt nem a „bebizonyításáról" volt szó, épp oly idegen, értelmetlen feladat volt, akár a későbbi kérdés: „Was sind und was sollen die Zahlen?"[20] És ez a dolog veleje: volt BOLYAI JÁNOS előtt még valaki, akit az „Erfindungskunst" óvatos reguläi ellenére a lenyűgöző szenvedély sodrával ragadott magával egy matematikai kérdés? Mi volt BOLYAI JÁNOS számára az áhított „Otium"? Az talán, amiben a szelíd lelkű, kegyes életű BOLZANO érlelte ki magában a „Paradoxien des Unendlichen" meglepő összefüggéseit?

Csak egy pillantást kell vetnünk WOLTER levelére. Mert a dokumentumokat látni is kell! A grafológia nem válik okvetlenül hátrányára a tudománytörténetnek! Csak a „theoriák", az előre kiagyalt rögeszmék mindenáron erőszakolt „alkalmazása" ébreszt kétséget a hasznosítható eredmény iránt. Csak akkor kell elcsodálkozó arcot vágni, amikor a „graphopathológia" mohóságában új meg új „hullát" keres elméssége bonckése alá. Csak akkor kell nevetésre fakadni, ha már egy DAVID HILBERT lesz emlegetve, mint soron következő „bonctani" probléma. Ugyanis vannak arany igazságok, vannak meztelen igazságok, de vannak „mir nichts, dir nichts" igazságok is, melyeknek feszegetése nem érdekes. És a „graphopathologia" szükségképpen a fölösleges tudomány címkéjét ragasztja magára, ha feladatában a szükséges és nem szükséges között józan értelmességgel különbséget tenni nem tud.

WOLTER levele apró, de rendkívül gondosan kialakított betűkből áll. Nem „odavetve", hanem a féken tartott hangulat, az előírt kötelesség, a figyelmes „humanum" finom megnyilatkozásával. Az írás és a beszéd egyensúlyban van. Itt is, ott is egy társadalom korrekt mértéktartása, emberies szolgálatkészsége nyilatkozik meg. Egy egészen más világ, mint a BOLYAIÉ! Csak a humanitásában jelentős. Akár ZIMMER. És persze még — János Főherceg.

BOLYAI FARKAS 1832. január 16-án újra ír GAUSSnak JÁNOS dolgozata ügyében. „Bocsáss meg ezért az alkalmatlankodásomért", kezdődik a levél, „de fiam többre becsüli egész Európa ítéleténél a Tiédet, és csakis erre vár. Szívből kérlek értesíts nemsokára ítéletedről: annak értelmében írok majd neki Lembergbe."

A levéllel együtt most már JÁNOS értekezése is megérkezik, és GAUSS február 14-én mindjárt be is számol első benyomásáról egy levélben, melyet Gerlingnek küld. „Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe worin ich alle meine eignen Ideen u(nd) Resultate wiederfinde, mit grosser Eleganz entwickelt, obwohl

[20] DEDEKIND: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Több kiadás.

in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Konzentrierung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Offizier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigne Nachdenken diese jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse."

BOLYAI FARKASnak GAUSS március 6-án válaszol. FARKAS GAUSS leveléről másolatot készíttet, és megküldi fiának Lembergbe. BOLYAI JÁNOS április 6-án értesül GAUSS válaszáról. FARKAS GAUSS válaszával fölöttébb meg van elégedve. Meg is írja fiának: „Gaussnak a te művedre vonatkozó válasza, igen szép és hazánknak, valamint nemzetünknek dicsőségére válik. Egyik jó barátunk nagy elégtételnek mondta."[21] De JÁNOS? ... Mi igaz a vélekedésekből?

1832. augusztus 8-án BOLYAI JÁNOS Olmützben kérvényt nyújt be feletteseihez. Három évi szabadságot kér. A gondolat már Lembergben foglalkoztatta, és május 3-án már el is készült egy fogalmazványféleséggel, melynek változatát aztán elő is terjesztette. A késedelmeskedés abból származott, hogy BOLYAI nem rendelkezett megfelelő példánnyal dolgozatából, melyet viszont csatolni kívánt kérelme indokolásához.

„Euerer Kaiserlichen Hoheit hat er hiermit die Ehre, ein Exemplar der bereits erschienenen Druckschrift zur höchsten Einsicht und höchsteigenen Beurtheilung unterthänigst zu unterlegen; das einzige Exemplar, was der Verfasser bis nun besass, war zu einer so hohen Bestimmung nicht geeignet, und deshalb musste er die Ankunft von einigen Exemplaren abwarten; sonst wäre er mit diesen unterthänigsten Bittgesuche schon lange vorgetreten."

Egyben mentegetődzik BOLYAI, hogy tanulmányán nevét és rangját feltünteti.

„Zugleich waget der in tiefster Unterthänigkeit Gefertigte die tiefgehorsamste Bitte: Euere Kaiserliche Hoheit geruhen dem Verfasser der beiliegenden Druck-Schrift — wovon zur allenfallsigen leichteren Verständniss das Wesentlichste auch in deutscher Sprache beiliegt — gnädigst erlauben, derselben seinen Namen und Charakter vorsetzen zu dürfen, da dieser schon mit hochgnädigster Rücksicht auf das Obangeführte, seinem Charakter, und somit dem Ruhme des k. k. löblichen Ingenieurs-Corps nicht nachtheilig sein wird."

Sajátkezűleg írja értekezése elé címlapnak: (l. 13. 14. és 15. képmelléklet)

Scientia Spatii,
a veritate aut falsitate (a priori
haud unquam determinanda)
Axiomatis Euclidei XI.
independens: atque pro casu
falsitatis, Quadratura
Circuli geometrica.

[21] DÁVID L.: *A két Bolyai.* 98. l. STÄCKEL: Bolyai, I. r. 71. l.

Auctore

Johanne Bolyai de eadem,
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco Castrensium
Capitaneo Locumtenenti.

Tehát csak „Scientia Spatii", és nem „Scientia spatii absolute vera" az, amit mellékel kérvényéhez. Néhány más eltérés is található az „Appendix" szövegezésétől. Volt STACKEL PÁL kezében az „Appendix" ez a példánya? A könyvében ugyanis ezt írja: „A folyamodványhoz, melyet János 1832. augusztus 8-án indított útnak, mellékelte először az Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens" első 33 paragraphusának német fogalmazványát (l. 16. és 17. képmelléklet), mely e könyv német kiadása második részének 185—203. oldalain legelőször látott napvilágot, és melynek magyar fordítását a jelen magyar kiadás második részének 197—217. oldalain közöljük". Feltehető, hogy nem, mert egyébként is nem a valóban elküldött folyamodvány szövegét közli könyve jegyzeteiben, hanem csak a lembergi fogalmazványt. STÄCKEL ezt írja: „E folyamodványnak egy Lemberg, 1832. május 3-iki keltezéssel ellátott fogalmazványa Szabó Péter ur birtokában van. Ő bocsátotta rendelkezésemre e fontos irat másolatát. A kapcsos zárójelekbe foglalt szavakat János maga kerítette be ilyen zárójelekkel; úgy látszik, hogy magából a folyamodványból ki akarta ezeket hagyni." De miért küldte közlésre SZABÓ PÉTER csak a fogalmazványt, holott ... ? ...

Az aktacsomónak története van.

„Kaiserlich- und Königliches Kriegsarchiv" N° 1145 jelzet alatt Bécsből 1909. október 8-án SZABÓ PÉTERnek a következő felvilágosítást adja: „In Beantwortung des geschätzten Schreibens vom 30. September l. J. beehrt sich die Direktion des k. u. k. Kriegsarchivs Euer Hochwolgeboren mitzuteilen, dass über den Kapitänleutnant des Ingenieurkorps Johann Bolyai von Bolya im k. u. k. Kriegsarchiv einige Akten vorgefunden wurden, die der Aktengruppe des bestandenen Generalgeniedirektors vom Jahre 1832 und 1833 angehören, also nur das letzte Jahr seiner Dienstzeit und seine Pensionierung betreffen."

„Da Bolyai's Dienstzeit in die Jahre 1822—1833 fällt, könnten vielleicht Auskünfte darüber noch aus den Akten des Hofkriegsrates und aus jenen der Generalgeniedirektion vor 1832 zu erlangen sein; diese Akten erliegen gegenwärtig in der Registratur des k. u. k. Reichskriegsministeriums, da aber das k. u. k. Kriegsarchiv darüber kein Verfügungsrecht besitzt, so müssen Euer Hochwolgeboren zur Einlangung einer Einsicht in dieselben (die voraussichtlich bewilligt werden dürfte) sich an das k. u. k. Reichskriegsministerium wenden."

„Die hier vorgefundenen Akten einschliesslich zweier Konduitelisten von 1831 und 1832 werden zur Benützung durch Euer Hochwolgeberen in den Räumen des Kriegsarchivs bereitgehalten. Es befindet sich darunter ein sicherlich sehr interessantes Stück, nämlich ein ausführliches eigenhändiges Gesuch Bolyai's an den Generaldirektor Erzherzog Johann, mit welchem er ein Exemplar seiner „Raumlehre" in deutsche Uebersetzung als Handschrift und als Druckwerk in lateinischer Sprache „Scientia Spatii" sammt einem Auszug aus einem, an seinem Vater gerichteten Brief Gauss' vorlegt."

„ ...... Der Director: Woinovich Gd."

A hírre az Akadémia elnöksége kéréssel fordul a Kriegsarchiv igazgatóságához, hogy engedjék át BOLYAI kérvényének aktacsomóját az Akadémia számára. A kérés teljesül, és WILHELM WLASCHÜTZ, „Oberst, Vorstand der Schriftenabteilung in k. u. k. Kriegsarchiv" már 1910. március 9-én írja SZABÓ PÉTERnek: „Die Direktion des k. u. k. Kriegsarchiv hat am 24. Jänner 1910 (mit K. A. Nr. 1445/1909) die von der ung. Akademie der Wissenschaften gewünschten Akten über Bolyai an den Präsidenten der Akademie abgesandt."

BOLYAI kérvényének iratai megvannak, hiánytalanul megvannak az Akadémia könyvtárának kézirattárában a BOLYAIAKra vonatkozó gyűjtemény dokumentumai között. SZABÓ PÉTER kötelességérzetéből megtalálható az Akadémia Bolyai-gyűjteményében a lembergi kérvényfogalmazvány is. Míg STÄCKEL a „Scientia Spatii" BOLYAI által készített német nyelvű szövegét a megfelelő helyén felhasználja, és az aktához csatolt GAUSS-levél másolatához is vannak megjegyzései, addig a kérvény valóban elküldött szövegét nem ismeri. Pedig a kettő nem ugyanaz, és a pszichológus számára ez a körülmény jelentős következtetésekre ad alkalmat.

És aztán — még egy idegen irat is érkezett BOLYAI kérvényének aktacsomójában. És pedig: GUSTAV ADOLF GREISINGER „Hauptman im k. k. Ingen. Corps, Professor der höheren Mathematik an der k. k. Ingenieurs-Akademie" szakvéleménye Bolyai vizsgálatairól. GREISINGER neve egyetlen Bolyai-tanulmányban sem lelhető fel. (L. 18. és 19. képmelléklet.)

A szakvélemény János Főherceg kívánságára készült. Ugyanis János Főherceg több helyen hangoztatott hiedelemmel ellentétben korrekt figyelemmel foglalkozott BOLYAI kérelmével. Már augusztus 30-án Nr 561 (Genie-Akten 2/161) aktajelzet alatt rendelkezik: „. . . den Capit.-lt. Bolyai gleich wie alle übrige zu Ollmütz angestellte Ing. Corps-Officiere in dem Fortific.-Dienste zu verwenden. . . . Derselbe hat in Geduld abzuwarten, was Ich rücksichtlich seine künftige Verwendung über ihn zu bestimmen, des Dienstes und seines eigenen Bestens willen für nothwendig finden werde." A véleménye ez: „. . . dass solche bey einem Officier gerne wahrgenommenen Erweiterungen ihrer Kenntnisse nur in dem von Dienste freyen Stunden geschehen dürfen." És egyidejűleg ugyanazon aktán intézkedik, hogy BOLYAI német nyelvű értekezését a latin szöveggel együtt valamint GAUSS levelének másolatát juttassák el GREISINGER századoshoz.

GREISINGER — sürgetésre! — már szeptember 14-én kész a véleményével, melyet 5 folio oldalon nyújt be János Főherceghez. És szeptember 15-én prezentálva is lesz nyomban az irat.

„Euer Kaiserliche Hoheit!" — kezdi GREISINGER. „Auf höchsten Befehl Euers Kaiserlichen Hoheit wurde dem Unterthänigstgefertigten, durch Herrn Ingenieur Major v. Koerber der Auftrag ertheilt, über das von dem Ingenieur Hauptmann v. Bolyay in lateinischer Sprache herausgegebene Werkchen, Raumlehre betittelt, welchem eine jedoch nur unvollständige deutsche Übersetzung, und ein Auszug aus einem Briefe des berühmten Mathematikers Gauss beigelegt ist, umfassend zu berichten."

„Ein später", folytatja GREISINGER, „durch den erwähnten Herrn Major dem Unterthänigstgefertigten zugekommener höchster Befehl gebietet jedoch die Vollziehung des erhaltenen Auftrages möglichtst zu beschleunigen. Wegen Unkenntnis der lateinischen Sprache, merklicher Unvollständigkeit der beigefügten deutschen Übersetzung, und dem Umstande, dass der fragliche Aufsatz sich um delicate, methaphisische Unterscheidungen dreht, die den Verfasser seit Jahren.

ausschliessend beschäftigen, findet sich der Unterthänigstgefertigte für itzt zu nachfolgender allgemeiner Beurtheilung desselben veranlasst, und wagt zugleich die unterthänigste Bitte, die hier... folgenden Stücke, seiner Zeit, zu einer paragraphweisen scharfen Beurtheilung, wieder zu erhalten."

GREISINGER természetszerűleg tanácstalan a rábízott feladattal szemben, mindazonáltal fejtegetése tudománytörténeti szempontból nem lényegtelen. Végre előttünk „szőröstől-bőröstől" egy „boeotiai", egy „jó és becsületes" — εὐήθης — ahogy az athenaeiak csipkelődtek láttán. Egyszerre érthető lesz GAUSS „rettenete", bölcs kitérése minden nyilvános diszkusszió elől, de saját gondolkozásának is lappangó gátlása. Ugyan, mi volt BOLYAI kortársai számára a „matematika lényege", ha történetesen szóba kerül valahol?

GAUSS levelét sem tudja okosan értelmezni. Ezt írja:

„Auf keinen Fall, kann der Unterthänigstgefertigte dem ganzen Aufsatze, und seinem Zwecke jene Wichtigkeit beilegen, die ihm von dem Verfasser im 33, beigelegt wird, welcher ganz geeignet ist demselben den Vorwurf mathematische Schwärmerei zuzuziehen; und er hegt die Überzeugung, dass das von dem weltberühmten Mathematiker Gauss, in dem beiliegenden Briefauszuge freylich nur sehr allgemein gefällte Urtheil, zum grossen Theile seiner alten Freundschaft mit dem Vater des Verfassers zuzuschreiben sein dürfte."

És GREISINGER csak az „i"-re teszi fel a pontot, mikor vélekedését zárja: „Schlüsslich kann der Unterthänigstgefertigte nicht umhin, dem Fleisse und dem Scharfsinn Gerechtigkeit minder lohnen zu lassen, mit dem der Verfasser den ganzen Aufsatz aufgebaut hat, und es erübrigt ihm nur der Wunsch, dass derselbe sich einen fruchtbringendern Zweck wählen möchte."

János Főherceg azonban nem érte be ennyivel. Ceruzaírással rendelkezik az aktán: „Ohne Greisingers Gutachten mitzutheilen — sollte Bolyays Aufsatz freundschaftlich — Ettingshausen mitgetheilt werden um zu hören was dieser sagt." ...

Ki volt ETTINGSHAUSEN? ANDREAS Freiherr von ETTINGSHAUSEN 1796-ban született Heidelbergben, és meghalt Bécsben 1878-ban. Egyetemi tanulmányai mellett katonai tanulmányokat is folytatott Bécsben. A Bombardier-Korps iskolájában szerezte matematikai ismeretei alapját. 1822-ben felsőbb matematikát tanít az egyetemen. *Vorlesungen über höhere Mathematik* című két kötetes műve 1827-ben jelenik meg Bécsben. Később, 1834-ben a fizikai tanszéken ad elő. 1848-ban tanár a katonai mérnök akadémián. 1852-ben a bécsi műegyetemen tanít. 1853-ban a fizikai intézet igazgatója lesz.

A BOLYAIAK egyébként a maguk részéről is megküldték a *Tentament* és ezzel együtt természetesen az *Appendixet* is ETTINGSHAUSENnek. Sőt nemcsak ETTINGSHAUSENnek, de egy másik bécsi tanárnak is, LITTROWnak. LITTROW nem állott valami nagy becsben BOLYAI JÁNOS előtt. De ETTINGSHAUSENről tisztelettel beszél. „Nagyérdemű és előkelő férfiú", nyilatkozik egyszer JÁNOS, „habár annyira szerencsétlen, elvakult és elfogult, hogy bennünket nem tud méltatni".[22]

A „Conduite Liste für das Jahr 1832" BOLYAI JÁNOSról tartózkodóan, korrekt módon nyilatkozik. (L. 20. és 21. képmelléklet.) Megállapításai: Spricht und schreibt: deutsch, ungarisch, lateinisch, versteht französisch und etwas italienisch.

[22] STÄCKEL: Bolyai. I. r. 229. l. — A 217. l.: „... a Tentament mindjárt megjelenése után elküldték Ettingshausennek is, aki arról merőben elítélőleg nyilatkozott."

Kenntnisse:

aus den Geniewissenschaften: Hat, nach der vorigen Conduite-Listen, noch sehr wenig praktische Dienste geleistet. Hierort ist derselbe zu kurze Zeit angestellt um über seine Wirksamkeit ein richtiges Urtheil fällen zu können, gleichwohl erhellet bereits, dass er nur für mathematischen Wissenschaften eine besondere Vorliebe hege, und dass ihn leider nach der Ansicht des gefertigten Fortifications-Local-Directors der Scepticismus hierin auf Abwege leite.

in anderen Wissenschaften:
In der mathematischen Wissenschaften, wovon er bereits öffentlich unwiderlegliche Beweise gab, inden er die so äusserst wichtige, und nicht wenig verwickelte Materie der Raumlehre, welche sich auf die berühmte XI. Euklidische Axiome bezieht und womit sich seit 2100 Jahren selbst die ausgezeichnetesten Geometer ungeachtet des rastlosen Bestrebens ganz vergeblich befassten nicht nur auf das Vollkommenste ins Klare brachte und bekannt machte, sondern darin sogar weit mehr als gefordert wurde leistete. Ohne übrigens andere Wissenschaften als Geschichte, Geographie etc. in so fern zu beseitigen als ihre Kenntniss einem gebildeten Officiere erwartet werden kann.

in Infanterie-, Cavallerie-Dienst und von der Hohen-Kriegskunst:
hat die an der Akademie erlernten Grundsätze inne, und sucht durch Lesung guter Werke seine Kenntnisse zu erweitern.

Bei welchen Gelegenheiten öffentlich angerührt wurde, Belobung, Dekorationen etz.:
Die öffentliche Rezension des von ihm herausgegebenen Werkchens erwartet er erst nachdem sich dasselbe, vermöge eines Privatbriefes des Grössten dermaligen und Einer der grössten Mathematiker aller Zeiten Herrn Hofrath von Gauss vollkommen bewährt hat.

Eifer und Verwendung:
Für den Ingenieurs-Dienst zeigte er hierort wenig Eifer, und seine Verwendung lässt erst beurtheilen, wenn er die ihm übertragenen Ausarbeitungen geliefert haben wird.

Ist wegen seinen Fehlern gewarnt oder gestraft worden?
Wurde bereits wegen Mangel an Eifer, wegen seinen auffahrenden Benehmen und wegen seine leidenschaftliche Neigung zum Schachspiele gewarnt, ein günstiger Erfolg dieser Warnung muss jedoch erst abgewartet werden.

Avancement:
in seinem Rang
melyhez János Főherceg sajátkezűleg írja hozzá: „wenn er sich dem Dienste mehr widmet".

ZITTA Major véleményezése után János Főherceg megjegyzi még:

Anmerkung:

Einverstanden, jedoch dem Dienst am besten, wenn derselbe eine Anstellung erhielte worin seinen mathematischen Studien nachleben könnte.

E(rz) H(erzog) Johann m. p.

Ez tehát BOLYAI JÁNOS hiteles esete János Főherceggel.

1833 tavaszán BOLYAI JÁNOS helyzete végképp tarthatatlanná válik a szolgálatban tanúsított magatartása miatt. 1833. március 10-én Nr 228 aktajelzet alatt a „Genie Director" leir „an den Fortif. Distrikts Direction in Mähren und Schlesien zu Brünn" BOLYAIról kapott jelentés tárgyában. A beérkezett jelentés szerint BOLYAI beteg, állítólag rheumatikus fájdalmai vannak, s nem teljesítheti az I. Brigade épületeinek rábízott felügyeletét. Minduntalan betegséget hoz fel, alig teljesít szolgálatot, „dafür aber sich so lange mit abstracten Aufgaben und Erfindungen in der Mathematik beschäftigt und sogar auch im vorigen Jahre zu Ollmütz während der Zwischenzeit von July bis zum Spätherbst selbst in gesunden Zustand . . . dienstlich um eine dreyjährige Befreyung von allen und jeden Fortif.-Dienst gebeten hat um sich . . . " csakhogy a felsőbb mennyiségtannal foglalkozhassék. Amint a jelentés a továbbiakban előadja, BOLYAI a kérés visszautasítása után kis ideig még szolgált, majd meghűlést hozván fel okul, a rábízott munkálatokat bevégezetlenül hagyta. Késő ősszel rheumatikus fájdalmakról kezdett panaszkodni, beteget jelentett, és a jelen óráig is még mindig beteg. A jelentéstevők vélekedése szerint a matematikai tanulmányok sem tehetnek jót az egészségnek. Mindezekhez járul még ingerült hangulata. Egyre kevesebb a remény, hogy hasznavehető szolgálatot teljesíthet. „Dann seine sehr reizbare und jähzornige Gemütsbeschaffenheit (wozu auch seine Hypochondrie gehört), machen die Hoffnung auf eine Verbesserung seines Gesundheitszustandes und seine Dienstesbrauchbarkeit immer mehr und mehr verschwinden."

A háromévi szabadság kérésének visszautasításakor legmagasabb megintést (höchste Ermahnung) kapott. Előbbeni intések sem használtak, ezért a „genie Director" elrendeli, hogy hivatalosan vizsgálják meg BOLYAI testi állapotát és jelentsék be az eredményt. Ez azután további intézkedésekre fog vezetni, mivel BOLYAI a mérnökkari megerőltető szolgálatot nem bírja, és úgy látszik, hogy őt más csapattestbe (Korps) vagy ezredbe sem célszerű (nicht thunlich) áthelyezni. Nyugdíjazása látszik célszerűnek. Ezzel majd az ollmützi parancsnoksághoz használható tisztet lehet küldeni és hely ürül majd előlépésre egy törekvő és munkabíró fiatal tiszt számára.

1833. március 20-án a következő hivatalos megállapításokat teszik BOLYAIról:

Conduite und Verdienste:

Bei seinen vorzüglichen Talenten könnte derselbe sehr gute Dienste leisten. Seine durch Hypochondrie fortwährend gesteigerte Kränklichkeit gestattete jedoch nicht eine anhaltende angestrengte Thätigkeit an den Tag zu legen. In der kurzen Zeit, wo er sich in einem gesunderen Zustande befand, widmete er sich ausschliesslich dem Studium der abstractesten mathematischen Wissenschaften. Übrigens ist er sehr reizbar und jähzornig, meidet allen Umgang, und überliss sich bis zum

Augenblicke, wo er desshalb gewarnt wurde, leidenschaftlich dem Schachspiele. Sonstige Fehler oder moralische Gebrechen besitze derselbe kaum.

Leibesbeschaffenheit und Deffecten:

Schwaches Sehvermögen, hochgradige Hypochondrie, in folge dessen Verdauungsbeschwerden, Körperabmagerung und hektische Schwitze.

Befund und Beschluss der Superarbitrierungs-Comission:

Capitainlieut. v. Bolyai ist seiner körperlichen Gebrechen wegen von der Superarbitrierungs-Comission auf Grund der Krankheitsgeschichte und des feldstabärztlichen Erkenntnisses dermalen zur activen Dienstleistung nicht mehr geeignet. — Da jedoch die dereinstige Heilung seines Gebrechen nicht ganz in Abrede gestellt werden kann, nur Halb Invalid befunden werden.

Bolyai a helyzet várható anyagi oldalával nincs megelégedve, április 12-ről keltezve kérvényt nyújt be nyugdíjpótlék engedélyezése céljából. Kérelme és érvei:

Euere Kaiserliche Hoheit
Durchlauchtigster Erzherzog
Gnädigster Herr, Herr!

Höchstdieselben haben gnädigst geruhet, den in tiefster Unterthänigkeit Gefertigten, Behüfes seiner einstweiligen Übersetztwerdung in den Pensionsstand, Einem hohen Superarbitrio vorstellen zu lassen. Für diese höchste Gnade seinen unterthänigsten Dank tiefschuldigst vortragend, waget er in tiefester Untergebenheit die unterhänigste Bitte: ihm dabei den erhöhten Gehalt von 600 fl. oder doch wenigstens eine Zulage von jährlichen 100 fl. C(onventions) M(ünze) gnädigst verleihen zu geruhen, und führt zur Höchstgnädigen Berücksichtigung nachfolgende Gründe an:

1. Verursachen ihm bei seinem dermaligen sehr kränklichen Zustande die Apotheken, Ärzte, der Gebrauch der nöthig werdenden Bäder, dann die erforderliche bessere Pflege, um so empfindlichere Auslagen. als er gern Alles anwenden möchte, um zur gnädigsten Aufgenommenwerdung in den aktiven Stand baldmöglichst wieder geeignet zu werden. Erwähnte Auslagen von dem der Kapitaine-Lieutenants-Charge bemessenen Gehalte zu bestreiten, wäre er jedoch ebenso wenig im Stande, als er etwa von seinem Vater irgend eine Beihülfe erwarten, oder seinen vaterländischen Boden in einem dürftigen Zustande zu betreten sich entschliessen könnte. Auch schon der Umstand, dass er nach herabgelangter hoher Bewilligung, seine ihm bevorstehende Reise nach Maros-Vásárhely, wovon er nur zufällig jetzt so weit entfernt ist, auf eigene Kosten bewirken muss, würde sonst seinen Kassa-Stand auf länger Zeit ganz zu Grunde richten.

2. Dient er zwar dem allerdurchlauchtigsten Erzhause noch nicht gar lange; hofft aber dafür auch in wenigen Jahren seine jetzt sehr zerrüttete Gesundheit so herzustellen, dass er zur gnädigen Resuperarbitrierung fähig werde. Bei fortgesetztes Dienen würde er ohnedies in eine höhere Cathegorie treten, und die sich unterthänigst erbetene Gehaltvermehrung würde den allerhöchsten Ärar während diesen wenigen Jahren sehr unempfindlich sein, dahingegen solche bei dem unterthänigst Gefertigten — allein die erwünschte Kräfte wieder herbeiführen könnte.

3. Szolgálatait kéri tekintetbe venni, melyek már ismertetve lettek.

4. Trüge er überhaupt nicht das Bewusstsein in sich, einer solchen höchsten Berücksichtigung und Gnade auch würdig zu sein: so würde er es nie wagen die unterthänigste Bitte zu stellen, auch bei ihm jene kleine Ausnahme gnädigst Statt finden lassen zu geruhen, welcher sich auch viele Andere von gewöhnlicherer Auszeichnung erfreuen dürfen.

A kérelem Bécsben visszatetszésre talált. BOLYAI nyugdíjaztatására vonatkozó előterjesztésre azzal a kiegészítéssel rendelkeznek, „dass der fast ... widrigen Bitte diese nur halb invaliden Capitänlieuts um eine Personalzulage um so weniger eine Folge gegeben werden könne, als er erst von einem Jahre bei einer nicht ganz vorteilhaften Conduite in die dermalige Charge befördert wurde, ledigen Standes ist, und nach der Conduite-Liste Beihilfe hat".

BOLYAIt 1833. június 11-én értesítik nyugdíjaztatásáról. (L. 22. és 23. képmelléklet.)

„Auf den Befund der Superarbitrirungs Commission, vermög welchem Euer Wohlgeboren als halb Invalid erkannt wurden, hat der hochlöbliche k. k. Hofkriegsrath mit dem Reskripte vom 28ten Mai d. J. G. 2193 und 1893 dieselben vom 16ten Juni d. J. in die normalmässige Pension übernommen, und diese, Ihrem Ansuche gemäss, bei der Hermannstädter Kriegskassa angewiesen.

Indem Ihnen diese hohe Entscheidung zur Darnachhaltung bekannt gegeben wird, muss die gefertigte Fortifications Local Direction in Folge der höchsten Praesidial Reskriptes Seiner Kaiserlichen Hoheit des Herrn General Genie Directors del:7ten Juni d.J. N° 624. Ihnen noch ferner eröffnen, dass Ihrer Bitte um verabfolgung einer Personal-Zulage, welche Bitte Seine Kaiserliche Hoheit zur Kenntniss des hoch löblichen Hofkriegsrathes gebracht hat muss weniger eine Folge gegeben werden könne, als Sie nur als halb Invalid erkannt, nebstbei erst vor einem Jahre in die dermalige Charge befördert und ausser dem ledigen Standes sind, und als Sie endlich nach der Conduite Liste einige wenn auch nur sehr unbedeutende Beihilfe haben.

Olmütz den 11ten Juni 1833

Zitta m. p.
Major im Ing. Corps

A pszichologusé a szó.

Okot és okozatot szigorúan be kell határolni — „more geometrico". És szentimentálizmus nélkül. Ezt kívánja az intellektuális tisztességesség.

„Eure Kaiserliche Hoheit, Durchlauchtigster Erzherzog, Gnädigster Herr, Herr!" — kezdődik BOLYAI JÁNOS folyamodványa 1832. augusztus 8-án. (L. 24. és 25. képmelléklet.) „Der in tiefsten Unterthänigkeit Gefertigte hat früher, Untersuchungen über verschiedene, eben so wichtige, als bisher gar nicht, oder doch nicht gehörig bearbeitete Gegenstände aus dem Gebiete der Mathematik — er glaubt es — mit Erfolg angestellt. Selbe wünscht er nun sehnlichst vollends auszuarbeiten, und, in der seit jeher heiss gehegten Absicht, gute Sachen allgemeinnützig zu machen, dem Drucke zu überliefern, und somit vor Untergang zu sichern. So schwierige Gegenstände können jedoch, besonders bei einem so schwächlichen Gesundheitszustande, als sich Gefertigter schon seit längerer Zeit befindet, nur durch ungetheilte und ungestőrte Verwendung der Geisteskräfte hervorgebracht werden."

Majd így folytatja BOLYAI: „In der vollkommensten Überzeugung, dass die gute Sache stets Euerer Kaiserlichen Hoheit höchster Berücksichtigung sich erfreuen darf, waget er demnach in tiefster Ehrfurcht, Höchstdemselben die allergehorsamste Bitte vorzutragen: ihn Behufes des Obangeführten, auf drei Jahre von den eigentlichen currenten Dienstgeschäften gnädigst entfernen zu geruhen — wobei jedoch im Falle eines Plötzlich ausbrechenden Krieges die höchste Gnade er sich unterthänigst erbäte, auch dazu commandirt zu werden."

Miben különbözött az utóbb bekövetkezett helyzet BOLYAI korábbi óhajától? Csak anyagiakban. Kevesebb lett a jövedelme, szűkösebb viszonyok közé került, de nem lett azért ellátatlan. Viszont nem akadályozta többé nyűgös szolgálat az „ungetheilte und ungestörte Verwendung der Geisteskräfte". Hogy sáfárkodott tovább BOLYAI a lehetőségeivel?

BOLYAI egyideig Marosvásárhelyt él az apjával, majd Domáldra megy lakni, és mintegy 12 éven át állandóan ott is marad. És eltelik egy év, eltelik két év, eltelik három év, eltelik tizenhárom év, és mi lett a hangoztatott tervből, hogy az egyszer elkezdett vizsgálódásait tovább építse, elvégezze, befejezze — „in der seit jeher heiss gehegten Absicht, gute Sachen allgemeinnützig zu machen, dem Drucke zu überliefern, und somit vor Untergang zu sichern". Talán BOLYAI is utóbb úgy vélekedett mint BOLZANO: „Bei allem Nachdenken ist ferner nicht genug anzuempfehlen, dass wir darin n i c h t a l z u r a s c h vorgehen sollen. Denn bloss aus zu grosser Eile geschieht es nur zu oft, dass wir die Gründe, die einer von uns angenommenen Meinung entgegenstehen, nicht mit gehöriger Vollständigkeit übersehen, dass wir ein Urtheil, welches wir aus dem Gedächtnisse wiederholen wollen, mit einem andern, das ihm nur ähnlich ist, verwechseln, u. dgl." Avagy egészségi indiszpozíciók hiúsították meg a szellemi erő maradéktalan kiaknázását, „ungetheilte und ungestörte Verwendung der Geisteskräfte"? BOLZANO szerint: „Die Erfahrung lehrt, dass wir nicht jederzeit gleich fähig und aufgelegt zu dem Geschäfte des Nachdenkens sind. Es lässt sich auch leicht begreifen, woher diess rühre. Zu allem Nachdenken wird, da es doch eine Verrichtung des Geistes ist, auch eine eigene Kraft dieses Geistes, und wegen des innigen Zusammenhanges, in welchem Seele und Leib mit einander stehen, auch eine eigene Kraft unseres Leibes erfordert."

Milyen volt tulajdonképp BOLYAI egészségi állapota? Már Lembergben egy katonaorvos, „k. k. Garnis. Oberarzt" J. HAUSENBACHER jelenti BOLYAIról: „. . . Hinsichtlich seines erlittenen nervős hypochondrischen Leidens in periodischen Anfällen von mir ärztlich behandelt wurde; und während diese Zeit von aller Geistanstrenden Beschäftigungen befreit werden musste."

Jelentékeny távolságban lembergi szolgálathelyétől, egészen más környezetben, többek hozzászólása mellett is a megállapítható baj BOLYAInál: „Schwaches Sehvermögen, hochgradige Hypochondrie, in folge dessen Verdauungsbeschwerden, Körperabmagerung und hektische Schwitze". Semmi esetre sem lehet lekicsinyelni az akkori civilizációs viszonyok között a panaszok kellemetlen jellegét, de — hogy viselték el mások a testi inkommodációt, mit tettek egyesek annak dacára, hogy egészségük meg volt támadva? . . . NAGY FRIGYES környezetéből írja de CATT: „Der König . . . litt heftig unter einer hämorrhoidalen Kolik, welche die Leute aber auf eine Verdauungsstörung zurückführten". Parancsra egyszer de CATT hajnalban négy órakor jelenik meg a király előtt. FRIGYES panaszkodik: „Gestern, mein Lieber, habe ich während des ganzen Nachmittags an heftigen Leibschmerzen gelitten — ein gutes Mittel, sich wohl zu fühlen in diesem erbärmlichen Leben, das ich führe!" Volt BOLYAI valaha is késztetve, hogy így beszéljen? NAGY FRIGYES így folytatja a vallomását: „Wir befinden uns hier in einem schönen Lager, wo wir noch einige Tage hübsch ruhig bleiben werden, denke ich, wenn man uns nur nicht neues Unglück meldet! Niemals geht meine Tür auf, ohne dass ich mir sage: Da kommt eine traurige Nachricht! Ich segne den Himmel, wenn man dann beim Eintreten mir nur kleine Verluste meldet. Können Sie sich diesen Zustand meiner Seele vorstellen? Gibt es etwas Ähnliches?? Dennoch muss ich gute Haltung bewahren, und potztausend, das werde ich tun bis zu meinem letzten Seufzer!"[23] . . . . . .

Milyen katona volt BOLYAI JÁNOS? Milyen kötelességérzettel, milyen vitalitással? Valóság vagy csak káprázat, amit egyes lexikonok adatként közölnek róla? „Valentissimo schermitore e appassionato dilettante di violino, fu d'indole originale e visse in solitudine tra le sue meditazioni." Ami végső fokon különösen érdekes, milyen tartalmú, milyen vehemenciájú volt az „Otium", melyre alkalmat — mindenáron keresett? „Bei seinem vorzüglichen Talenten", olvasható a hivatalos megállapításban mintegy végső szentenciaként, „könnte derselbe sehr gute Dienste leisten. Seine durch Hypochondrie fortwährend gesteigerte Kränklichkeit gestattete jedoch nicht eine anhaltende angestrengte Thätigkeit an den Tag zu legen." „Hypochondrie" minduntalan visszatérő szó, ha hivatalosan jellemzik BOLYAIt. De „Hypochondrie" mi mást jelent a hétköznap közönséges mosolygásában, mint betegséget minden konstatálható baj nélkül. A „naív realizmus" a tudománytörténethez sem illő magatartás! GAUSSnak még nem volt oka, hogy ítéletet mondjon „éles, átható szemmel" és kímélet nélkül" a számára megküldött „kis írásműről", és BOLYAI JÁNOS már kész, kialakult, eldöntött vonatkozásokkal áll az emberek között ZIMMER jelentésében. Nem kétséges, BOLYAI JÁNOSnak terhére volt a katonai szolgálat, és minden lehetőséget, minden ürügyet megragadott, hogy a vele szemben támasztott kívánságok alól magát kivonja. Fölöttébb fontos a munkához, a hétköznapi élet „triviális" kívánságaihoz való viszonyát a maga etikai meztelenségében látni. Megütközve szoktak róla beszélni, egy katonai fürdőház toldalékának gondjával gyötörtek egy BOLYAI JÁNOSt. Ki volt ZIMMER? Alezredes. Katona, tehát feljebbvalókkal és alárendeltekkel. Alkalmazott megbízásokkal. Dolgozó, munkakörének megfelelő javadalmazásával. Kötelességekkel tehát. Mit tehet az, akinek parancsolnak, és ügykörének ellátását megköveteli? ZIMMER feladatokkal volt megbízva és kötelessége volt a „terv teljesítése". BOLYAI JÁNOS nem „kényszermunkásként" került ZIMMER mellé. Munkaköre önként választott életpályához tartozott. Rátermettségét mások áldozatkészségével támogatott iskoláztatásban szerezte meg. Foglalkoztatásáért javadalmazást kapott, mellyel természetszerűleg jártak kötelességek. És a feladatok nem szűntek meg feladatok lenni azzal, hogy BOLYAI kitért az elvégzésük elől. Az el nem végzett munka megmaradt tehernek — más számára. A levest a feudális világban is vízzel főzték! BOLYAI nem volt létszámfeletti! „Betervezett" volt az ő munkabírása is! Panaszkodnak is, és pedig joggal, nincs haszon belőle, útjában áll más előhaladásának, holott egy

[23] *Friedrich der Grosse. Gespräche mit Catt.* Verdeutscht und herausgegeben von Willy Schlüssler. Leipzig, 1940. 487. l.

munkabíró, felhasználható tiszt jobban ellátná a kötelességét és inkább érdemelné meg a BOLYAI helyzetével járó előnyöket. A kivételes erkölcs a polgári „festett egekhez" tartozik. Az „önös érdek" rabszolgája, a polgári prüdéria mereszti „kancsalul" a szemét a társadalom bohémjai felé. A tudomány pedig nem a bohémek szakterülete. Az Igazság keresése, az Igazság szolgálata komolyságot kíván — komédiázás nélkül. Kivételes egyén, kivételes erkölcs a tudománytörténet értékrendjébe nem illeszthető be.

A „magyar mese és mondavilág" az, amit SOLYMOSSY SÁNDOR akar elhitetni akadémiai előterjesztésében: „Bolyai János 1827-ben Bécsben lemond tiszti rangjáról és hazajön, hogy kis birtokukon Domáldon, gazdálkodjék s a csendes elvonultságban zavartalanul foglalkozhassék elméleti rendszere teljes kiépítésével." BOLYAI JÁNOS épp úgy nem vállalta a kisgazda gondját, mint ahogy terhére volt, hogy fürdőházféleséggel foglalja el az eszét. BOLYAI ANTAL 1845-ben gyermektelenül meghal. Vagyonából semmit sem örököl BOLYAI JÁNOS. Ami közönségesen azt jelenti, hogy „megméretett és elégtelennek találtatott" mint gazda. Talán elfogult volt BOLYAI ANTAL unokaöccse iránt? DÁVID LAJOS írja: „Farkas az öccse halála után jobban érdeklődve a domáldi birtok iránt, újabb haragra gerjedt. Kiderült ugyanis, hogy János hanyagul gazdálkodott és a szép erdő egy részét levágatta és eladta. Ezért Farkas bérbeadta a birtokot s így Jánosnak más lakóhelyről kellett gondoskodnia. Marosvásárhelyt egy kis házat épített és 1846-ban családjával együtt abba költözött."[24]

„Bár maradtam — vagyis inkább marasztódtam vagy hagyódtam volna eleje óta itt az az atyám' s szülőim' — a' helybeli az az Maros-Vásárhelyi fő-tanoda' Muzsája körül, 's lettem volna idővel itt nyi-tanár, 's ne léptem volna Marsnak természetem — 's hajlamommal, vonzalmommal ellenkező mezeje — vagy pályájára", írja BOLYAI JÁNOS egy papírszeleten a vallomást. (L. 26. képmelléklet.) Egykori visszaemlékezésekből ma már tudjuk, mit jelentett elfoglaltságban és kötelezettségekben a „nyi-tanár" megbízatása Marosvásárhelyt. Hogy tanított BOLYAI FARKAS? Mire mutatott példát? Mitől vette el az idejét a professori megjelenés a hallgatóság előtt? De milyen volt a többi „matheseos professor"? Milyen volt GAUSS? Milyen volt sok más híresség? „Scherz und Ernst in der Mathematik": a megfoghatatlan türelem, ahogy egyesek az előadók ajkán csüngtek és reméltek ... Nem kétséges, BOLYAI JÁNOS mint „matheseos professor" találta volna meg az egyensúlyt eszmevilágához. De nem így lett. És mit tehet erről HABSBURG JÁNOS? Mit tehet erről GAUSS? BOLYAI JÁNOS előtt nem volt eltorlaszolva az érvényesülés. Csupán annak kellett volna lennie, ami nem volt, — munkaszeretőnek ......

Mennyiben közelíti meg a valóságot az itt is, ott is található feltevés GAUSS levelével kapcsolatban? BOLYAIt nem elégítette ki GAUSS válasza, vitatkozásra késztette. Gondolatait János Főherceghez benyújtott kérelmében foglalja össze. Világos öntudattal jelöli meg vizsgálódásainak helyét, értékét. „Es ist denn", írja beadványában, „in derselben Schrift, ein Gegenstand, woran, seit der bekannten Cultivirung der Geometrie durch die Griechen — welche ihren ganz eigenen Scharfsinn auch in dieser Wissenschaft so rühmlich bewiesen haben — also seit etwa 2100 jahren, die rastlosesten Bemühungen aller ausgezeichnetsten und scharfsinnigsten Geometer — wie man mit vollem Rechte sagen kann — gänzlich scheiterten, auf das Vollkommenste ergründet, durchdrungen, und ins Klare

[24] DÁVID L.: *A két Bolyai.* 137. l.

gebracht, obwohl selbe absichtlich bloss die Quintessenz des Wesens der Sache erhält, und bei dieser Gelegenheit aus verschiedenen Gründen, namentlich auch zur Ersparniss der Auslagen, dasselbe nur in gedrängtester Kürze darbietet, wo freilich nur des Kenners Auge durchdringt. Es ist wohl die wesentlichste, wichtigste, interessanteste, und auch genug verwickelte Aufgabe der Raum Lehre, und eigentlich eine aus dem Grunde, und durchaus neue, bisher von allen Geometern nicht einmahl dem Begriffe nach geahnete Wissenschaft."

De GAUSSra vonatkozó megjegyzései vitathatók. A valóban benyújtott kérelem megszövegezésben élesebb, mint a Lembergben készült fogalmazvány, melyet STÄCKEL közöl. Olmützben terjedelmes találgatásokba bocsátkozik GAUSSról. Bár BOLYAI szerint GAUSS „allbekanntlich Einer der Kolossalsten Geister aller Zeiten, der grösste jetzt lebende Mathematiker, zugleich aber auch ein eben so strenger als einsichtsvoller, und mit Belohnungen äusserst sparsamer Recensent", mindazonáltal „glaubt der ehrfurchtsvoll Gefertigte — ohne die den ganz vorzüglichst ausgezeichneten glänzenden Verdiensten dieses genialen Geistes gebührende Hohe Achtung verletzen zu wollen — jenem Aufsatze sowohl, als sich selbst, schuldig zu sein, erwähntem Briefe einige Bemerkungen beizufügen, und einige Umstände auszuführen, wonach Schrift und Brief richtiger beurtheilt werden können." (L. 27. képmelléklet.)

BOLYAI megjegyzi: „Auch ist der Umstand nicht wenig auffallend, und hinsichtlich der Wahrheit der Behauptung, auf die Resultate der Schrift schon selbst, in folge eigener Nachforschungen gekommen zu sein, den gegründetsten Verdacht erregend, dass indem der Vater des Gefertigten — nach einem bereits seit 30 Jahren, und zwar durch Gauss, unterbrochenen Briefwechsel — das Büchlein nebst einem Briefe, worin der Inhalt und das Wesen der Sache in Kürze deutlich angezeigt war, Herrn v. Gauss schon vor einem ganzen Jahre zustellte, Ersteres jedoch durch die Cholera aufgehalten wurde, so das Gauss bloss den Brief erhielt, er damals mit keiner Sylbe irgend eine ähnliche Erklärung machte, bis er endlich — wie er Eingangs in seinem Briefe selbst sagt — die Schrift selbst erhielt. Wäre er mit diesen Untersuchungen und Ergebnissen so vertraut gewesen, als er angibt; so wäre doch offenbar gleich nach Erhalt des ersten Briefes der schickliche Zeitpunkt gewesen, zu erklären, dass er, noch den im erhaltenen Briefe enthaltenen Andeutungen und Ankündigung in derselben Schrift nichts Neues für sich erwarte; und dieses hätte Gauss bei einer — wie es seine langwierigen Bemühungen schon hinlänglich beweisen — auch von ihm für so wichtig gehaltenen Sache, und seinem mit seinen riesenhaften Verdiensten ganz gleichen Schritt haltenden Ehrgeitze auch ganz gewiss nicht unterlassen, wenn er sich anders der Sache nur mächtig gefühlt hätte. Dies hat jedoch Gauss nichts weniger als gethan; vielmehr wartete er in tiefster Stille die Ankunft der Schrift selbst ab, welche gegen Ende des Jänners diese Jahres Statt fand; Diese Zeit mit dem Datum seines Briefes verglichen, gibt zu erkennen, dass bis zur Beantwortung selbst abermals sechs Wochen vergingen, wodurch er wenigstens nicht bewiesen hat, dass ihm selbst die fertige Arbeit durchzudringen gar keine Mühe gekostet habe."

És a csattanója a spekulációknak:

„Genug gross scheint des grossen Gauss Verwunderung, Betroffenheit und Würdigung allerdings zu sein, da er bei all seiner Zurückhaltung im Loben — bei dieser wie bei jeder Gelegenheit — von seiner Überraschung sich gar nicht erholen zu können scheint. Was aber noch weit mehr und vorzüglich zum Vortheile der Arbeit spricht, ist eben der Umstand, dass ein so glänzendes Talent, und sonst sehr consequenter Kopf dadurch verleitet wird, durch Vorbringung absolut nichtiger und wiedersinniger Gründe und Ansichten hinsichtlich der vorgeblichen Geheimhaltung seiner eigenen Entdekungen, Einen zu überführen, dass er in der Schrift nur sich selbst wieder gefunden habe. Dass ein mit so vielen und bedeutenden brillanten Leistungen geschmückter Genius so sehr eifert, und sich ambitionirt, da er nun einmal der Erste hierin nicht sein kann, wenigstens ein gleichzeitiger Löser des Problems zu erscheinen, gibt auch einen genug kräftigen Beweis ab einer Seits von der hohen Wichtigkeit und Werth der Sache, anderer Seit von dem lebhaften Interesse, welchen ein so hellsehender Kopf für denselben Gegenstand hegt, besonders wenn man sich an die 30—35 Jahre erinnert, während welchen er doch von Zeit zu Zeit nach seinem Ziele strebte. Im Berücksichtigung aller dieser Umstände dürfte denn der Brief von Gauss, eben wegen des offenbar gezwungen ertheilten und doch gross genug ausgefallenen Lobes, als mehr sagend angesehen werden, als jede erdenkliche in Worten gefasste Lobrede."

Mindez a lembergi fogalmazványból teljesen hiányzik, és a későbbi hónapok rágódásainak a „vívmánya". Tisztázott, hamis feltevésekből következtetett BOLYAI. Hiszen GERLINGnek már február 14-én említést tesz GAUSS BOLYAIról,[25] nem volt tehát szüksége hat hétre, hogy fáradságosan átvergődjék a küldött értekezésen, ahogyan azt BOLYAI a fantáziájában kiszínezte magának. És ZITTA őrnagy[26] legalább is ebben a vonatkozásban helyesen ítél BOLYAIról: „... dass ihn leider nach der Ansicht des gefertigten Fortifications-Local-Directors der Scepticismus hierin auf Abwege leite."

Alaptalanul — tájékozatlanul — érzékenyül el DÁVID LAJOS, mikor ezt írja: „Szegény János kínosan vergődhetett a nehéz kérdés előtt: mellékelje-e Gauss levelét a kéréshez, vagy ne? Hogy vajon mi ragadja meg jobban elöljáróinak a figyelmét: Gauss sokat jelentő, de finom, tartózkodó elismerése, vagy pedig az elsőbbségre vonatkozó, könnyen félreérthető rész. Kínos vergődés lehetett ez, mutatja a kérés aggodalmasan körülményes szövege. Nem is indította folyamodását előbb útnak, csak augusztus 8-án."[27] BOLYAI a valóban elküldött folyamodványában megadja az okot, amiért már előbb nem jelentkezett kívánságával. Nem befejezetlen töprengések miatt habozott. Egyszerűen nem volt mellékelhető példánya a vizsgálódásaiból. Másrészt nagyonis okosan, friss találékonysággal használja ki, hogy a levél ilyen is, meg olyan is: „Im Berücksichtigung aller dieser Umstände dürfte denn der Brief von Gauss, eben wegen des offenbar gezwungen ertheilten und doch gross genug ausgefallen Lobes, als mehr sagend angesehen werden, als jede erdenkliche in Worten gefasste Lobrede." ......

A kérelem a lembergi fogalmazványban másként hangzik, mint amit Olmützben valóban benyújtott. A lembergi „fellengős" eszmetársításokat BOLYAI egész-

[25] *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling.* Berlin, 1927. 378. l.

[26] IRENA SEIDLEROVÁ: Politické a sociální názory Bernarda Bolzana. Praha, 1963. Az 56. oldalon egy műről olvasható megjegyzés: Zitta, Kurzgefaßte Darstellung eines neuen Staats- und National-Wirtschaftssystem.

[27] DÁVID L.: *A két Bolyai.* 101. l.

séges szimattal kihagyta Olmützben. „In der vollkommensten Überzeugung", írja Bolyai Lembergben, „dass die gute Sache stets Euerer K. H. höchster Berücksichtigung sich erfreuen darf, wagt er demnach in tiefster Ehrfurcht, Höchstdemselben die allergehorsamste Bitte vorzutragen: ihn Behufs des oben angeführten auf drei Jahre von den eigentlichen kurrenten Dienstgeschäften gnädigst entfernen und nach Hermannstadt in die heimatliche Luft (zu)befehligen zu geruhen und zugleich (zu)genehmigen, in Maros-Vásárhely bei seinem Vater mit einem dreimonatlichen Urlaube verbleiben zu dürfen, um dort jene persönliche Erholung, jene geistige Ruhe und Musse zu erhalten, wodurch allein er seinen obausgesprochenen Zweck zu erreichen (und der Menschheit den möglichst grossen Dienst zu leisten) imstande ist (worein er so sehr sein höchstes Glück setzt, dass er seinen eigenen Wert einzig nach der Fähigkeit bemisst und sich selbst stets nur in dem Masse schätzt, als er zu seiner eigenen Veredelung und somit zur Ausbildung des ganzen (Menschen-)Geschlechts beizutragen Kraft in sich fühlt)."

Hogy ebben a néhány mondatban mi bontogatja szárnyait, azt a lembergi fogalmazvány egy megjegyzése árulja el, melyet azonban közölni Stackel nyilvánvalóan nem tartotta eszélyesnek.[28]

„NB. Selbst das Bewustsein des Besitzes
die Vernuft (begabt)
und das Sittlichkeitsgefühl
stellt (erhebt) erweckt in mir
nicht so sehr, als die Fähigkeit,
eine die vollk. Wissensch (Grund-)
anzufangen, und in ihr
ins fortzuschreiten
die Götternatur die mich (und) (denn)
diese macht mich gleichsam
zu einem endlichen (Kinds)
Gott."

Milyen beszéd ez? Ki töpreng előttünk? Bolyai János a „geometer", vagy pedig — „ein endlicher (Kinds) Gott"? ... Lembergben vagyunk még! 1832 májusában! ... És az „Üdvtan" árnyával Bolyai elméjére borul. Bolyai sorsa elvégeztetett, de nem Gauss miatt!

A dokumentumokat látni is kell! (L. 28. és 29. képmelléklet.) A dokumentum nemcsak szöveg! Emberi tett, az alkotás jeleivel! Az ember nemcsak azért vesz elő tintát, papírost, mert szerződést akar valakivel kötni. Mi járt Bolyai eszében,

[28] Stäckel: *Wolfgang und Johann Bolyai geometrische Untersuchungen*, Leipzig, 1913. I. Teil. A 229. oldalon: „Ein Entwurf dieser Bittschrift, datiert Lemberg, den 3. Mai 1832, befindet sich im Besitz von Herrn P. Szabó (Budapest). Dieser hat mir eine Abschrift des wichtigen Schriftstücks zur Verfügung gestellt, die ich hier abdrucke." A Stäckel által közölt szöveg azonban nem teljes. A folyamodvány-fogalmazvány a közölt résznél tovább folytatódik, azonkívül több, kiegészítő megjegyzés is található, — köztük más tintával és latin betűkkel! — mely figyelmen kívül maradt. A közlésből kimaradt szövegrész kibetűzése számunkra még nem sikerült teljesen. Azonkívül nem tudunk számot adni még határozottan a különféle írásszokásokról. Felvilágosítást csak egy grafológiai analízis hozhat. Erre még eddig sor nem kerülhetett. De bizonyos következtetések a dolgok szelleméről már most megtehetők.

mikor a kérvényét kezdte írni, és arra ilyen, olyan, amolyan szavakat firkálgatott, vastagon, hajszálvékonyan, majd így, majd úgy?

Bolyai :ötször is próbálgatva
Briefe
nobilis Hungarus :kétszer, vékonyan, vastagon
Polnisch
Polen, Polen
unendlich kleine
imaginäre imaginäre Grösse
Scharfsinn Scharfsinn
homogenea
heterogenea
Baron Robo da Salveyra
Portugall

és még más egyéb, matematikai jelek, betűk. Valóban csak azon töprengett BOLYAI, mutassa, ne mutassa GAUSS levelét? Milyen volt BOLZANO magánya Libochban, mikor a „Paradoxien des Unendlichen" feljegyzésével volt elfoglalva? ... Micsoda órákat élt át POINCARÉ, mikor vallomásra késztette „la valeur de la science"? ... És HILBERT tulajdonképp micsoda életnek jegyezte fel tanulságát, mikor mottónak írta fel KANT híres szavait? ... „So fängt alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen". ...[29]

BOLYAI számára a csillagos ég rendje és a derék ember eszméje nem hozta meg az egyformánegy napok derűjét. „Die Vernunft und das Sittlichkeitsgefühl" BOLYAI „Otiumába" a felzaklatottságot sodorta be. Kezdte azzal, hogy „semmiből egy ujj, más világot teremtett", és — szembetalálta magát a mese palackjából kiszabadult szellemmel. Lerázhatatlan lidércként települ életére a feladat: „eine vollkommene Grundwissenschaft anzufangen, und in ihr ins Unendliche fortzuschreiten".

BOLYAI élete nem kívülről lett komplikálva, hanem belülről az eszmék világából. A parancsoló szükség, az elodázhatatlan követelés: rendet teremteni a gondolatokban!, kuszálja össze viszonyát másokkal és kergeti bele a hypochondria praktikáiba. Bizonyos „normalitással", bizonyos beleilleszkedéssel, triviális találékonysággal csak felnyílott volna előtte a sorompó a „nyi-tanár" igézetes, sima porondja előtt. De az „Üdvtan" BOLYAI vékonyába vágta sarkantyúját, és kihajszolta a földi paradicsom virányaiból. Az „Üdvtan" igényeivel a matematikát is megfojtotta BOLYAIban.

„Gondolj merészet és nagyot, tedd rá éltedet!" ... „Dem Tüchtigen ist diese Welt nicht stumm!"[30] ... Ez és a többi a 18. század „hitvilágához" tartozott. Az ünnepi szónokok akkor a felvilágosodott ember illúziójával hírdették: „Lángeszű emberek, bármely országból valók vagytok is, ime a ti sorsotok! A szerencsétlenségek, az üldöztetések, az igazságtalanságok, az udvarok megvetése, a nép közönyössége, versenytársaitok vagy azok rágalmai, akik azoknak tartják magokat, a nélkülözés, számüzetés s talán sötét halál, ime ezeket jósolom én ti nektek. De

[29] HILBERT: *Grundlagen der Geometrie.*
[30] GOETHE: *Faust.* 2. rész, 5. felv. 11446. sor.

vajon lemondjatok-e ezért az emberek felvilágosításáról? Nem, kétségkívül. S még még ha akarnátok is, vajon bírnátok-e? Vajon megbírjátok-e fékezni lángelméteket s ellenállni annak gyors és rettenetes impulsiónak, amelyet az nektek ad? Nem azért születtetek-e, hogy gondolkodjatok, miként a nap, hogy szétárassza fényét? Nem azért kaptátok-e, mint az, a mozgástokat? Engedelmeskedjetek hát annak a törvénynek, amely fölöttetek uralkodik s óvakodjatok magatokat szerencsétleneknek tartani. Mik a ti összes ellenségeitek az igazsághoz képest? Az örök, a többi pedig elmulik." Egy AMPÈRE egész életére lendületet merített ezekből a szavakból. És bizonyára még mások is. Elbűvölten bámultak bele az ígéret földjének boldogító varázsába. „Ti csak egyetlen népet és egy családot fogtok képezni mindazon nagy emberekkel, akik csak valaha éltek, vagy akik egykoron élni fognak. A ti sorsotok nem az, hogy a tér vagy idő valamely pontján létezzetek. Éljetek az összes országok és az összes századok számára; terjesszétek ki élteteket az emberi nem életén túl. Vigyétek eszméiteket még magasabbra ... És ti szerencsétlenek volnátok?"[31]

BOLYAI is még a 18. század eszmevilágából hajt ki.[32] És az „Üdvtan" a korábbi lelkesedés fellegén lebeg. Nem matematika az már csak, ami a lembergi fogalmazványban kísért, és nem GAUSS levele elsősorban, ami az elhatározást sarkallja. Kitárulkozó elhatározások, amiket mégis magába rejt: „ ... jene geistige Ruhe und Musse zu erhalten, wodurch allein er seinen obausgesprochenen Zweck zu erreichen und der Menschheit den möglichst grossen Dienst zu leisten imstande ist, worein er so sehr sein höchstes Glück setzt, dass er seinen eigenen Wert einzig nach der Fähigkeit bemisst und sich selbst stets nur in dem Mass schätzt, als er zu seiner eigenen Veredelung und somit zur Ausbildung des ganzen Menschen-Geschlechts beizutragen Kraft in sich fühlt." Hol mondanak ki ilyen szavakat a magyar glóbuszon? Helyénvaló lesütni a szemet, ha az „Üdvtanról" van szó? ...

„Egyébként János sohasem törte magát a nyugalom után", állítja ANNA LIVANOVA Három sors símű ismeretterjesztő novellájában.[33] Szerinte BOLYAI JÁNOS „lázadó lélek volt, kereste a viharokat: kívánta a forradalmak dörgését, melyek megtísztitanák az Osztrák—Magyar Monarchia áporodott levegőjét". ANNA LIVANOVA úgy véli, ideje, hogy BOLYAI JÁNOST úgy lássuk, amilyen valóban volt, mert bár „Bolyai János szokatlan élete és fékezhetetlen jelleme kortársainak és az utódoknak egyaránt felkeltette a figyelmét", mindazonáltal „oly sokáig meg-

[31] THOMAS: *Descartes emlékezete.* Franciából fordította Rácz Lajos. Budapest, 1896. Olcsó Könyvtár 992—993. sz. 75. l.

[32] DELBLANC, S.: *Ära och minne.* Studier kring ett motivkomplex i 1700-talets litteratur. Stockholm, 1965. A 249. oldalon: „La doctrine de „l'art pour l'art" est inconnue au XVIIIe siècle. Il est sous-entendu pendant ce siècle que la littérature doit être utile à la société. On imagine cette fonction d'utilité sociale réalisée de plusieurs manières. ... La Nation impose au poète de consacrer un culte des grands hommes, de les immortaliser, de leur prêter de la gloire. Par là il anime l'instinct d'émulation et le désir de la gloire de ses contemporains, et ce sont là des sentiments fort utiles à la société. Dans l'oeuvre d'art littéraire, les grands hommes sont représentés aux contemporains du poète en tant que des exemples à suivre. ... Cette idée pouvait s'appliquer à beaucoup de genres littéraires et était en effet le fondement théorique de l'éloge académique. Ce genre fut inauguré en 1759 sous les auspices de l'Académie Francaise. Le représentant le plus remarquable en était Antoine-Léonard Thomas (1732—1785). Son genre obtint une haute estime en Europe et fut beaucoup imité ... L'éloge doit glorifier les grands hommes de la patrie et exciter par là le désir de la gloire des citoyens. ..."

[33] ANNA LIVANOVA: *Három sors. Elbeszélés egy nagy felfedezésről.* Budapest, 1960. Studium Könyvek, 16. 74. l.

hamisították alakját". ANNA LIVANOVA „szorgos" kutatásainak eredményeképpen megállapítja: BOLYAI JÁNOS „nemcsak kiváló tudós volt, hanem a szabadság harcosa is. Enélkül nem teljes Bolyai János képe, nem látjuk fájdalmait, forró és tiszta szívét, az emberek iránti odaadó szeretetét". És csoda, fűzi tovább gondolatait elmerengve ANNA LIVANOVA, hogy még száz esztendő multán is vitatkozni kell BOLYAI JÁNOS igazi szellemi arculatán? Hogy kutathatott BOLYAI JÁNOS írásaiban, aki kutatni akart? ANNA LIVANOVÁnak nyilván megvannak a maga tapasztalatai. Akart kutatni, és nem engedték kutatni. Sőt nem engedték kutatni a fordítóját sem. Nem engedték kutatni a Gondolat Kiadó lektorát sem. Nem is kísérleteztek vele. Hiszen köztudomású — ANNA LIVANOVA „megállapításában" —: „János gondolatai és vágyai, melyeket mély egyedüllétében csak papírra bízhatott, levéltárak mélyére kerültek, mélyen eltemetve, nehogy isten ments valaki is nyomdokaiba lépjen. Ne csodálkozzunk ezen. Tüzes szavai riadóként hangzottak . . . "

Tudjuk a történelmet! Egy napon KOSSUTH LAJOS úgy érezte, „mintha Isten kezébe adta volna a tárogatót". A serkentő hangra megmozdult az egész ország. PETŐFI tudósít a nagy napokról: „Tiz katona esett a helységre, nem volt szükség fogdosó kötélre, húsz legény ment maga jószántából zászló alá az eke szarvától." És ugyan miért? Hírnév, dicsőség az, ami akaratukat keménnyé teszi? „Mit tudják ők, mi az a dicsőség?" írja PETŐFI vallomásszerűen. „Ha tudnák is, mi hasznuk van benne? Nincsen lap a történet könyvében, ahol nevök följegyezve lenne. Ki is győzné mind fölirni, akik tömegestül el-elvérezének? . . . Ha megtérnek csonkán a csatákból, koldusbotot ád a haza nékik, s ha elesnek a felejtés árja foly sírjukon s neveiken végig. És ők mégis nekimennek bátran az ellenség kardjának, tüzének!" . . .

És BOLYAI JÁNOS? Kardot ragad? Csatáz, vív, és míg nem győz nincs nyugalma? Hol és kinél jelentkezik a nagy idők és nagy emberek legendás napjaiban? . . .

Schutz — Brief

für den pensionirten Kais. König. Herrn Hauptmannn von Bolyai, — welchen nicht allein seine beihabenden Waffen zu belassen, sondern auch von jedem k. k. Militär; — Nationalgarde und Landsturm, der gesetzliche Schutz in jeder Gelegen- heit beizustellen, und seine Person — sowie sein Eigenthum gegen alle Gewalthat zu wahren ist.

Maros-Vasarhely am 6ten November 1848.

L. S. Gedeon FML m.p.

vom Commandanten der Fortification zu Marosvásárhely.

1849 március elején PETŐFI Marosvásárhelyen jár. Ott írja: „Bizony mondom, hogy győz most a magyar . . . Azért nem győzött eddig is e hon, mert sohasem volt egy akaraton; most egy a lélek, egy a szív, a kar . . . Mikor győznél, ha most sem, oh magyar? Egy ember a haza, s ez halni kész" . . . .

BOLYAI JÁNOS is természetesen „egy akaraton" van. 1849. május 13-án írásban is nyilatkozik róla. „A' Helybeli Tér-Parancsnokságnak a' folyó év' Májussa'-ról kelt (hiányzó) számu üdvös Rendelete következtében, alul-irott törvényes katonai kötelességem szerént, ezennel sietek jelenteni: hogy én, félrokkantnak találtatván, az 1833-év' Juniussa' 16-a óta vétettem-át az eddigi szabályszerü nyugalomba, mint második osztályi fizetésü százados. A' fön-tisztelt Rendelet' harmadik pontjának ezennel azon rövid nyilatkozattal teszek-eleget: mi-szerint én, mint szolgálatom' ugy nyugalmom ideje alatt is, és soha meg-nem-szüntem és szünöm a köz- és minden egyéni üdvre vagy boldogságra vagy tökélyre, vagy-is az igazi leges-legfelsőbb szolgálat' lehető- és ki-telhető elő-mozditására és javára töröködni: mely mindnyájunknak, öszvesen és egyenként — mind az eredeti vagy kezdetbeni természet vagy vak-ösztön, szüv-hajlam vagy vonzalom, egy-érzelem, együtt-érzet, érzeti rész-vétel, rokon-szenv, symphatia, mind az okos müvölt második természet vagy okos ösztön, józan-Okosság, ész vagy eszély-(esség), (élet)-bölcseség, erkölcsi' s jobb polgári törvények szerént is — fő-, vég-, köz- és ön- azaz ön-magáérti célja, minden célok' célja, melyre mindenki, mindenkor, az ugyanakkori belátása szerént, tehetsége vagy képességéhez, hatás-körében képest, valósággal és szükségképpen töröködik is — ha, a' müvöltség' alsóbb fokán álló, bár ön-tudatlanul is —; és mely, kétségen kivül, a' leg-fölsőbb cél: mire ember, angyal, söt némileg maga az ISTEN is töröködhetik. . . . . "

„Egy szóval figyelmem nagyjában minden olyas, a' köz-üdvre elkerülhetetlenül szükséges, bár köz-hasznos, legalább jó izlés és csinositás tekintetétől közérdekesre ügyököződött ki-terjedni. És, mint a fölöbbiből is már eléggé sejthető: rég óta tervemben van ugya' szabadság' 's a' többi jó' meg-szerzése is, de — mit ugyan Nemzet-gyülésünk 's Kormányunk is minden lehetőleg akartt, de már most per se a' körülményeknél fogva, büntetlen önoltalomból, vagy moderamine inculpatae tutelae nem lehetett — szelid uton; és forradalom, revolutio, 's erőszak még sok kell, de én lehetőleg csak szellemit az az okok hatalma' általi meggyőzést terveztem; könnyen meg-eshetvén: hogy mint jelenleg egy fegyver által meg-hoditott nagy országban egy kis szüv sincs el-foglalva, meg-hajtva; 's kül-erőszak általi bár-mely szép győzelem mind csak helybeli, ingatag 's benne állandóul bizni nem lehet, leg-alább meg-nyugodni és meg-elégedni vele: mig a' szüvök, lelkületök is nincsenek jó rendben."

De a sajátságosan mérlegelt forradalmi taktika mellett BOLYAI JÁNOS, a „fékezhetetlen jellem", a „lázadó lélek", aki a „viharokat keresi", a „forradalmak dörgésében" van igazán otthon, kénytelen bevallani, számára a nagy idők és nagy emberek harca olyankor szakadt napjaira, amikor egészsége annyira rossz már, hogy — mint írja — : „strápátziák', kivált a' hadiak' még a' leg-kedvezőbb Májusi időben is, annyival inkább szigoruban, melylyel lelkes hőseink a' mult télen oly bámulatosan számba-nem-vevőleg küzdöttek, el-hordozására telyességgel alkalmatlan vagyok, sőt annyira nem vagyok e' részben magamnak ura: hogy nem csak dob- vagy trombitaszóra, hanem a' leg-csendesebb rendes orára tartozó kötelességet sem merhetek vállalni".[34] . . .

ANNA LIVANOVA úgy tájékoztatja az olvasóit, „csak napjainkban sikerült Magyarország és Románia matematikusainak nagy munka árán felkutatniok János rengeteg publikálatlan művét és feljegyzését. Így most első izben hangzottak fel teljes erőből az egyszerű emberek iránti szeretetének szavai s a mindenféle zsarnokság haragos leleplezését tartalmazó gondolatai". Az egyik „Magyarország mate-

[34] Marosvásárhelyen őrzött kéziratból másolta JELITAI (Woychechowski) József 1938 augusztusában. Megjelent: *Mat. és Termtud. Ért.* 1939. LVIII. köt. 708—714. l. „A marosvásárhelyi honvéd térparancsnokságnak szánta ezt a fogalmazványát Bolyai János", jegyzi meg bevezetésül Jelitai. „Nem egyéni írásjeleivel írta, hanem közönséges írással, hat ívrét oldalon." Jelitai szerint is: „Akármilyen szempontból nézzük is az alább teljes hűséggel közölt különös írásművet, az mindenképp fontos adatokat szolgáltat a legnagyobb hírű magyar tudós szomorú sorsának, rejtélyes egyéniségének és bonyolult lelkivilágának megismeréséhez."

matikusainak nagy munkája árán" felkutatott publikálatlan írásmű mintegy 30 fólio oldalt tesz ki, és 1852. július 29-ről van keltezve. Nevezetes esemény közelségében van ez a nap. 1852. július 31-én érkezett Marosvásárhelyre Ferenc József erdélyi körútja alkalmából. Egy dráma tárgya is a fejedelmi látogatás. *A két Bolyai* a címe, 1932-ben jelent meg a Danubia kiadásában. RÓZSA MIKLÓS a szerzője, és művével együtt versenyzett a Kóczián-díjért a *Gradus ad Parnassum* szerzőjével. RÓZSA „írói szabadságában" BOLYAI JÁNOS egy fékezhetetlen, esztelen forradalmár. A császár fogadására egybegyűlt notabilitások között hangoskodva becsmérli atyját, és feltűnést keltve fogadozik: „Nos, én a Kossuth-nótát fogom énekelni, ha a császár belép." Természetesen ez közbelépésre ad okot. Egy főhadnagy áll JÁNOS elé: „Bolyai János százados, Ön felségáruló! A kardját, százados úr!" JÁNOS lecsatolja a kardját és átadja a rendteremtőnek. „Éljen Erdélyország!" kiáltja JÁNOS a képzeletbeli színpadon, mire elvezetik a fogdába. Pontos leírásaink vannak a császár látogatásáról. Szinte óráról órára követhetjük az eseményeket. A császár környezetéből így jelentik:[35] „Vom Brunnen bis an das Militärdistrikts-Kommandogebäude, dem Allerhöchsten Absteigequartier, standen die sämmtlichen Civilcorporationen mit ihren Vorstehern an der Spitze. Die Kammerherren, die mit der Ehrenwache nicht ausgerückten Herren Offiziere des aktiven und Pensionsstandes . . ." BOLYAI JÁNOS talán nem volt jelen? BOLYAI JÁNOSt már napokkal előbb lekötötte a várakozás a császár látogatására. Nagy terveket forgatott a fejében és le is írta. (L. 30., 31., 32. és 33. képmelléklet.) Bolyai János így kezdi memorandumát a —császárhoz:

An
Seine Kaiserlich-Kőnigliche
Apostolische Majestät
Allerunterthänigster Vorschlag
von
Johann Bolyai von Bolya
Hauptmann in Pension zu
Maros-Vásárhely

des besten, ja einzigen, und sonst kaum aufgefunden werdenden Weges zur möglichsten und grösstartigsten Beförderung des Allerhöchsten Dienste, und zu einer, das allgemeine und jedes indiwiduelle Heil oder Wohlfahrt oder Glückseligkeit, auf eine sehr geschmeidige oder für Jedermann angenehme Art und schnell oder so- gleich herbei führenden Staats-Organisation

Bolyai nemcsak javaslatokat terjeszt elő az „Üdvtan" szellemében, de magáról is vallomást tesz. Distanciálja magát a forradalmi mozgalmaktól! (L. 32a és b képmelléklet.) Így magyarázza magát:

„So wie ich ein innigster Freund von geziemender, somit vorsichtiger, den Zeiten, Umständen und Verhältnissen angemessener Freimüthigkeit bin: so stand ich seit jeher jeder Opposition gegenüber der Regierung höchst tadelnd entgegen — den ganzen Erfolg der Dinge der Hauptsache nach, seit den Vorbereitungen

[35] *Die Rundreise Sr. k. k. apost. Majestät Franz Joseph des Ersten durch Ungarn und Siebenbürgen im Jahre 1852.* Als ein Beitrag zur Geschichte unserer Tage mitgetheilt von einem Augenzeugen. Wien, 1852. 138. l.

zu dem siebenbürgischen Landtage im Jahre 1834, den Geist dieser Landtage kennend, und den damaligen überspannten Ton der Gemüther Einiger wahrnehmend ganz richtig eingetroffen vorausgesagt — ; und auf solche Art, was ich freilich auch nicht darf, weder in Staats-Angelegenheiten — deren Leitung und definitive Entscheidung darüber der von der göttlichen Vorsehung aufgestellten Regierung und den von Allerhöchstderselben dazu bestimmten Personen überlassend — noch Religions-, noch irgend einen anderen Gegenstand mich mische; nur als Niemanden Kränkender, ja höchsten Verhoffen nach in Jedermann nur die heilsamste und die erfreulichste Wirkung hervorbringender Philosoph meine Ansichten über die wichtigsten und interessantesten, die Menschheit und alle Vernunft-Wesen überhaupt, angehenden Dinge allerunterthänigst zur aller höchsten Einsicht und Prüfung und verdienter Würdigung zu eröffnen mir die Freiheit nehmend und übrigens Jedermann willigst seine eigene Meinung lassend, und somit auch die Annahme, oder Verwerfen hiervon völlig freistellend."

ANNA LIVANOVA azt írja: „Bolyai János nem tartotta lakat alatt gondolatait A világ hatalmasaival való érintkezésében ugyanolyan vakmerő és bátor volt, mint a tudományban."

„Tedd le azt a fegyvert, magyar nemzet", írja PETŐFI mérgében, „téged isten nem arra teremtett, el onnan a csatatérről, lódulj, messziről nézz csak rá, a kuckóbul! Ha urad jön, térdepelj le szépen, s csókold meg a korbácsot kezében, s várd el békén, mig reád halált szól, és kirug a nemzetek sorából!"

Milyen forradalmár volt BOLYAI JÁNOS? Olyan talán, mint PETŐFI? Nem! „Másmilyen!" . . .

„Selbst das Bewusstsein des Besitzes die Vernunft und das Sittlichkeitsgefühl erweckt in mir die Fähigkeit, eine vollkommene Grund-Wissenschaft anzufangen, und in ihr ins Unendliche fortzuschreiten" . . . Húsz esztendő telt el a lembergi merengések óta. Aki töpreng, aki tovább emészti magát, „ein innigster Freund von geziemender, somit vorsichtiger, den Zeiten, Umständen und Verhältnissen angemessener Freimüthigkeit", „höchsten Verhoffen nach in Jedermann nur die heilsamste und die erfreulichste Wirkung hervorbringender Philosoph" . . . Ez a gravitáció BOLYAI JÁNOS gondolatvilágában! Mint a fellegek közül hirtelen kiragyogó napsugár tündöklik fel a szó „Vernunft", „Sittlichkeitsgefühl", „Freimüthigkeit", — „Philosoph"! . . .

Csak meddő „döbögés" volt a sok levél, amit az apa a fiához írt? Sokan kételkednek az elhangzott atyai intelmek értékében és hasznában. Pedig nincs így! A hosszú, hosszú levelek ilyen-olyan tanáccsal BOLYAI JÁNOS szívében egy értékrendet építettek fel, mely hatalmasabban mozgatta meg indulatait, mint a parallelák lenyűgöző problémája. Mit mond a fiú az apáról? Miért csak a felfortyanásokra gondolni? Miért csak az összetűzésekre emlékezni? A pszichológia nem éri be a résszel, a pszichológia az egészből következtet. És az egészhez hozzátartozik a vallomás: „Az embert a' körülmények formálják, 's engem is derék Atyámtól nyertt üdvös irányom, szerencsés hajlamom, untalan figyelmem az érdekesre vitt oda: hol állok."[36] És van még szükség több szóra? . . .

[36] BOLYAI JÁNOS 1849. május 13-án kelt jelentés-tervezete JELITAI JÓZSEFtől. Mat. és Termtud. Ért. 1939. LVIII. k. 714. l.

BOLYAI JÁNOSt nem az elismerés kimaradása, hanem reá törő gondolatok árja sodorja ki társadalmából. Nem a barikádokon kell keresni hozzá a mindent megmagyarázó tettet. A tizenkilencedik század nagy magányosai szolgáltatják a kulcsot sorsához, azok a sóhajok, melyek keseredetten először adnak számot a kalandról, mely arra vár, ki az ideák ingoványába téved. „Es ist die Sache der Wenigsten", figyelmeztet Nietzsche — „jenseits von Gut und Böse",[37] „unabhängig zu sein — es ist ein Vorrecht der Starken. Und wer es versucht, auch mit dem besten Rechte dazu, aber ohne es zu müssen, beweist damit, dass er wahrscheinlich nicht nur stark, sondern bis zur Ausgelassenheit verwegen ist. Er begibt sich in ein Labyrinth, er vertausendfältigt die Gefahren, welche das Leben an sich schon mit sich bringt; von denen es nicht die kleinste ist, dass keiner mit Augen sieht, wie und wo er sich verirrt, vereinsamt und stückweise von irgendeinem Höhlen-Minotaurus des Gewissens zerrissen wird. Gestzt, ein solcher geht zugrunde, so geschieht es so ferne vom Verständnis der Menschen, dass sie es nicht fühlen und mitfühlen — und er kann nicht mehr zurück! er kann auch zum Mitleiden der Menschen nicht mehr zurück!" . . . .

I. MELLÉKLET*

„Euere Kaiserliche Hoheit!"
„Durchlauchtigster Erzherzog,
Gnädigster Herr, Herr."

„Der in tiefester Untertänigkeit Gefertigte hat früher, in dienstfreien Stunden, Untersuchungen über verschiedene, ebenso wichtige, als bisher gar nicht oder doch nicht gehörig bearbeitete Gegenstände aus dem Gebiete der Mathematik — er glaubt es — mit Erfolg angestellt. Selbe wünscht er nun sehnlichst vollends auszuarbeiten, und, in der seit jeher heiss gehegten Absicht, gute Sachen allgemein nützig zu machen, dem Drucke zu überliefern, und somit vor Untergang zu sichern."

„So schwierige Gegenstände können jedoch, besonders bei einem so schwächlichen Gesundheitszustande, als sich Gefertigter schon seit längerer

II. MELLÉKLET

Euere Kaiserliche Hoheit,
Durchlauchtigster Erzherzog,
Gnädigster Herr, Herr!

Der in tiefesten Unterthänigkeit Gefertigte hat früher, Untersuchungen über verschiedene, eben so wichtige, als bisher gar nicht, oder doch nicht gehörig bearbeitete Gegenstände aus dem Gebiete der Mathematik — er glaubt ės — mit Erfolg angestellt. Selbe wünscht er nun sehnlichst vollends auszuarbeiten, und, in der seit jeher heiss gehegten Absicht, gute Sachen allgemeinnützig zu machen, dem Drucke zu überliefern, und somit vor Untergang zu sichern. So schwierige Gegenstände können jedoch, besonders bei einem so schwächlichen Gesundheitszustande, als sich Gefertigter schon seit längerer Zeit befindet, nur durch ungetheilte und ungestörte Verwendung

[37] NIETZSCHE: *Werke*, München, Hanser Verl. II. k. 594. l. Jenseits von Gut und Böse. 29. aforizma.

Zeit befindet, nur durch ungeteilte Verwendung der Geisteskräfte hervorgebracht werden."

„In der vollkommensten Überzeugung, dass die gute Sache stets Euerer K. H. höchster Berücksichtigung sich erfreuen darf, wagt er demnach in tiefster Ehrfurcht, Höchstdemselben die allergehorsamste Bitte vorzutragen: ihn Behufs des oben angeführten auf drei Jahre von den eigentlichen kurrenten Dienstgeschäften gnädigst entfernen und nach Hermannstadt in die heimatliche Luft [zu] befehligen zu geruhen und zugleich [zu] genehmigen, in Maros-Vásárhely bei seinem Vater mit einem dreimonatlichen Urlaube verbleiben zu dürfen, um dort jene persönliche Erholung, jene geistige Ruhe und Musse zu erhalten, wodurch allein er seinen obausgesprochenen Zweck zu erreichen und der Menschheit den möglichst grossen Dienst zu leisten imstande ist worein er so sehr sein höchstes Glück setzt, dass er seinen eigenen Wert einzig nach der Fähigkeit bemisst und sich selbst stets nur in dem Masse schätzt, als er zu seiner eigenen Veredelung und somit zur Ausbildung des ganzen [Menschen]-Geschlechts beizutragen Kraft in sich fühlt."

„Wobei jedoch für den Fall eines plötzlich ausbrechenden Krieges die höchste Gnade er sich untertänigst erbäte, sogleich auch dazu kommandiert zu werden."

„Zur höchsten Würdigung fügt er folgende Bemerkungen bei."

„l. Bürgt beiliegende kleine Schrift dafür, dass seine Bemühungen auch selbst bei ganz ausserordentlichen und bisher allgemein für unüberwindbar gehaltenen Schwierigkeiten nicht immer fruchtlos bleiben. Wie Herr Hofrat Ritter von GAUSS — allbekanntlich einer der kolossalsten Geister aller Zeiten,

der Geisteskräfte hervorgebracht werden.

In der vollkommensten Überzeugung, dass die gute Sache stets Euerer Kaiserlichen Hoheit höchster Berücksichtigung sich erfreuen darf, waget er demnach in tiefester Ehrfürcht, Höchstdemselben die allergehorsamste Bitte vorzutragen: ihn Behufes des Obangeführten, auf drei Jahre von den eigentlichen currenten Dienstgeschäften gnädigst entfernen zu geruhen — wobei jedoch im Falle eines plötzlich ausbrechenden Krieges die höchste Gnade er sich unterthänigst erbäte, auch dazu commandirt zu werden. Zur höchsten Würdigung fügt er folgende Bemerkungen bei:

1. *Bürgt* beiliegende kleine Druckschrift dafür, dass seine Bemühungen auch bei *ganz ausserordentlichen,* und bisher *allgemein für unüberwindbar gehaltenen Schwierigkeiten nicht immer fruchtlos bleiben.* Wie Herr Hofrath Ritter von *Gauss* — allbekanntlich Einer der Kolossalsten Geister *aller Zeiten,* der *grösste jetzt lebende* Mathematiker, zugleich aber auch ein eben so strenger als einsichtsvoller, und mit Belobungen äusserst sparsamer Recensent — sich über dieselbe Schrift äussert, möge hochgnädigst aus beiliegendem Auszuge seines an den Vater des unterthänigst Gefertigten gerichteten Schreibens entnommen werden. —

Euerer Kaiserlichen Hoheit allgerühmten und verehrten tiefschnell eindringenden Einsicht wird zwar der *eigentliche wahre* Eindruck, den erwähntes Werkchen auf diesen grossen Mann machte, auch ohne weitere Bemerkungen darüber, *seinem Grundwesen nach,* nicht entgehen. Jedoch glaubt der ehrfurchtsvoll Gefertigte — ohne die den *ganz vorzüglichst ausgezeichneten, glänzenden Verdiensten* dieses genialen Geistes gebührende hohe Achtung verletzen zu wollen —

der grösste jetzt lebende Mathematiker, zugleich aber auch ein eben so strenger als einsichtsvoller und mit Belobungen äusserst sparsamer Rezensent – sich über dieselbe Schrift äussert, möge hochgnädigst aus beiliegendem Auszuge seines an den Vater des untertänigst Gefertigten gerichteten Schreibens entnommen werden."

„Euerer K. H. allgerühmten und -verehrten, tiefschnell eindringendem Blicke würde zwar der wahre Eindruck, den erwähntes Werkchen auf diesen grossen Mann machte, auch ohne weitere Bemerkungen darüber nicht entgehen. Jedoch glaubt der ehrfurchtsvoll Gefertigte — ohne die den ganz vorzüglichst ausgezeichneten, glänzenden Verdiensten dieses genialen Geistes gebührende hohe Achtung verletzen zu wollen — jenem Aufsatze sowohl als sich selbst schuldig zu sein, von den zahlreichen Bemerkungen, die sich auf erwähnten Brief machen [liessen], wenigstens Folgende nicht zu unterdrücken. GAUSS äussert nämlich (mit anderen Worten): nur wenige Menschen besitzen einen Sinn zur Auffassung des Wesens des darin behandelten Gegenstandes, und es können nur jene ein höheres Interesse dafür haben, die sowohl hinsichtlich dessen, worum es sich dabei handelt, und somit über die äusserste Wichtigkeit der Sache, im Klaren sind, als die mit Lösung dieses gordischen Knotens verbundenen Hindernisse an gescheiterten eigenen Versuchen lebhaft gefühlt haben. Und dies alles ist nur allzuwahr, jedoch dem diesfälligen Gegenstande keineswegs ausschliesslich eigen: es erstreckt sich mehr oder weniger wieder auf alles Feinere, Edlere, Höhere."

„Und offenbar kann, ohne sich

jenem Aufsatze sowohl, als sich selbst, schuldig zu sein, erwähntem Briefe einige Bemerkungen beizufügen, und einige Umstände auszuführen, wonach Schrift und Brief richtiger werden beurtheilt werden können. Gauss äussert nämlich (mit anderen Worten) *nur wenige Menschen besitzen einen Sinn zur Auffassung des Wesens, des darin behandelten Gegenstandes, und es körnen nur Jene ein höheres Interesse dafün haben, die sowohl hinsichtlich dessen, worum es sich dabei handelt, und somit über die äusserste Wichtigkeit der Sache, im Klaren sind, als die mit Lösung dieses gordischen Knotens verbundenen Hindernisse — an gescheiterten eigenen Versuchen — lebhaft gefühlt haben.* Und dies Alles ist nur allzuwahr; ist jedoch dem diesfälligen Gegenstande keinesweges ausschliesslich eigenes erstreckt sich mehr oder weniger leider auf alles *Feinere, Edlere, Höhere.* Und offenbar kann es, *ohne sich sehr bloss zu geben,* und dem Charakter nach als *schwach* anzukünden, ein als ein Grund angeführt werden, seine eigenen *bewährten Arbeiten* über derlei sonst noch dunkle Gegenstände zu unterdrücken. Worum anders handelt es sich denn sonst in Wissenschaften, als beständig ebendarum, *unklare Dinge aufzuklären, Fehlende herzuschaffen?* — In der That würde es schlimm aussehen mit den Fortschritten der Menschheit in der Bildung, wenn jeder Einzelne seine Entdeckungen für sich behielte. Wäre Gauss hiervon nicht ebenso überzeugt, und durchdrungen, als Gefertigter, und bei Beantwortung voriger Frage zweifelhafter; so hätte er aus ähnlichem Grunde wohl noch Mehrere seiner sonstigen vortrefflichen Arbeiten untergraben müssen. Äusserte er doch selbst von Einem seiner Werke (Disquisitiones Arithmeticae), dass selbes damals nur sechs Mathematiker in ganz Europa verstanden hätten.

ganz blosszugeben, und dem Charakter nach als *schwach* anzukünden, [das Vorhergehende] nie als ein Grund angeführt werden, seine eigenen bewährten Arbeiten über derlei sonst noch dunkle Gegenstände zu unterdrücken."

„Worum anders handelt sich es denn sonst in Wissenschaften, als beständig eben darum, unklare Dinge aufzuklären, fehlende her[bei]zuschaffen? — Wäre GAUSS hiervon nicht ebenso überzeugt und durchdrungen, als Gefertigter, und bei Beantwortung dieser Frage zweifelhafter, so hätte er aus ähnlichem Grunde wohl noch mehrere seiner sonstigen vortrefflichen Arbeiten untergraben müssen. Äusserte er doch selbst von einem seiner Werke (Disquisitiones arithmeticae), dass selbes damals nur 6 Mathematiker in ganz Europa verstanden hätten."

Auch ist *der* Umstand nicht wenig auffallend, und hinsichtlich der Wahrheit der Behauptung, auf die Resultate der Schrift schon *selbst*, in Folge *eigener* Nachforschungen gekommen zu sein, den gegründetsten Verdacht erregend, dass indem der Vater des Gefertigten — nach einem bereits seit 30 Jahren, und zwar durch Gauss, unterbrochenen Briefwechsel — das Büchlein nebst einem Briefe, *worin der Inhalt und das Wesen der Sache in Kürze deutlich angezeigt war*, Herrn v. Gauss schon vor einem *ganzen Jahre* zustellte, Ersteres jedoch durch die Cholera aufgehalte wurde, so dass Gauss *bloss den Brief erhielt*, er damals mit keiner Sylbe irgend eine ähnliche Erklärung machte, bis er endlich — wie er Eingangs in seinem Briefe selbst sagt — *die Schrift selbst* erhielt. Wäre er mit diesen Untersuchungen und Ergebnissen so vertraut gewesen, als er angibt; so wäre doch offenbar gleich nach Erhalt des *ersten* Briefes der schikliche Zeitpunkt gewesen, zu erklären, dass er, noch den im erhaltenen Briefe enthaltenen Andeutungen und ankündigung in derselben Schrift nichts Neues *für sich* erwarte; und dieses hätte Gauss bei einer — wie es seine langwierigen Bemühungen schon hinlänglich beweisen — auch von ihm für so wichtig gehaltenen Sache, und seinem mit seinen riesenhaften Verdiensten ganz gleichen Schritt haltenden Ehrgeitze auch ganz gewiss nicht unterlassen, wenn er sich anders der Sache nur mächtig gefühlt hätte. Dies hat jedoch Gauss nichts weniger als gethan; vielmehr wartete er in tiefester Stille die Ankunft der Schrift selbst ab, welche gegen Ende des Jänners dieses Jahres Statt fand; Diese Zeit mit dem Datum seines Briefes verglichen, gibt zu erkennen, dass bis zur Beantwortung selbst abermals sechs Wochen vergingen, wodurch er wenigstens nicht bewiesen hat, dass ihm selbst die *fertige Arbeit durchzudringen gar keine* Mühe gekostet habe.

Genug gross scheint des grossen Gauss Verwunderung, Betroffenheit und Würdigung allerdings zu sein, da er bei all seiner Zurückhaltung im Loben — bei dieser wie bei jeder Gelegenheit — von seiner Überraschung sich gar nicht erholen zu können scheint. Was aber noch weit mehr und vorzüglich zum Vortheile der Arbeit spricht, ist eben *der* Umstand, dass ein so glänzendes Talent, und sonst sehr consequenter Kopf dadurch verleitet wird, durch Vorbringung *absolut nichtiger* und *widersinniger* Gründe und Ansichten hinsichtlich der vorgeblichen Geheimhaltung seiner eigenen Entdekungen, Einen zu überführen, dass er in der Schrift nur sich selbst wieder gefunden habe. Dass ein mit so vielen und so bedeutenden brillanten Leistungen geschmückter Genius so sehr eifert, und sich ambitionirt, da er num einmal der *Erste* hierin nicht sein kann, wenigstens ein *gleichzeitiger Löser des Problems* zu erscheinen, gibt auch einen genug kräftigen Beweis ab einer Seits von der hohen Wichtigkeit und Werth der Sache, anderer Seits von dem lebhaften Interesse, welchen ein so hellsehender Kopf für denselben Gegenstand hegt, besonders wenn man sich an die 30—35 Jahre erinnert, während welchen er doch von Zeit zu Zeit nach seinem Ziele strebte. Im Berücksichtigung aller dieser Umstände dürfte denn der Brief von Gauss, eben wegen des offenbar gezwungen ertheilten und doch gross genug ausgefallenen Lobes, als mehr sagend angesehen werden, als jede erdenkliche in Worten gefasste Lobrede.

„Da also GAUSS, den löblich scheinenden Grund, d a s s e r s o n s t s i c h

Da also Gauss, den löblich scheinenden Grund, *dass er sonst sich selbst*

selbst mitloben müsste, vorschützend, ein offenes Urteil über den reellen Wert der Sache zu fällen, auszuweichen bemühet ist ohne dass er übrigens etwas auszustellen fände, so sieht sich der untertänigst Gefertigte verplichtet, jenes Produkt, so wie jedes Andere, selbst für das auszugeben, was es ist, und über die Tendez und den Wert desselben, mit höchstgnädiger Erlaubnis, freimütig seine Meinung auszusprechen — und findet dieses nun hier um so nötiger, als er teils der möglichsten Kürze wegen, teils aus — wie er nun deutlich sieht — übertriebener, und, insofern dadurch die Ausbreitung der selbst guten Sache gehindert wird, auch schädlicher Bescheidenheit, selbst kein Vorwort dazu schrieb, gleich bemühet, die Sache selbst geradezu darzustellen, als fühlend, dass sich nicht wohl eine treffende Bemerkung darüber machen lasse, ohne schon ein nicht kleines eigenes Lob zu enthalten, und überzeugt, dass vor des Kenners Blick die einfache prunklose Darstellung selbst den besten Eingang finde und ihre Wirkung ohnedies nicht verfehle. Dabei lässt er jedoch allen Akademien, Universitäten, gelehrten Gesellschaften und überhaupt den geeigneten Richtern sehr gern das eigene Urteil."

„Des Verfassers Schuld könnte es offenbar nie sein, wenn allen Falles irgend ein Urteil bloss deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil betreffender Rezensent nicht gehörig Meister der Sache geworden ist."

„Es ist denn in derselben Schrift ein Gegenstand, woran seit der bekannten Kultivierung der Geometrie durch die Griechen — welche ihren ganz eigenen Scharfsinn auch in dieser Wissenschaft so rühmlich bewiesen haben — also seit 2100 Jahren die rastlosesten Bemühungen der ausgezeichnetsten und

mitloben müsste, vorschützend, ein offenes Urtheil über den reellen Werth der Sache zu fällen, auszuweichen bemühet ist, ohne dass er übrigens etwas Wesentliches auszustellen fände; so sieht sich der unterthänigst Gefertigte verpflichtet, jenes Product, so wie jedes Andere, *selbst* für das auszugeben, was es ist, und über die Tendenz und den Werth desselben, mit höchstgnädiger Erlaubniss, freimüthig seine Meinung auszusprechen — und findet dieses nun hier um so nöthiger, als er Theils *der möglichsten Kürze wegen*, Theils aus — wie er nun deutlich sieht — übertriebener, und in so fern dadurch die Ausbreitung der bewährt guten Sache gehindert wird, auch schädlicher Bescheidenheit, nicht einmal ein Vorwort dazu schrieb, gleich bemühet, die Sache selbst geradezu darzustellen, als fühlend, dass sich nicht wohl eine treffende Bemerkung darüber machen lasse, ohne schon ein nicht kleines eigenes Lob zu enthalten, und überzeugt, dass vor des Kenners Blick die einfache pruncklose Darstellung selbst den besten Eingang finde, und ihre Wirkung ohnedies nicht verfehle. — Dabei lässt er jedoch allen Akademien, Universitäten, gelehrten Gesellschaften, und überhaupt jedem *geeigneten* Richter sehr gern das eigene Urtheil. Des Verfassers Schuld könnte es jedoch offenbar nie sein, *wenn allen Falles irgend ein Urtheil bloss deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil betreffender Recensent nicht gehörig Meister der Sache geworden ist, oder sich dabei auf keine Weise zu helfen vermöchte.* Es ist denn, in derselben Schrift, ein Gegenstand, woran, seit der bekannten Cultivirung der Geometrie durch die Griechen — welche ihren ganz eigenen Scharfsinn auch in dieser Wissenschaft so rümlich bewiesen haben — also seit etwa 2100 Jahren, die rastlosesten Bemühungen aller aus-scharfsinnigsten Köpfe wie man mit vollem Rechte sagen kann, gänzlich scheiterten, — auf das vollkommenste ergründet, durchdrungen und ins Klare gebracht, obwohl selbe absichtlich bloss die Quintessenz des Wesens der Sache enthält und bei dieser Gelegenheit dasselbe nur in gedrängtester Kürze darbietet, wo freilich nur des Kenners Auge durchdringt."

„Es ist wohl die wesentlichste, wichtigste, interessanteste und auch genug verwickelte Aufgabe der Raumlehre und eigentlich eine aus dem Grunde und durchaus neue bisher von allen Geometern nicht einmal dem Begriffe nach geahnte Wissenschaft."

„Ihren Inhalt deutet kürzlich der Titel selbst an. Bisher ging man stets darauf aus, EUKLIDS XI. Axiom zu rechtfertigten; aus benannter Schrift wird die absolute Unmöglichkeit, je zu einer diesfälligen Erkenntnis zu gelangen, bewiesen, und dafür eine ganz andere, derselben gar nicht bedürfende und zugleich für alle Fälle vollkommen zureichende Raumlehre aufgestellt. Ohne diese stürzt die ganze bekannte Geometrie zusammen, oder selbe ist doch auf eine lediglich prekäre Hypothese gegründet."

„Was hinsichtlich des XI. Axioms geleistet war, enthält unter anderen das eigens dazu geschriebene Buch: Critik der Parallelentheorie von Joh. Jos. Ign. HOFFMANN, Jena 1807. — Dieses Werk, obgleich an sich noch sehr schwach — und dabei selbst die Kritik oft fehlerhaft, und wieder einer Kritik bedürfend — dient doch als einige Vorbereitung für denjenigen, der die mehrerwähnte Schrift durchzugehen gesonnen, mit dem Wesen der Sache aber allenfalls noch nicht vertraut ist, was allerdings manchmal

gezeichnetsten und scharfsinnigsten Geometer — wie man mit *vollem* Rechte sagen kann — gänzlich scheiterten, *auf das Vollkommenste ergründet, durchdrungen, und ins Klare gebracht*, obwohl selbe absichtlich blos die *Quintessenz* des Wesens der Sache enthält, und bei dieser Gelegenheit aus verschiedenen Gründen, namentlich auch zur Ersparniss der Auslagen, dasselbe nur in *gedrängtester Kürze* darbietet, wo freilich nur des Kenners Auge durchdringt. Es ist wohl die wesentlichste, wichtigste, interessanteste, und auch genug verwinkelte Aufgabe der Raumlehre, und eigentlich *eine aus dem Grunde, auf durchaus neue, bisher von allem Geometern nicht einmahl dem Begriffe nach geahnete Wissenschaft.* Ihren Inhalt deutet kürzlich der Titel selbst an. — Bisher ging man stets darauf aus, Euklid's XI. Axiom zu *rechtfertigen*: aus benannter Schrift wird die *absolute Unmöglichkeit* je zu einer diesfälligen Erkenntniss zu gelangen, mit geometrischer Schärfe bewiesen, und dafür eine *ganz andere, derselben gar nicht bedürfende*, und dennoch *für alle Fälle vollkommen zureichende Raumlehre aufgestellt.* Ohne diese stürzt die ganze bekannte Geometrie zusammen, oder selbe ist doch auf eine lediglich precäre Hypothese gegründet. — Was hinsichtlich des XI. Axiomes geleistet war, enthält unter Anderen das eigens darüber geschriebene Buch: *Critik der Parallel-Theorie von Joh. Jos. Ign. Hoffmann. Jena 1807.* Dieses Werk, obgleich an sich noch sehr schwach, — und dabei selbst die Critik oft fehlerhaft, und wieder einer Critik bedürfend — *dient doch als einige Vorbereitung für denjenigen, der die mehrerwähnte Schrift durchzugehen gesonnen, mit dem Wesen ler Sache aber allen Falles noch nicht vertraut ist, wie es meistens, und allerdings oft auch bei ausgezeichneteren* auch bei ausgezeichneten Mathematikern der Fall ist, die sich jedoch dann niemals zur Klasse der Geometer vom ersten Range bekennen dürfen. Sehr zuträglich wäre auch eine Bekanntschaft des Lesers mit EUKLID, dem bis itzt unübertroffenen oder richtiger unerreichten Muster eines recht geometrischen und systematischen Vortrages — Übrigens muss der Leser in dem ganzen Gebiete der reinen Mathematik bewandert sein. — Der berühmte KÄSTNER zerbrach [sich] neun Jahre hindurch den Kopf darüber und war in der Tat noch nicht bei dem § 1 mehrerwähnter Schrift, so wie das Resultat des ganzen vorzitierten und zur vorläufigen Lesung und Orientierung als unerlässlich empfohlenen Werkes nicht so weit reicht. Der einzige GAUSS scheint einige wenige leichtere Schritte gegen das Ziel, welches selbst zu sehen er aber noch viel zu weit entfernt war, getan zu haben. Nicht konnte [er] jedoch, ungeachtet aller Anstrengung, vordringen; dieses kann der Verfasser aus mehreren Daten, welche teils der jetzige, teils frühere Briefe von GAUSS, dann eine Menge Briefe vom Vater [an den Verfasser] enthalten, ausser Zweifel setzen. Der Verfasser überwand sämtliche Hauptschwierigkeiten dabei bereits in der zweiten Hälfte des Jahres 1823; nachdem schon früher, als er noch Zögling der k. k. Ingenieurs-Akademie zu sein das Glück hatte, ein so lebhaftes Interesse in ihm erwachte, überhaupt für alles echte Wissen, und insbesondere für einen selbst geschichtlich schon — abgesehen von innerer Wichtigkeit und Vortrefflichkeit — so äusserst merkwürdigen Gegenstand, dass er, nachdem einige leichtere Versuche noch weit weg vom Ziele blieben, nicht die Mühe eines kräftigen Angriffes scheute, um diese grosse und so unbefriedigende

Mathematikern der Fall ist, die sich jedoch dann einmals zur Classe der Geometer vom ersten Range bekennen dürfen. Sehr zuträglich wäre auch eine Bekanntschaft des Lesers mit *Euklid* selbst, dem bis itzt unübertroffenen, oder richtiger *unerreichten* Muster eines ächt geometrischen und systematischen Vortrages und Geistes. — Übrigens muss der Leser in den ganzen Gebiete wenigstens der reinen Mathematik bewandert sein, will er anders ganz Herr der Sache werden, und sich nicht bloss damit begnügen, die einzelnen Sätze zu verstehen.

Der berühmte Kästner zerbrach neun Jahre hindurch den Kopf über einen Beweis des XI. Axioms, und war — wie es aus Hoffmanns obzitirtem Werke erhellet in der That noch nicht bei dem §. 1. beiligender Schrift, so wie das Resultat desselben ganzen — zur vorläufigen Lesung und Orientirung unerlässlich empfohlenen Werkes selbst, überhaupt nicht so weit reicht. Nebst dem *Vater* des unterthänigst Gefertigten scheint der einzige *Gauss* einige wenige leichtere Schritte gegen das Ziel zu — das sie aber wohl keineswegens deutlich vor sich sahen, gethan zu haben: Keiner konnte jedoch ungeachtet aller Anstrengungen *vordringen*: *dieses* kann der Verfasser aus mehreren Daten — welche Theils der jetzige, Theils frühere Briefe von Gauss, dann eine Menge Briefe vom Vater enthalten, wohl ausser Zweifel setzen. Der Verfasser überwand sämentliche *Hauptschwierigkeiten* dabei bereits in der zweiten Hälfte des Jahres 1823, nachdem schon früher, als er noch Zögling der k. k. Ingénieurs-Akademia zu sein das Glück hatte, ein so lebhaftes Interesse in ihm erwachte, überhaupt für alles ächte Wissen, und ins Besondere für einen, selbst geschichtlich schon abgesehen von *innerer* Wichtigkeit und Vortrefflichkeit — so

Lücke, wo es nur in seinen Kräften steht, doch auszufüllen. Und tief fühlt er, dass Ruhe und Glück nicht eher für ihn zu finden wären, als er sich aus diesen Labyrinthen herausgewunden haben wird."

„Mit gleichem Erfolge wurden noch sehr viele andere wichtige Gegenstände bearbeitet, und so zu sagen eine gänzliche Reformation der bisher (in Übereinstimmung mit dem Ausspruche der ersten Geister) sehr elend behandelten Mathematik vorgenommen. Von der Last aller dieser Früchte seines Nachdenkens sehnt sich nun der Verfasser durch eine vollkommene Ausarbeitung und öffentliche Bekanntmachung befreit zu werden."

Lemberg, am 3. May 1832.

Johann v. BOLYAI
Capit. im Génie-Corps.

äußerst merkwürdigen Gegenstand, dass er, nach dem einige leichtere Versuche noch weit weg vom Ziele blieben, nicht die Mühe eines kräftigeren Angriffes scheunte, um diese grosse, und so unbefriedigende Lücke, wo es nur in seinem Kräften steht, doch auszufüllen, Und tief fühlte er, dass Ruhe und Glück nicht eher für ihn zu finden wären, als er sich aus diesen Labirynthen herausgewunden haben wird. —

Mit gleichem Erfolge wurden seit dem noch sehr viele andere Gegenstande bearbeitet, und so zusagen eine gänzliche Reformation der bisher in Übereinstimmung mit dem Ausspruche der ersten Geister — sehr elend behandelten Mathematik vorgenommen. Von der Last aller dieser Früchte seiens Nachdenkens sehnt sich nun der Verfasser durch eine vollkommene Ausarbeitung und öffentliche Bekanntmachung befreiet zu werden.

Euerer Kaiserlichen Hoheit hat er hiermit die Ehre, ein Exemplar der bereits erschienenen Druckschrift zur höchstein Einsicht und höchsteigenen Beurtheilung unterthänigst zu unterlegen: das einzige Exemplar, was der Verfasser bis nun besass, war zu einer so hohen Bestimmung nicht geeignet, und deshalb musste er die Ankunft von einigen Exemplaren abwarten; sonst wäre er mit diesen unterthänigsten Bittgesuche schon lange vorgetreten.

2. Sind ja hoffentlich ohnedies die mathematischen Wissenschaften, wenn sie auch nicht eigens das rein Fortificatorische und Technische betreffen, dem Génie — und Fortifications-Wesen denn doch nicht so sehr fremd, dass es nach Höchstdero weisen Ermessen, und allumfassender Beurtheilung für unzweckmässig befunden werden dürfte, ein Individuum um darin etwas Vorzügliches zu leisten, auf einige Zeit von der Currenten Dienst-

leistung freizusprechen — besonders wenn das bei einer gnädigst vergönnten Musse hervorgebracht Werdende den weniger empfindlichem Abgang in einem so grossen Körper so überaus reichlich aufwiegt, als bei einziger Betrachtung des Gehaltes beiliegender Arbeit jeder unbefangene Kenner mit aller Zuversicht erwarten dürfte.

Zugleich waget der in tiefster Unterthänigkeit Gefertigte die tiefgehorsamste Bitte: Euere Kaiserliche Hoheit geruhen dem Verfasser der beiliegenden Druck — Schrift — wovon zur allenfallsigen leichteren Verständniss *das Wesentlichste* auch in deutscher Sprache beiliegt-gnädigst erlauben, derselben seinen Namen und Charakter vorsetzen zu dürfen, da dieser schon mit hochgnädigster Rücksicht auf das Obangeführte, seinem Charakter, und somit dem Ruhme des k. k. löblichen Ingéniurs-Corps *nicht nachtheilig sein wird.*

Olmütz am 8-ten August 1832.

Johann v. Bolyai
Kapitän Lieutenant im k. k.
Ingénieurs-Corps.

III. MELLÉKLET

Gustav Adolf GREISINGER
Hauptman im k. k. Ingen. Corps
Profesor der höheren Mathematik
an der k. k. Ingenieurs-Akademie
szakvéleménye
„über das von dem Ingenieur Hauptmann
v. Bolyai in lateinischer
Sprache herausgegebene Werkchen,
Raumlehre betittelt ...”

Euer Kaiserliche Hoheit!

Auf höchsten Befehl Euers Kaiserlichen Hoheit wurde dem Unterthänigstgefertigten, durch Herrn Ingenieur Major v. Koerber der Auftrag ertheilt, über das von dem Ingenieur Hauptmann v. Bolyay in lateinischer Sprache herausgegebene Werkchen, Raumlehre betittelt, welchem eine jedoch nur unvollständige deutsche Übersetzung, und ein Auszug aus einem Briefe des berühmten Mathematikers Gauss beigelegt ist, umfassend zu berichten.

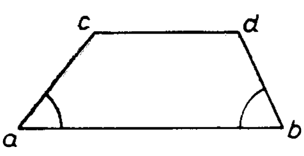
Ein später durch den erwähnten Herrn Major dem Unterthänigstgefertigten zugekommener höchster Befehl gebietet jedoch die Vollziehung des erhaltenen Auftrages möglichtst zu beschleunigen.

Wegen Unkenntniss der lateinischen Sprache, merklicher Unvollständigkeit der beigefügten deutschen Übersetzung, und dem Umstande, dass der fragliche Aufsatz sich um delicate, methaphisisische Unterscheidungen dreht, die den Verfasser seit Jahren ausschliessend beschäftigen, findet sich der Unterthänigstgefertigte für itzt zu nachfolgender allgemeiner Beurtheilung desselben veranlasst, und wagt zugleich die unterthänigste Bitte, die hier . . . folgenden Stücke, seiner Zeit, zu einer paragraphweisen scharfen Beurtheilung, wieder zu erhalten.

Der ganze Aufsatz hat zum Zweck, die Geometrie und vorzüglich die ebene und sphärische Trigonometrie, als Grundlage der, heut zu Tage sich immer mehr verbreitenden, analytischen Geometrie von dem 11ten Axiome Euclids, unabhängig zu machen.

Dieses Axiom lautet:

Wenn zwey Gerade *ac* und *bd* ; von einer dritten *ab*, dergestalt geschnitten werden, dass die inneren auf einer Seite befindlichen Winkel *cab* und *dba* zusammen weniger als zwey rechte ausmachen, so schneiden sich gedachte Linien *ac* und *bd*, wenn sie auf solcher Seite gehörig verlängert werden.



Es ist nicht zu läugnen, dass dieses Axiom, unter den übrigen Axiomen Euclids ganz fremdartig erscheint, und für ein solches zu viel in sich enthält, mit andren Worten, dass es keines ist, sondern eines Beweises bedarf.

Unzählige Mathematiker haben über diesen Gegenstand geschrieben, und manche, unter anderen der scharfsinnige Legendre, selbst den Zweifel geäussert, ob dieser Lehrsatz, (denn ein solcher ist er wohl) nicht in späteren Zeiten durch Irrthum unter die Axiome aufgenommen wurde, während Euclid selbst ihn vielleicht erwiesen hätte, der Beweis aber verloren ging.

Wie denn auch sey, an der Richtigkeit derselben zweifelt hoffentlich niemand, der nicht an seinen eignen Daseyn, und mithin an den Befugniss zu zweifeln, zweifelt.

In allen bestehenden Coursen ist dieses Axiom auf die eine oder die andere Art umgangen worden, der Unterthänigstgefertigte kann jedoch selbst nicht läugnen, dass in den meisten ihm bekannten Coursen, und namentlich in dem der k. k. Ingenieur-Accademie, die nach Euclid, von jenem Axiome abhängige Theorie der Parallellinien mehr oder minder einem logischen Zirkel gleicht; ja dass selbst in den schärfsten unter ihnen, immer einiges der Anschauung überlassen bleibt. Der Verfasser des fraglichen Aufsatzes sucht, wie bereits erwähnt worden, die ebene und sphärische Trigonometrie, von dem angeführten Axiome unabhängig zu machen; mit der ersteren gelingt ihm dies, seiner Aufsatze nach, nur zum Theil, mit der letzten vollkommen. Zum Schluss zieht derselbe Folgerungen aus der Hypothese, dass jenes Axiom falsch sei, und es gelingt ihm dann unter andern, den Kreis geometrisch zu quadriren, das ist, eine ihm dem Flächeninhalt nach gleiche geradlinigte Figur zu verzeichnen.

Dieser letztere Theil der Abhandlung hat keinen reellen Werth; der Unterthänigstgefertigte hegt nehmlich die Überzeugung, dass der Verfasser selbst, wohl die Unerwiesenheit mit der letzten Schärfe, aber gewiss nicht die Unrichtigkeit jenes Axioms zu behaupten im Stande ist.

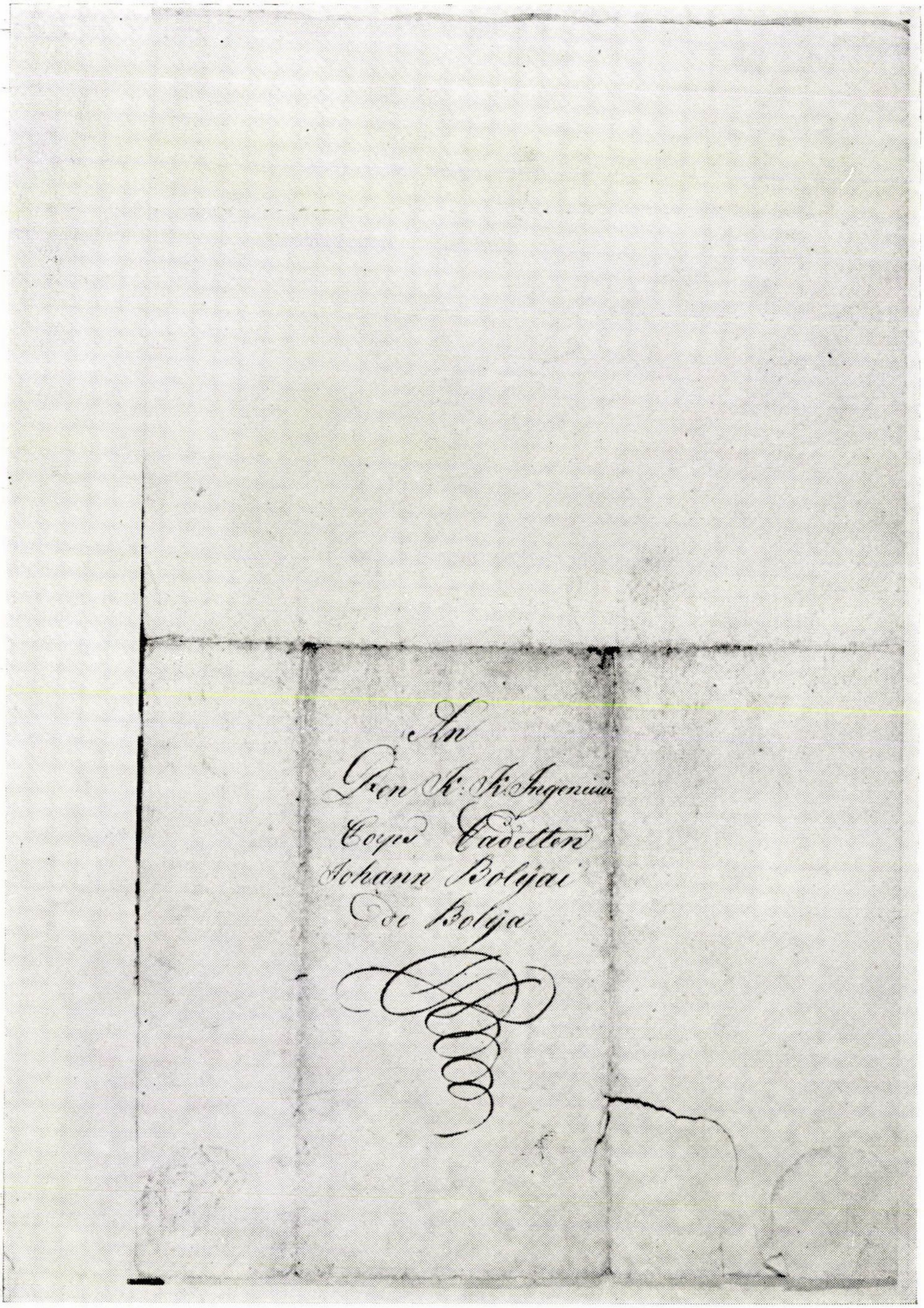
Der Werth oder Unwerth des Zweckes der ganzen Abhandlung beruht endlich auf einem Beweise, den der Verfasser zu besitzen behauptet, hier aber nicht giebt, nehmlich dem der Unmöglichkeit, ja a priori zu entscheiden, ob das angeführte Axiom, wahr oder falsch sei. Denn ist diese Unmöglichkeit nicht vorhanden, so dürfte es wohl zweckmässiger seyn, dasselbe an seiner gehörigen Stelle, mit der von dem Verfasser verlangte Schärfe zu verweisen, als alles darauf gebaute, geradezu . . . , wenn man sich schon mit seinem Gewissen durchaus nicht ganz abfinden kann, so dass man geometrische Beweise, wie die eines Legendre aus dem Grunde für ungenügend ansieht, weil darin etwas weniger der Anschauung überlassen bleibt.

Auf keinen Fall, kann der Unterthänigstgefertigte dem ganzen Aufsatze, und seinem Zwecke jene Wichtigkeit beilegen, die ihm von dem Verfasser im §33, beigelegt wird, welcher § ganz geeignet ist, demselben den Vorwurf mathematische Schwärmerei zuzuziehen; und er hegt die Überzeugung, dass das von dem weltberühmten Mathematiker Gauss, in dem beiliegenden Briefauszuge freylich nur sehr allgemein gefällte Urtheil, zum grossen Theile seiner alten Freundschaft mit dem Vater des Verfassers zuzuschreiben sein dürfte.

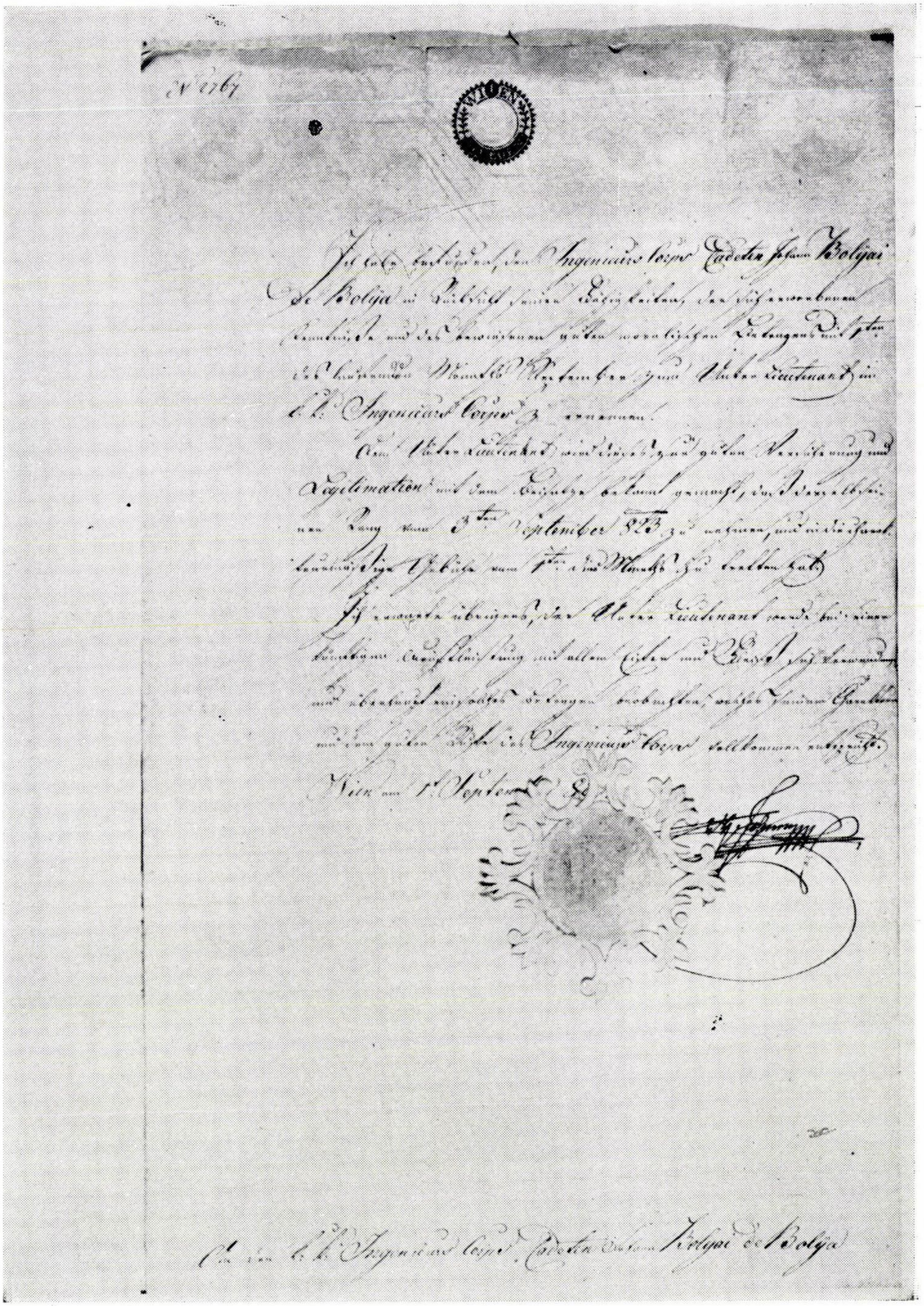
Schlüsslich kann der Unterthänigstgefertigte nicht umhin, dem Fleisse und dem Scharfsinn Gerechtigkeit minder lohnen zu lassen, mit dem der Verfasser nach einmahl angenommer Hypothese den ganzen Aufsatz aufgebaut hat, und es erübrigt ihm nur der Wunsch, dass derselbe sich einen fruchrbringendern Zweck wählen möchte.

Sigl Wien den 14 Septbre 1832
In tiefster Unterthänigkeit

Gustav Adolf Greisinger Hauptman im
k. k. Ingen: Corps Professor der höhern
Mathematik an der k. k. Ingenieurs —
Akademie



1. képmelléklet
Bolyai Jánost hadnagyi kinevezéséről értesítik


N 1767

Ich habe befunden den Ingenieurs Corps Cadeten Johann Bolyai de Bolya [illegible] Monats September zum Unter Lieutenant im k. k. Ingenieurs Corps zu ernennen.

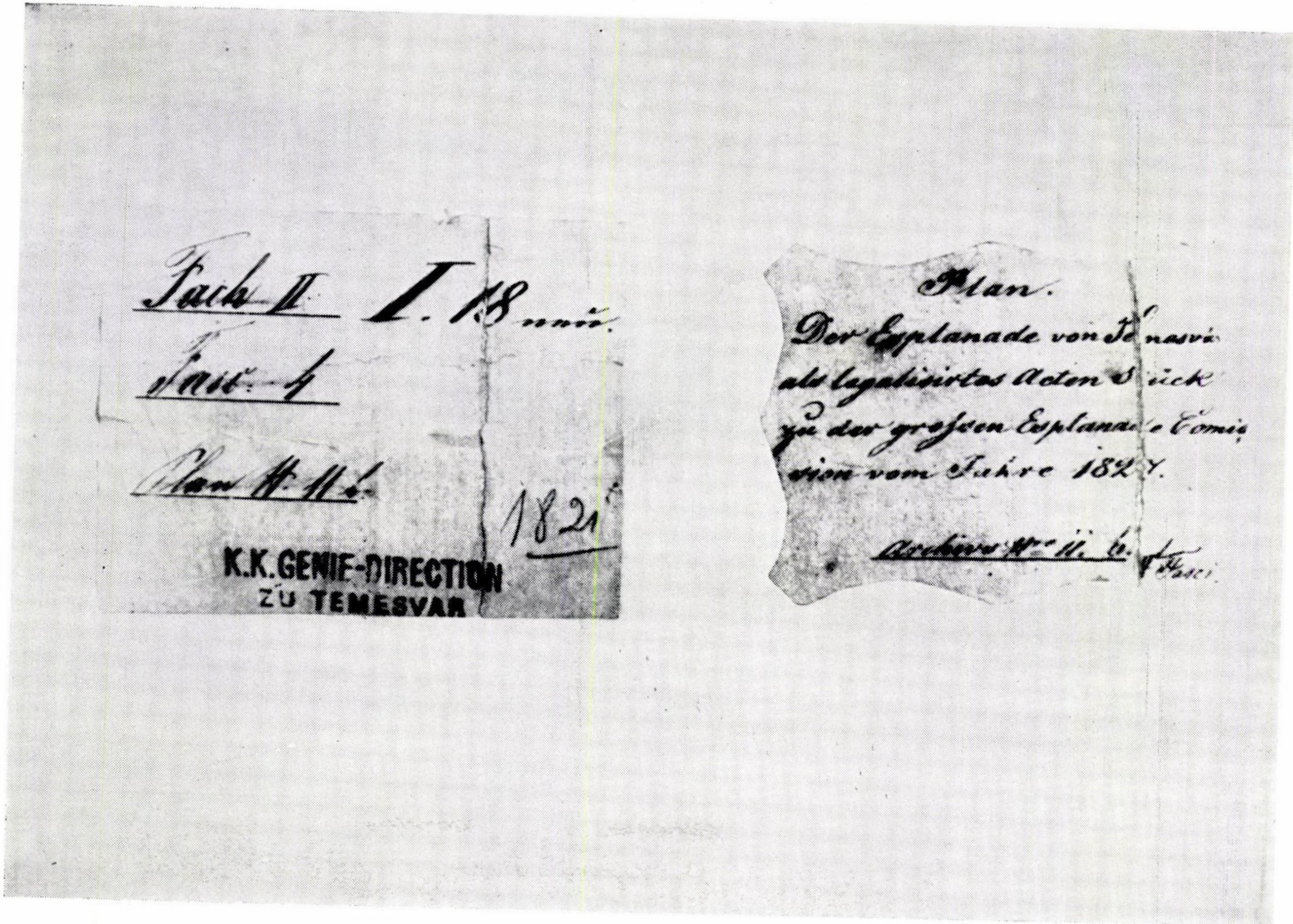
Dem Unter Lieutenant wird [illegible] Legitimation [illegible] vom 8ten September 823 [illegible] vom 1ten d. Monats zu [illegible]

Ich erwarte übrigens, daß Unter Lieutenant [illegible] mit allem Eifer und Fleiß [illegible] Ingenieurs Corps [illegible]

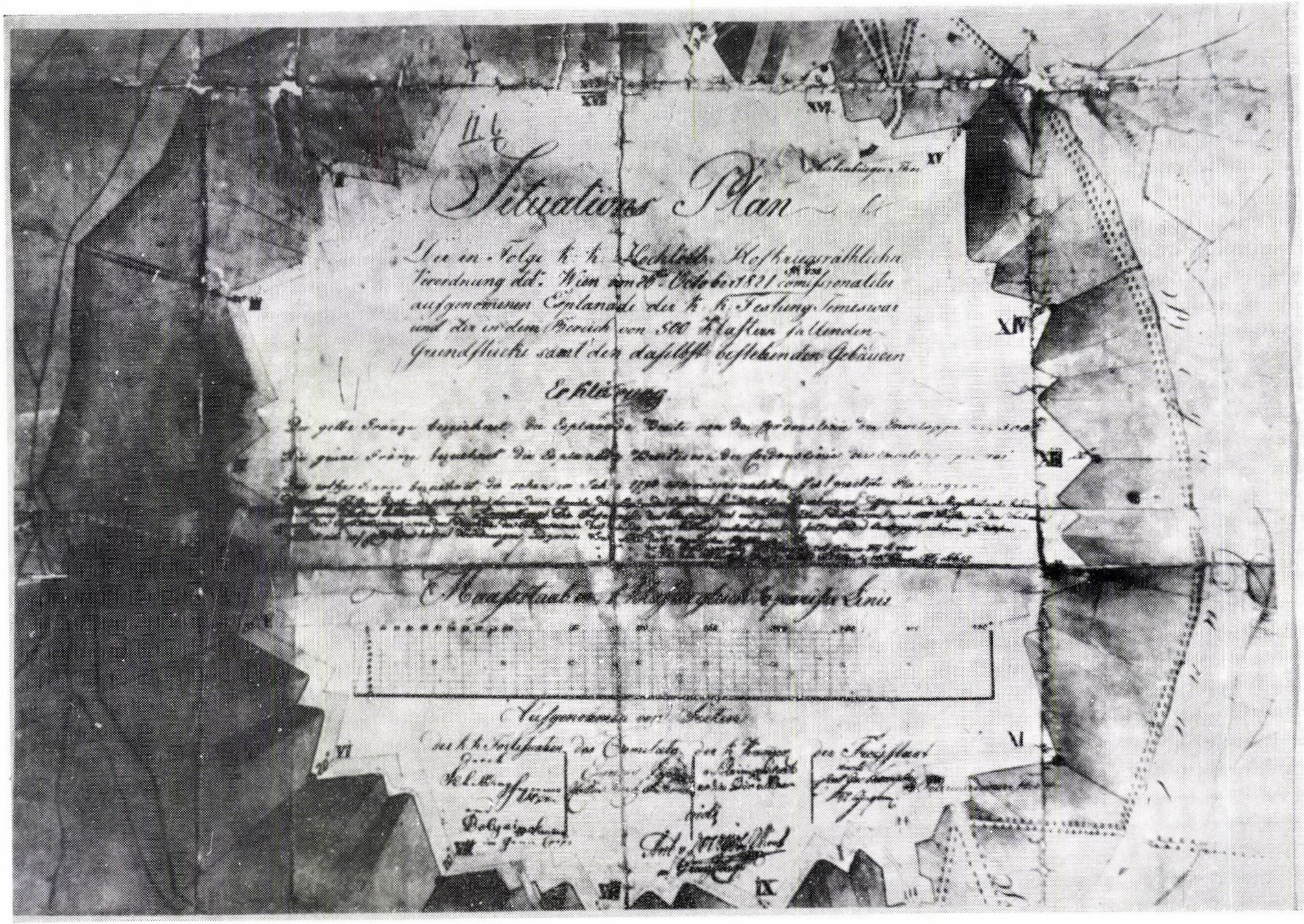
Wien am 1. Septem[illegible]

An den k. k. Ingenieurs Corps Cadeten Johann Bolyai de Bolya

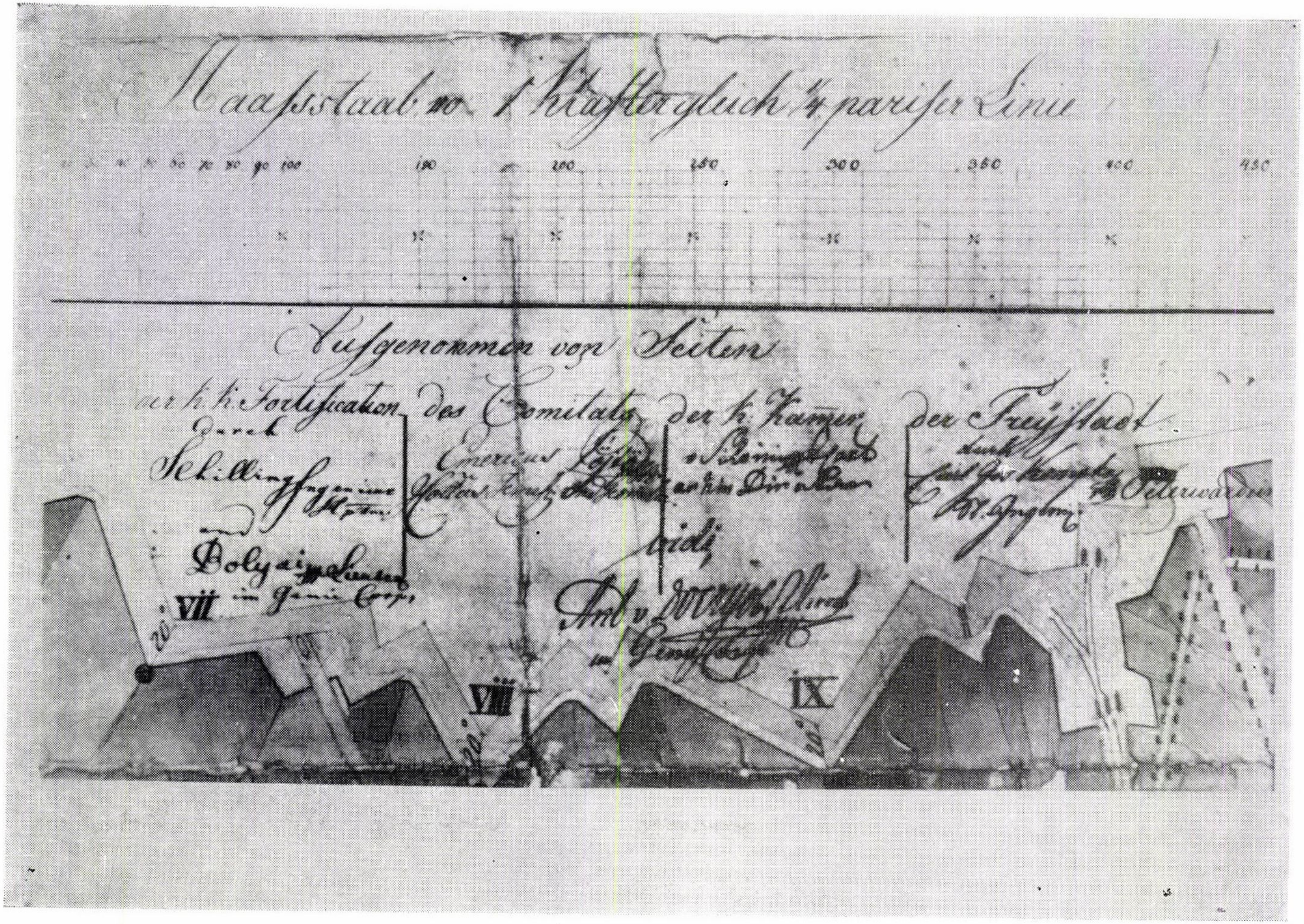
2. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS hadnagyi kinevezése



3. képmelléklet
A temesvári erődítményről készült „Situations Plan" egykori aktajelzete



4. képmelléklet
A temesvári erődítményről készült „Situations Plan" egy részlete



5. képmelléklet
A temesvári erődítményről készült „Situations Plan” egy részlete BOLYAI JÁNOS aláírásával

5

1826. akta. 16/193 5

1. Die Haupt-Genie-Amts-Kopier-Direkzion.-
2te St. Johann.

ad Wien am 15ten Dezember 1826

(51te Sitzung [der k.k. obersten Hofkriegsrates? Haupt-Genie-Amt?] am 20ten X-ber 826]) (eredeti jelzése) No 4214

(Magyarul lásd helyéről van itt)

Die ältesten Unterlieutenants sind dermalen nach der Rangordnung:

v. Mikša Alexander
Czermak Joseph
Bolyai de Bolya Johann
Adamich Primus
Kirchner Joseph.

Ebenso wenig verdient auch der Lieutenant Bolyai das Avancement, da er vor einigen Jahren von seiner Direktion dem Haupt-Genie-Amte als ein im Dienste sehr nachlässiger Offizier geschildert wurde, und auch jetzt noch keine Beweise seiner Besserung vorliegen.

Das Haupt-Genie-Amt erlaubt sich daher für die erwähnten drei Oberlieutenants-Stellen mit Übergehung der Lieutenants Mikša und Bolyai die Lieutenants Czermak, Adamich und Kirchner ehrerbietigst vorzuschlagen.

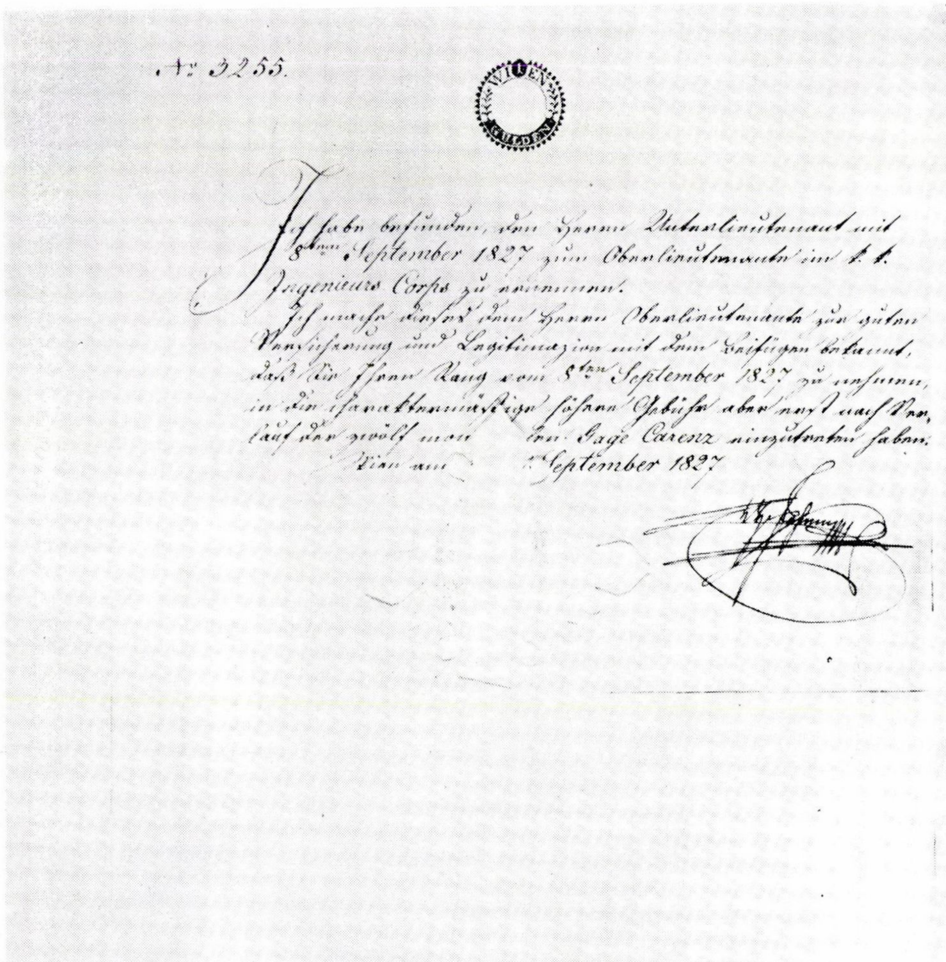
1827. (Jelenés főig.-hez javaslat) akta ca 16/142.

Wien am 7ten September 1827.

37te Sitzung am 12ten Sept 1827 No 3198.

Da der schon einige Male übergangene Ingenieurs-Unterlieutenant Johann Bolyai de Bolya nach der ehrerbietigst im 2ten Anschlusse mitfolgenden von der Fortif. Local Direkzion zu Arad in Folge hierortigen Auftrags erstatteten gewissenhaften Äußerung vom 31ten May 1827 seine Conduite sehr gebessert hat, so glaubt das Haupt-Genie-Amt Euer g. bitten zu dürfen, diesen Unterlieutenant nunmehr zum Oberlieutenant gnädigst vorrücken zu lassen.

6. képmelléklet
Részlet Szabó Péter feljegyzéséből


Nr. 3255.

Ich habe befunden, den Herrn Unterlieutenant mit 8ten September 1827 zum Oberlieutenant im k. k. Ingenieurs Corps zu ernennen.

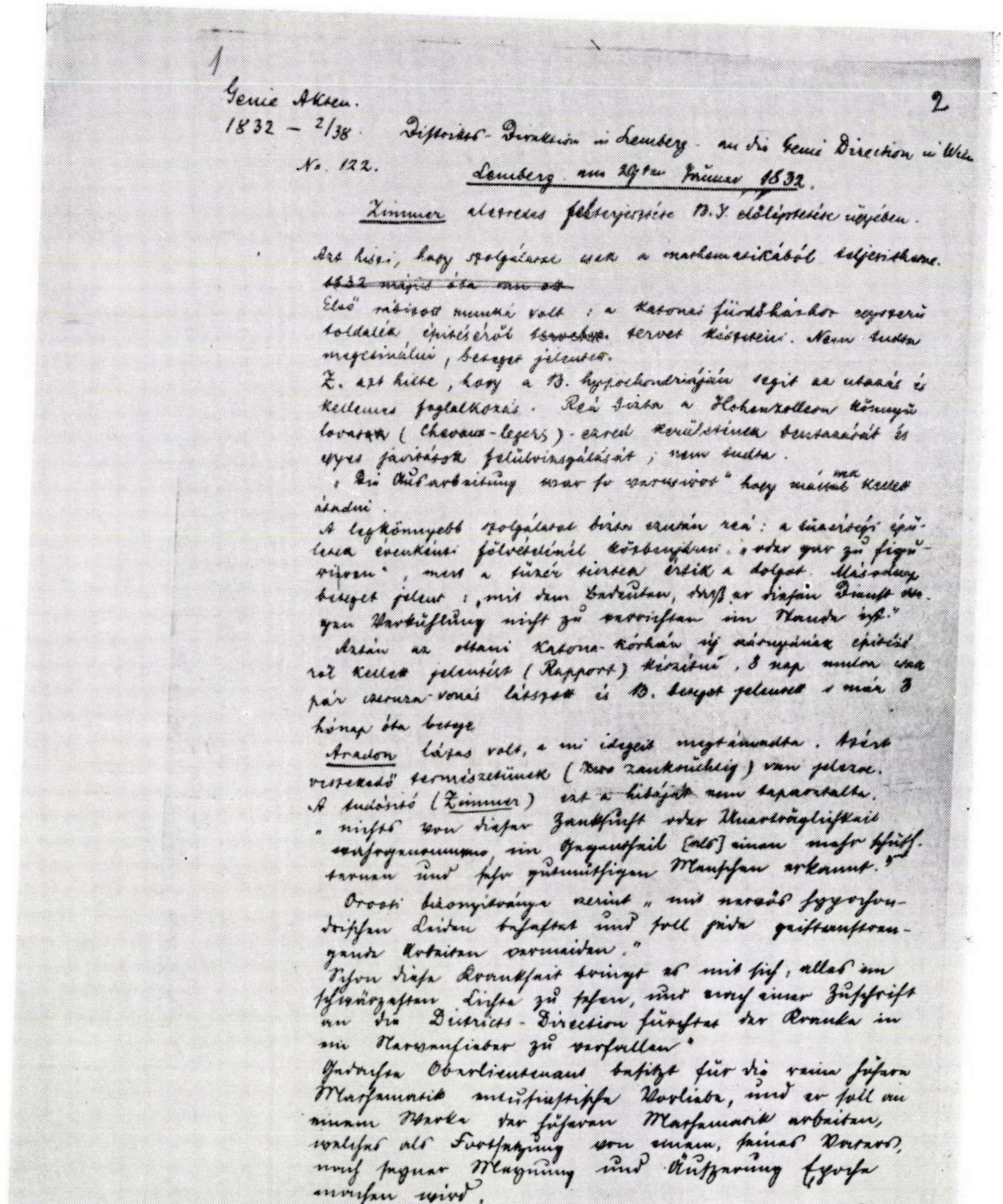
Ich mache hievon dem Herrn Oberlieutenant zur guten Verschreibung und Legitimazion mit dem Beifügen bekannt, daß Sie Ihren Rang vom 8ten September 1827 zu nehmen, in den [illegible] höheren Gebühr aber erst nach Verlauf der zwölf mon[illegible] der Gage Carenz einzutreten haben.

Wien am 7 September 1827

An den k. k. Herrn Ingenieur Unterlieutenant Johann Bolyai de Bolya

7. képmelléklet

BOLYAI JÁNOST főhadnaggyá léptetik elő



1

Genie Akten. 2

1832 – 2/38. Districts-Direction in Lemberg – an die Genie Direction in Wien

No. 122. Lemberg am 29ten Jänner 1832.

Zimmer alezredes feljegyzése B. J. előléptetése ügyében.

Azt hiszi, hogy szolgálatot csak a mathematikából teljesíthetne.
~~1832 május óta nem ..~~

Első mérnöki munka volt: a katonai fürdőházhoz egyszerű toldalék építéséről ~~[illegible]~~ tervet készíteni. Nem tudta megcsinálni, beteget jelentett.

Z. azt hitte, hogy a B. hypochondriáján segít az utazás és kellemes foglalkozás. Rá bízta a Hohenzollern könnyű lovasok (Chevaux-legers)-ezred kerületének bejárását és egyes javítások felülvizsgálását; nem tudta.
„Die Ausarbeitung war so verwirrt" hogy másnak kellett átadni.

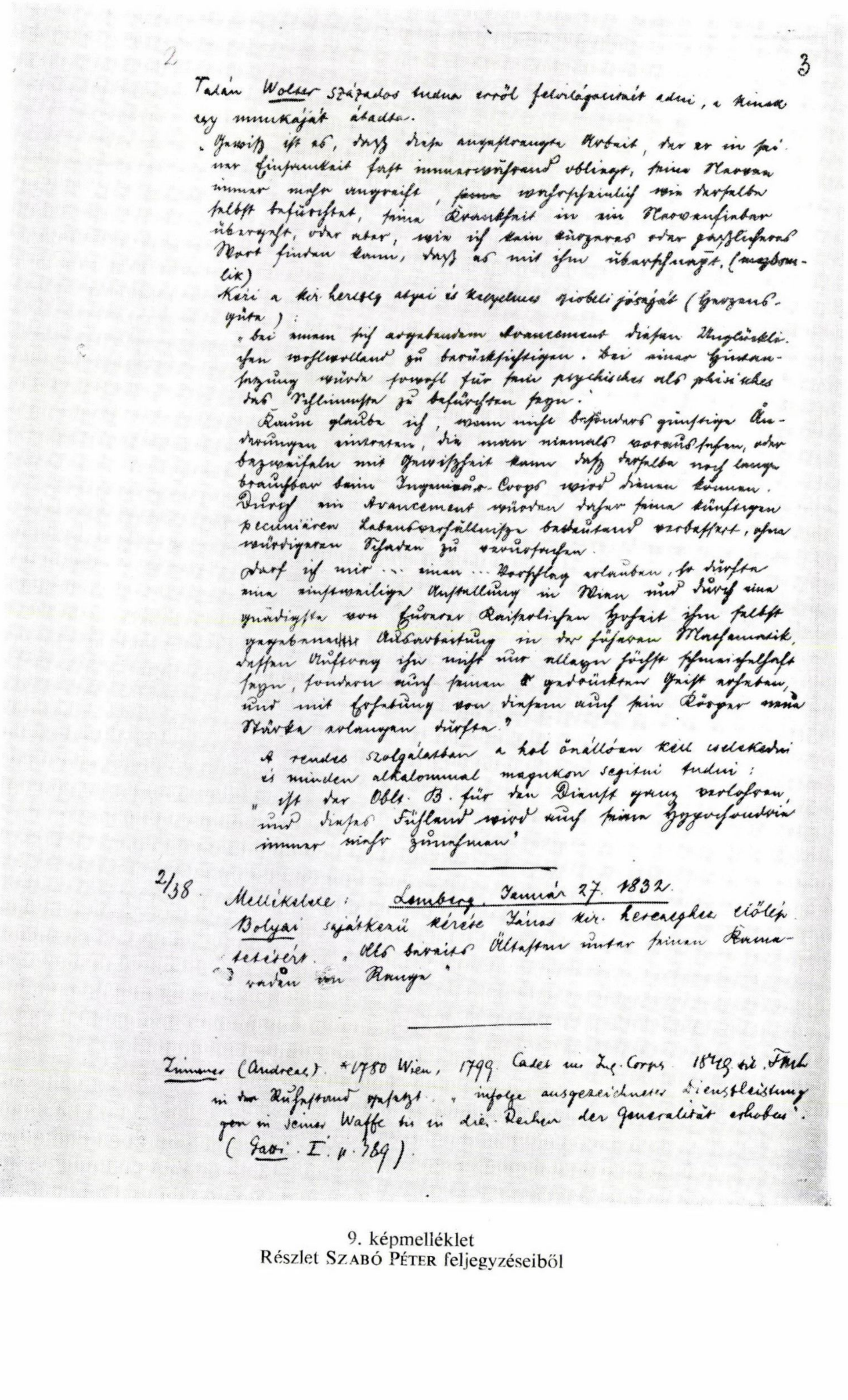
A legkönnyebb szolgálatot bízta ezután rá: a tüzérségi épületek évenkénti fölvételénél közbenjárni, „oder gar zu figuriren", mert a tüzér tiszt érti a dolgot. Második beteget jelent: „mit dem Bedeuten, daß er diesen Dienst wegen Verkühlung nicht zu verrichten im Stande ist."

Aztán az ottani katona-kórház új szárnyának építéséről kellett jelentést (Rapport) készítenie, 8 nap múlva csak pár ceruza-vonás látszott és B. beteget jelentett s már 3 hónap óta beteg.

Aradon lázas volt, a mi idegeit megtámadta. Azért veszekedő természetének (Zanksüchtig) van jelezve.
A tudósító (Zimmer) ezt a hibáját nem tapasztalta.
„nichts von dieser Zanksucht oder Unverträglichkeit wahrgenommen, im Gegentheil [als] einen sehr beschei-denen und sehr gutmüthigen Menschen erkannt."

Orvosi bizonyítványa szerint „mit nervös hypochondrischen Leiden behaftet und soll sich geistanstrengende Arbeiten vermeiden."
Schon diese Krankheit bringt es mit sich, alles im schwärzesten Lichte zu sehen, und nach einer Zuschrift an die Districts-Direction fürchtet der Kranke in ein Nervenfieber zu verfallen.
Gedachter Oberlieutenant besitzt für die reine höhere Mathematik enthusiastische Vorliebe, und er soll an einem Werke der höheren Mathematik arbeiten, welches als Fortsetzung von einem, seines Vaters, nach seiner Meinung und Äußerung Epoche machen wird.
Was Inhalt daran ist, hat hier Niemand beurtheilen können.

8. képmelléklet
Részlet Szabó Péter feljegyzéseiből


2 3

Talán Wolter százados tudna erről felvilágosítást adni, a kinek egy munkáját átadta.

„Gewiß ist es, daß diese angestrengte Arbeit, der er in seiner Einsamkeit fast immerwährend obliegt, seine Nerven immer mehr angreift, ~~seine~~ wahrscheinlich wie derselbe selbst befürchtet, seine Krankheit in ein Nervenfieber übergeht, oder aber, wie ich kein kürzeres oder gesetzlicheres Wort finden kann, daß es mit ihm überschnappt. (megbomlik)

Kéri a kir. herczeg atyai és kegyelmes szívbeli jóságát (Herzensgüte):

„bei einem sich ergebenden Avancement diesen Unglücklichen wohlwollend zu berücksichtigen. Bei einer Hintansetzung würde sowohl für sein psychisches als phisisches das Schlimmste zu befürchten seyn.

Kaum glaube ich, wenn nicht besonders günstige Änderungen eintreten, die man niemals voraussehen, oder bezweifeln mit Gewißheit kann daß derselbe noch lange brauchbar beim Ingenieur-Corps wird dienen können. Durch ein Avancement würden daher seine künftigen pecuniären Lebensverhältnisse bedeutend verbessert, ohne würdigeren Schaden zu verursachen.

Darf ich mir … einen … Vorschlag erlauben, so dürfte eine einstweilige Anstellung in Wien und durch eine gnädigste von Eurer Kaiserlichen Hoheit ihm selbst gegebene Ausarbeitung in der höheren Mathematik, dessen Auftrag ihm nicht nur allergnädigst höchst schmeichelhaft seyn, sondern auch seinen gedrückten Geist erheben, und mit Erhebung von diesem auch sein Körper neue Stärke erlangen dürfte."

A rendes szolgálatban a hol önállóan kell cselekedni és minden alkalommal magukon segíteni tudni:

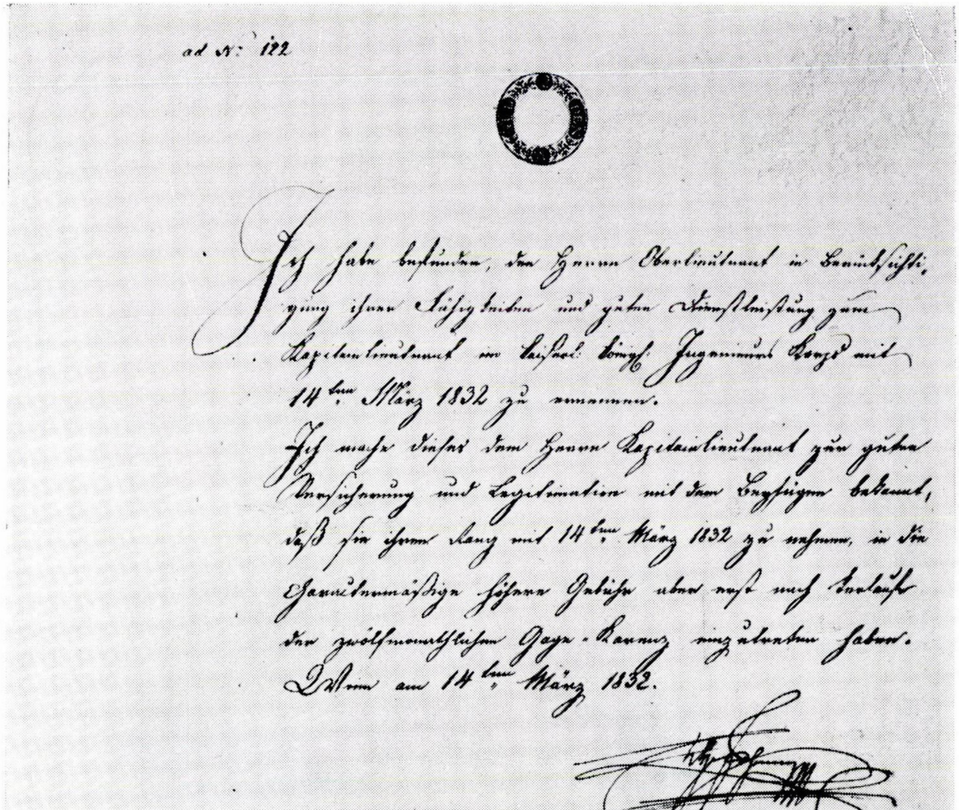
„ist der Oblt. B. für den Dienst ganz verloren, und dieses Gefühl wird auch seine Hypochondrie immer mehr zunehmen"

2/38. Melléklete: Lemberg. Január 27. 1832.

Bolyai sajátkezű kérése János kir. herczeghez előléptetéséért. „Als bereits Ältester unter seinen Kameraden vom Range"

Zimmer (Andreas). *1780 Wien, 1799 Cadet im Ing. Corps. 1849 als FML in den Ruhestand versetzt. „infolge ausgezeichneter Dienstleistungen in seiner Waffe bis in die Reihen der Generalität erhoben". (Gatti. I. p. 389)

9. képmelléklet
Részlet Szabó Péter feljegyzéseiből


ad N: 172

Ich habe befunden, den Herrn Oberlieutenant in Berücksichtigung ihrer Fähigkeiten und guten Dienstleistung zum Kapitainlieutenant im kaiserl. königl. Ingenieur Korps mit 14ten März 1832 zu ernennen.

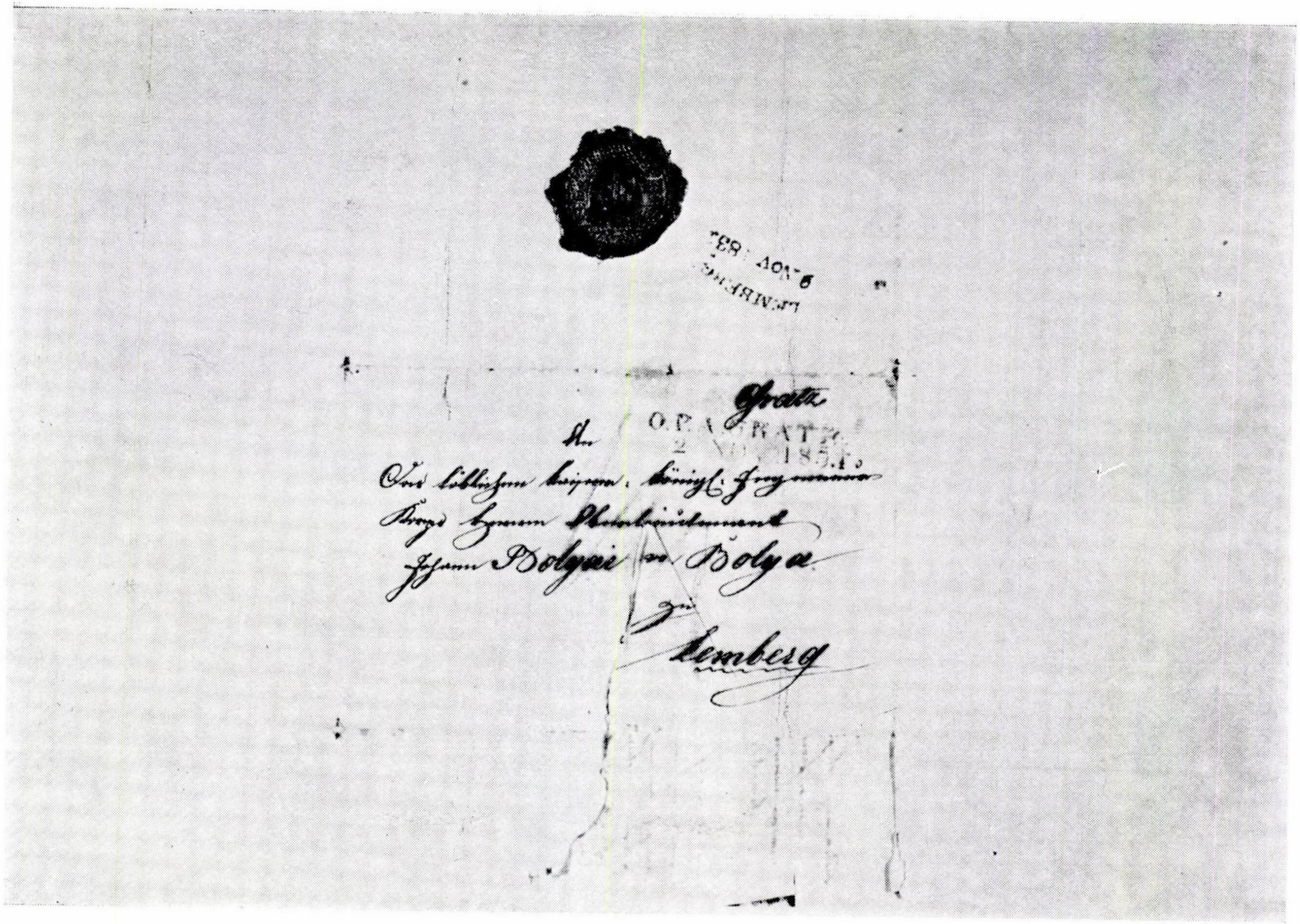
Ich mache dieses dem Herrn Kapitainlieutenant zur guten Darnachachtung und Legitimation mit dem Beyfügen bekannt, daß Sie ihren Rang mit 14ten März 1832 zu nehmen, in die hauptmannmäßigen höheren Gebühr aber erst nach Verlauf der zwölfmonatlichen Gage-Karenz einzutreten haben.

Datum am 14ten März 1832.

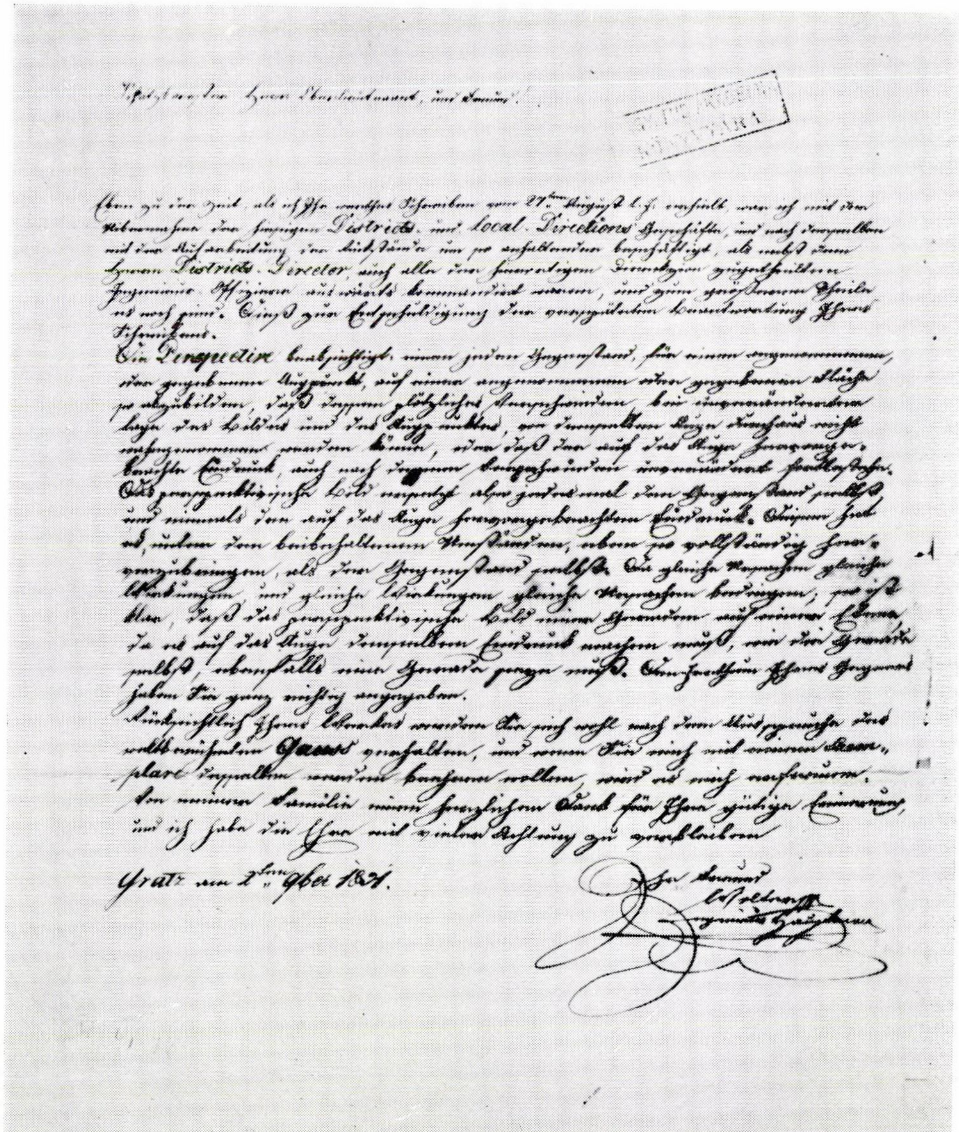
An den k.k. Ingenieur Oberlieutenant Johann v. Bolyai.

10. képmelléklet

BOLYAI JÁNOST századossá léptetik elő



11. képmelléklet
WOLTER levele BOLYAIhoz



Schätzbarster Herr Oberlieutenant, und Freund!

Eben zu der Zeit, als ich Ihr werthes Schreiben vom 27ten August l. J. erhielt, war ich mit der Übernahme der hiesigen Districts- und local-Directions Geschäfte, und nach denselben mit der Ausarbeitung der Aufsätze die zu erhaltenden beschäftigt, als nebst dem Herrn Districts-Director, auch alle der hierortigen Brigaden zugetheilten Ingenieur Offiziere auswärts kommandirt waren, und zum größeren Theile es noch sind. Dies zur Entschuldigung der verspäteten Beantwortung Ihres Schreibens.

Die Perspectiv beabsichtigt einen jeden Gegenstand, für einen angenommenen, oder gegebenen Augpunkt, auf einer angenommenen oder gegebenen Fläche so abzubilden, daß dessen plötzliches Verschwinden, bei unveränderter Lage des Bildes und des Augpunktes, an demselben Auge durchaus nicht wahrgenommen werden könne, oder daß der auf das Auge hervorgebrachte Eindruck, auch nach dessen Verschwinden unverändert fortbestehe. Das perspektivische Bild ersetzt also jederzeit den Gegenstand selbst, und niemals den auf das Auge hervorgebrachten Eindruck. Diesem zufolge ist es, unter den beibehaltenen Umständen, eben so vollständig hervorzubringen, als der Gegenstand selbst. Da gleiche Ursachen gleiche Wirkungen, und gleiche Wirkungen gleiche Ursachen bedingen, so ist klar, daß das perspektivische Bild einer Geraden auf einer Ebene da es auf das Auge denselben Eindruck machen muß, wie die Gerade selbst, ebenfalls eine Gerade seyn muß. Den Hergang Ihres Beweises haben Sie ganz richtig angegeben.

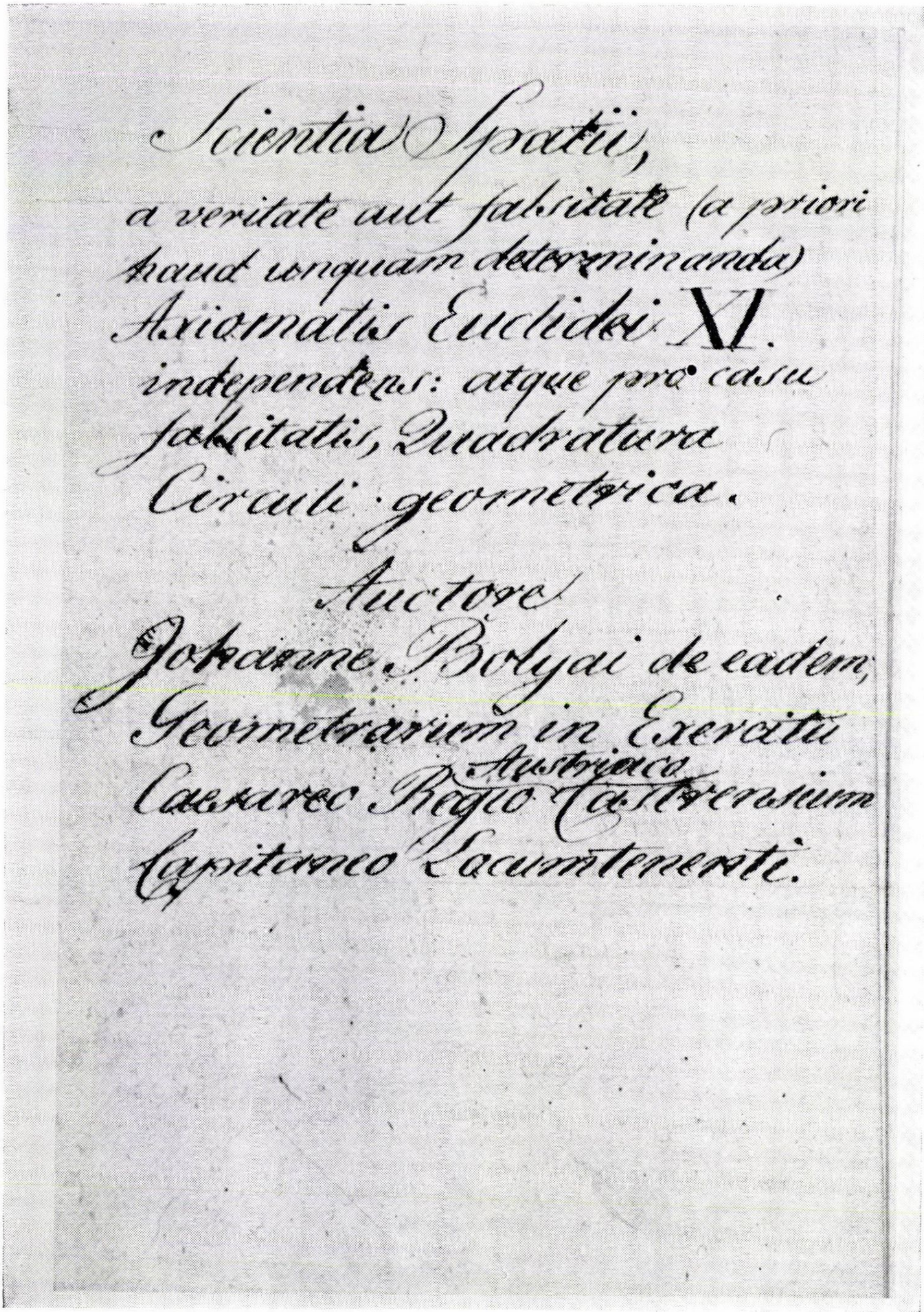
Rücksichtlich Ihres Werkes werden Sie sich wohl nach dem Ausspruche des weltberühmten Gauss gehalten, und wenn Sie mich mit einem Exemplare desselben werden beehren wollen, wird es mich erfreuen.

Von meiner Familie einen herzlichen Dank für Ihre gütige Erinnerung, und ich habe die Ehre mit vieler Achtung zu verbleiben

Grätz am 2ten 9ber 1831.

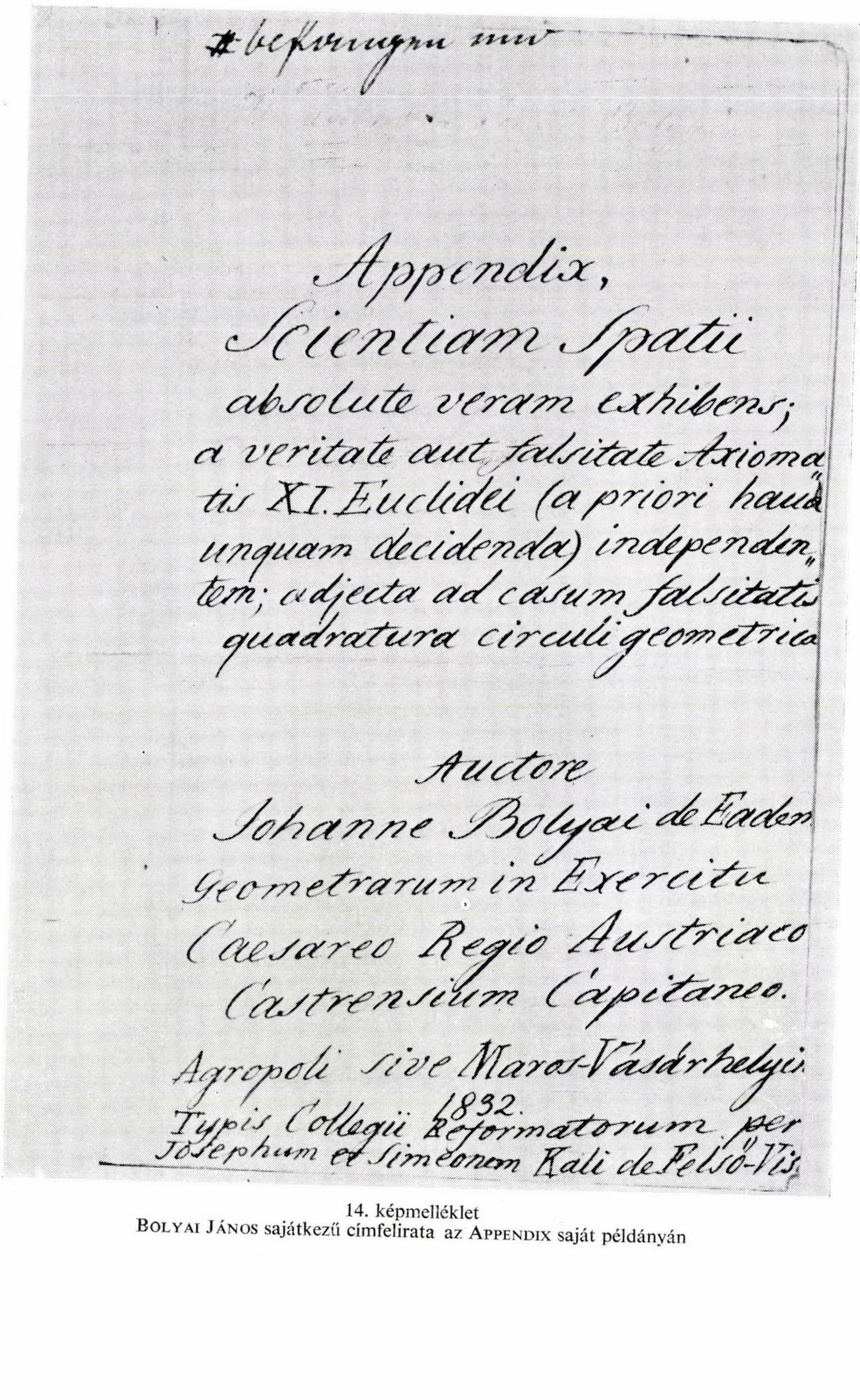
Ihr treuer
Wolter
Ingenieur Hauptmann

12. képmelléklet
WOLTER levele BOLYAIhoz


Scientia Spatii,
a veritate aut falsitate (a priori
haud unquam determinanda)
Axiomatis Euclidei XI.
independens: atque pro casu
falsitatis, Quadratura
Circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de eadem,
Geometrarum in Exercitu
Austriaco
Caesareo Regio Castrensium
Capitaneo Locumtenente.

13. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS sajátkezű címfelirata a folyamodványához csatolt APPENDIX példányon

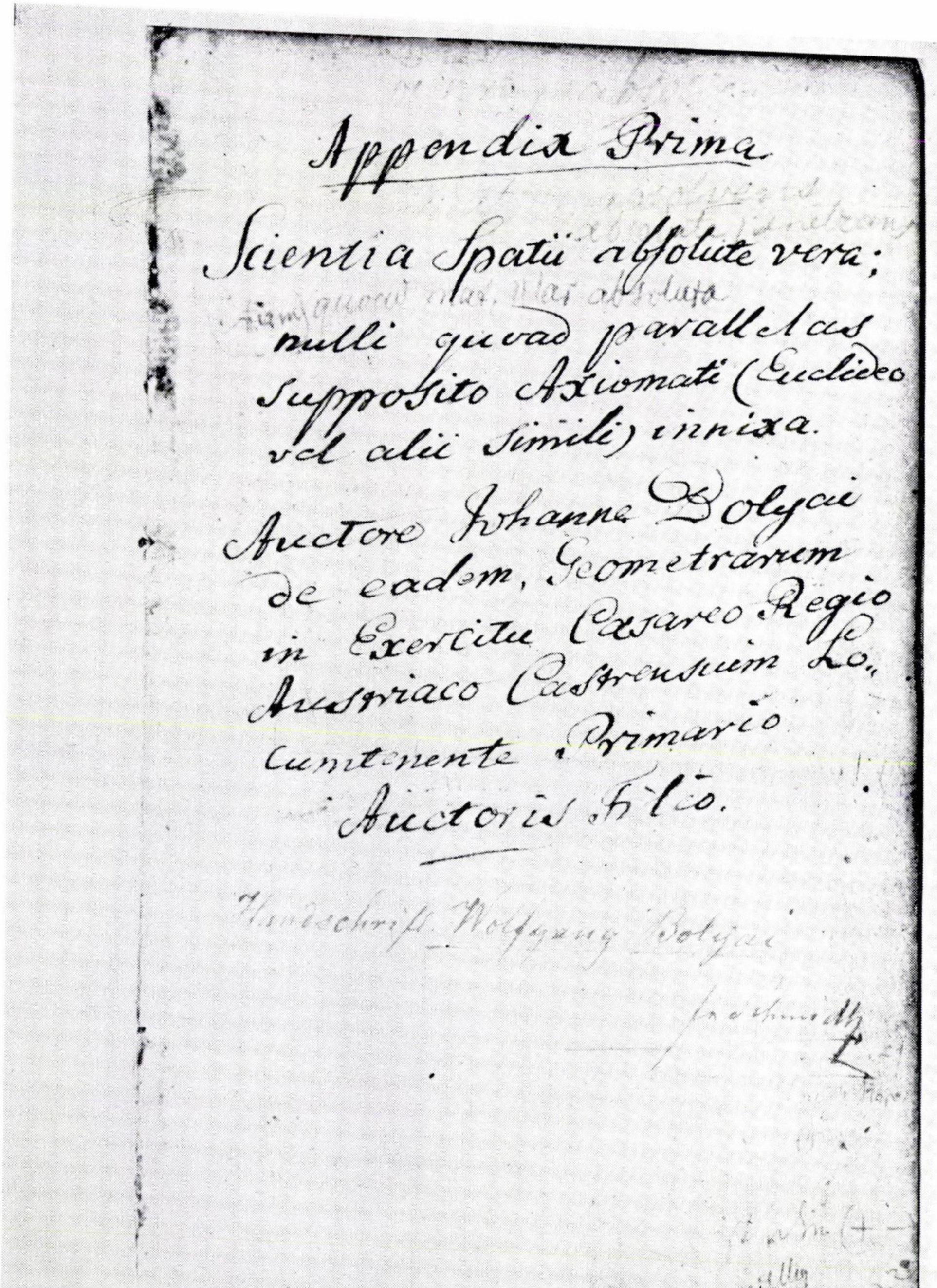


Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini.
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

14. képmelléklet
Bolyai János sajátkezű címfelirata az Appendix saját példányán



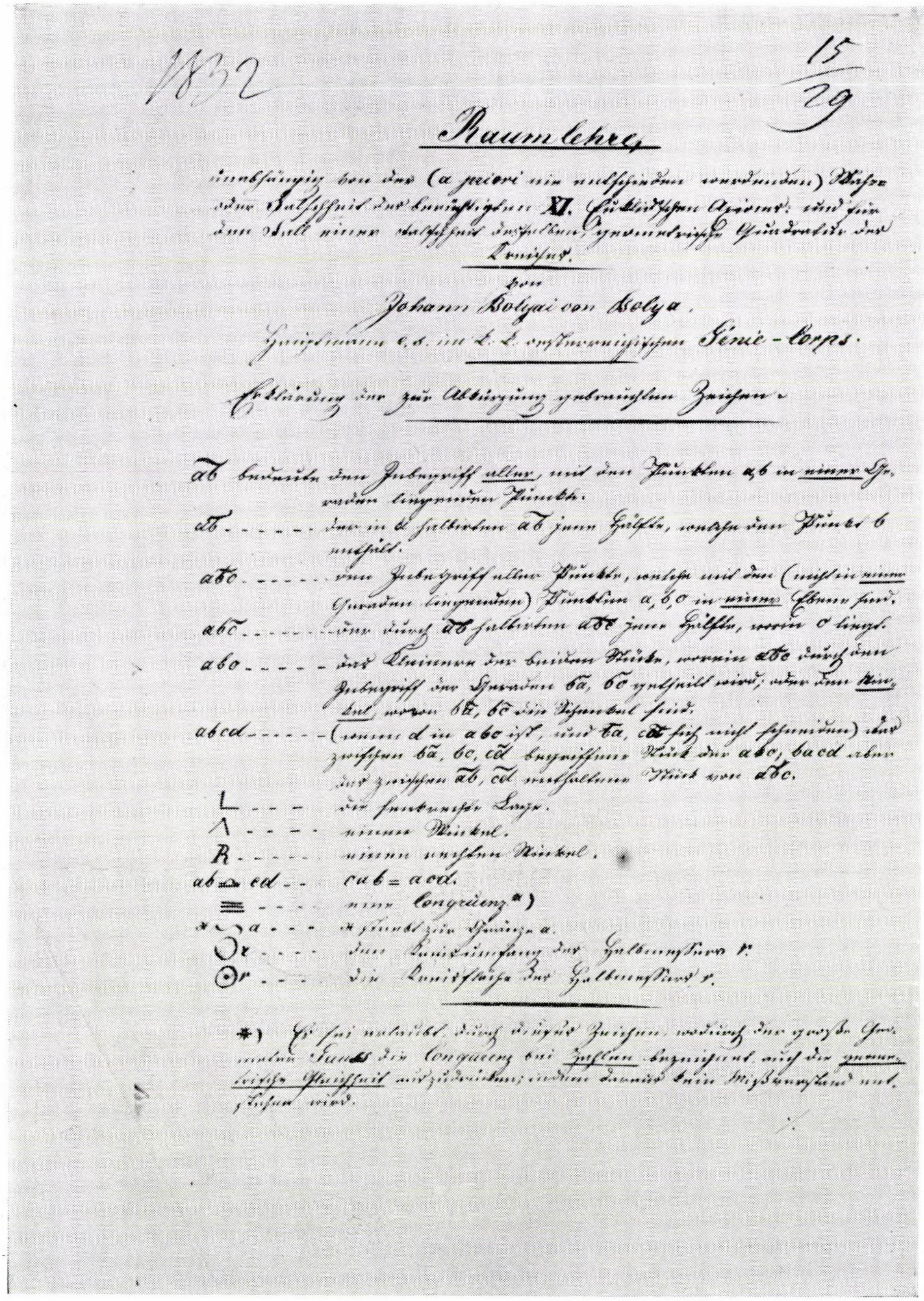
Appendix Prima

Scientia Spatii absolute vera;
nulli quoad parallelas
supposito Axiomati (Euclideo
vel alii simili) innixa.

Auctore Johanne Bolyai
de eadem, Geometrarum
in Exercitu Caesareo Regio
Austriaco Castrensium Lo-
cumtenente Primario
Auctoris Filio.

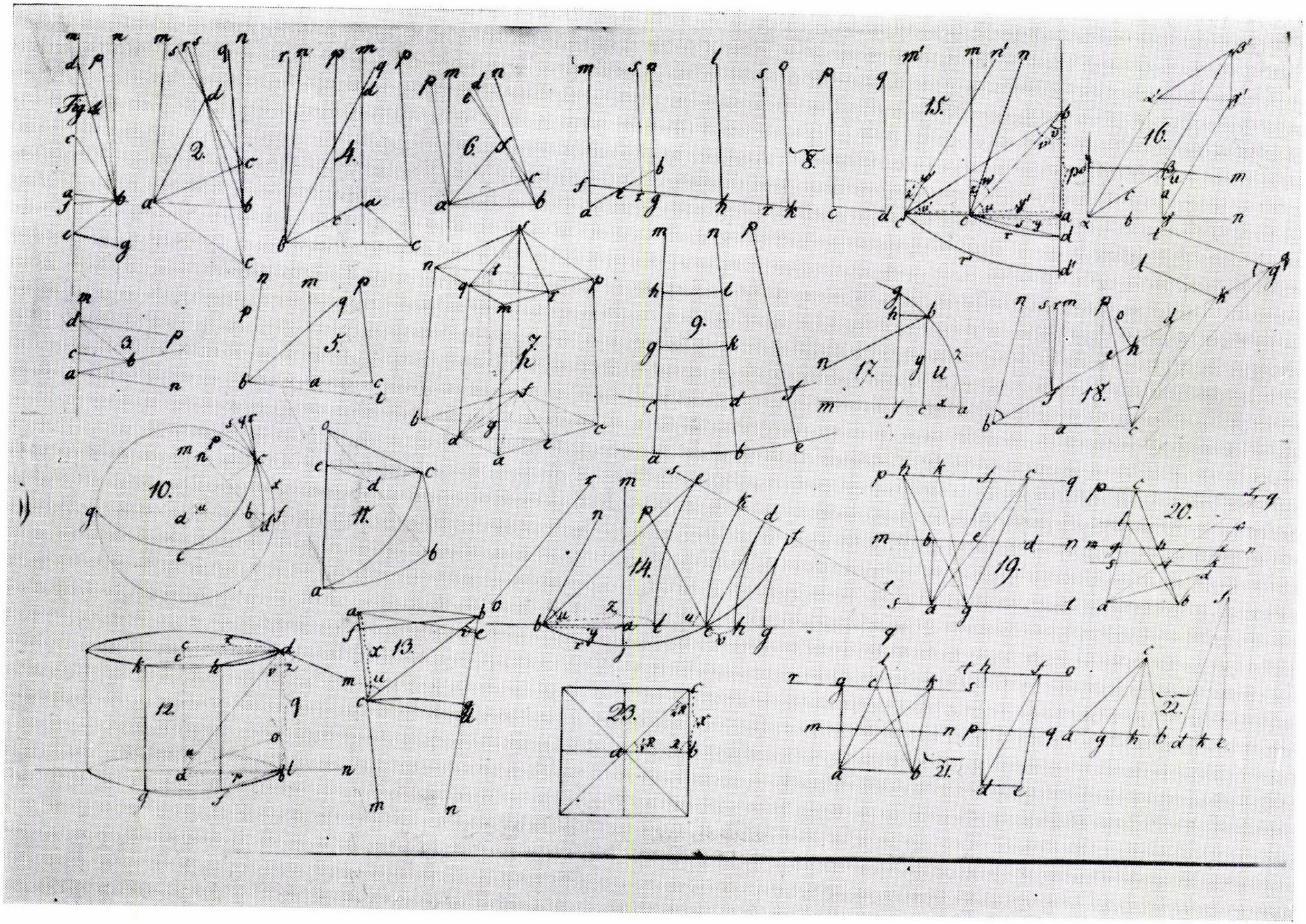
Handschrift Wolfgang Bolyai

15. képmelléklet
BOLYAI FARKAS címfelirata JÁNOS APPENDIX példányán

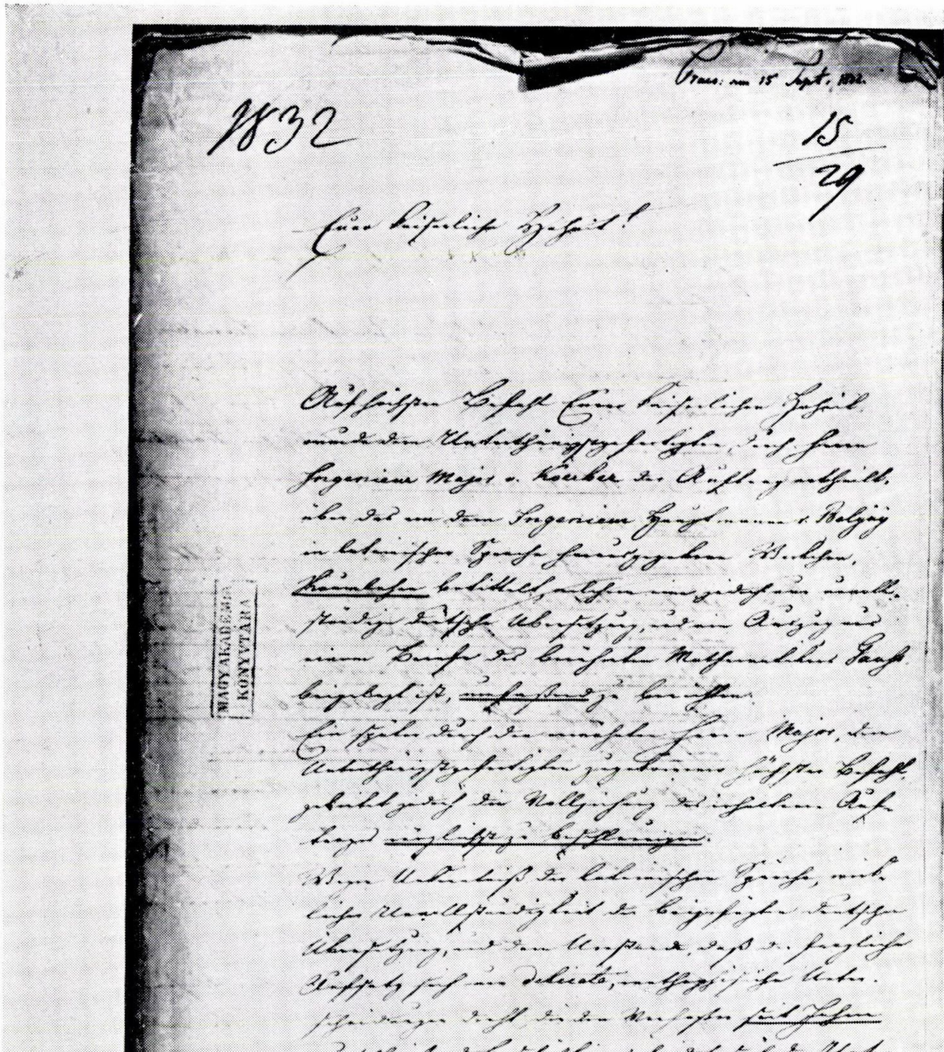


16. képmelléklet

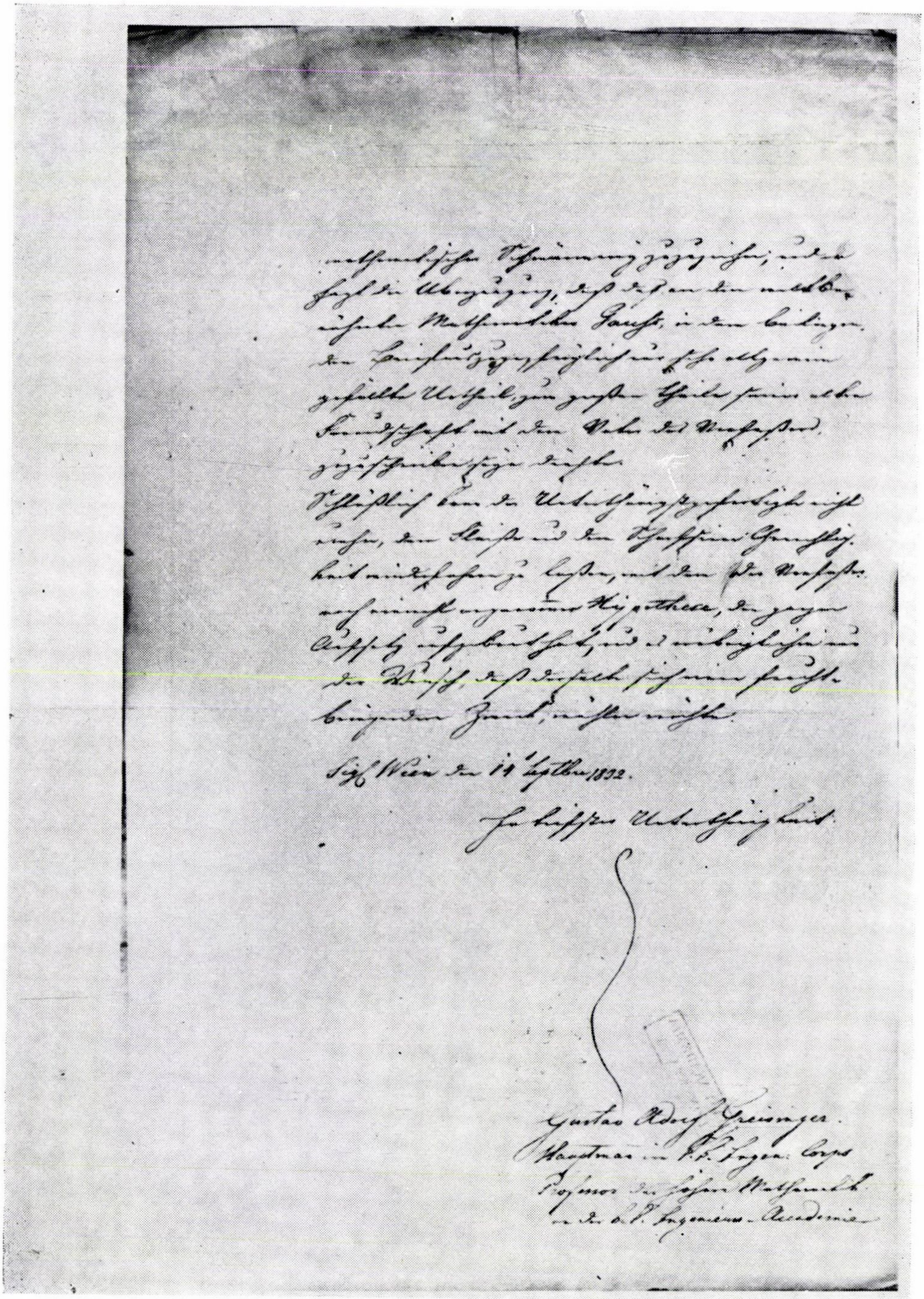
AZ APPENDIX német fordítása BOLYAI JÁNOStól. A kézirat első oldala



17. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS rajzmelléklete a *Raumlehre* kéziratához



18. képmelléklet
GREISINGER szakvéleménye az APPENDIXről. A kézirat első oldala



19. képmelléklet
GREISINGER szakvéleménye az APPENDIXről. A kézirat befejező része

Beihilfe: die Interessen der Lieutenant Caution

Spricht und schreibt: deutsch, ungarisch, lateinisch, versteht französisch und etwas italienisch

Kenntnisse:

aus den Geniewissenschaften: hat, nach der vorigen Conduite-Liste, noch sehr wenig praktische Dienste geleistet. Hierort ist derselbe zu kurze Zeit angestellt um über seine Wirksamkeit ein richtiges Urtheil fällen zu können. gleichwohl erhellet bereits, daß er nur für mathematische Wissenschaften eine besondere Vorliebe hege, und daß ihn leider nach der Ansicht des gefertigten Fortifications-Local-Directors der Scepticismus hierin auf Abwege leite

in andern Wissenschaften:

In den mathematischen Wissenschaften, wovon er bereits öffentlich unwiderlegliche Beweise gab, indem er die so äußerst wichtige, und nicht wenig verwickelte Materie der Raumlehre, welche sich auf das berühmte XI. Euklidische Axiome bezieht und womit sich seit 2100 Jahren selbst die ausgezeichnetesten Geometer ungeachtet des rastlosen Bestrebens ganz vergeblich befaßten nicht nur auf das Vollkommenste ins Klare brachte und bekannt machte, sondern darin sogar weit mehr, als gefordert würde leistete. Ohne übrigens andere Wissenschaften als Geschichte, Geographie etc. in so fern zu beseitigen als ihre Kenntniß einem gebildeten Offiziere erwartet werden kann.

in Infanterie-, Cavallerie Dienst und von der höheren Kriegskunst:

hat die an der Akademie erlernten Grundsätze inne, und sucht durch Lesung guter Werke seine Kenntnisse zu erweitern

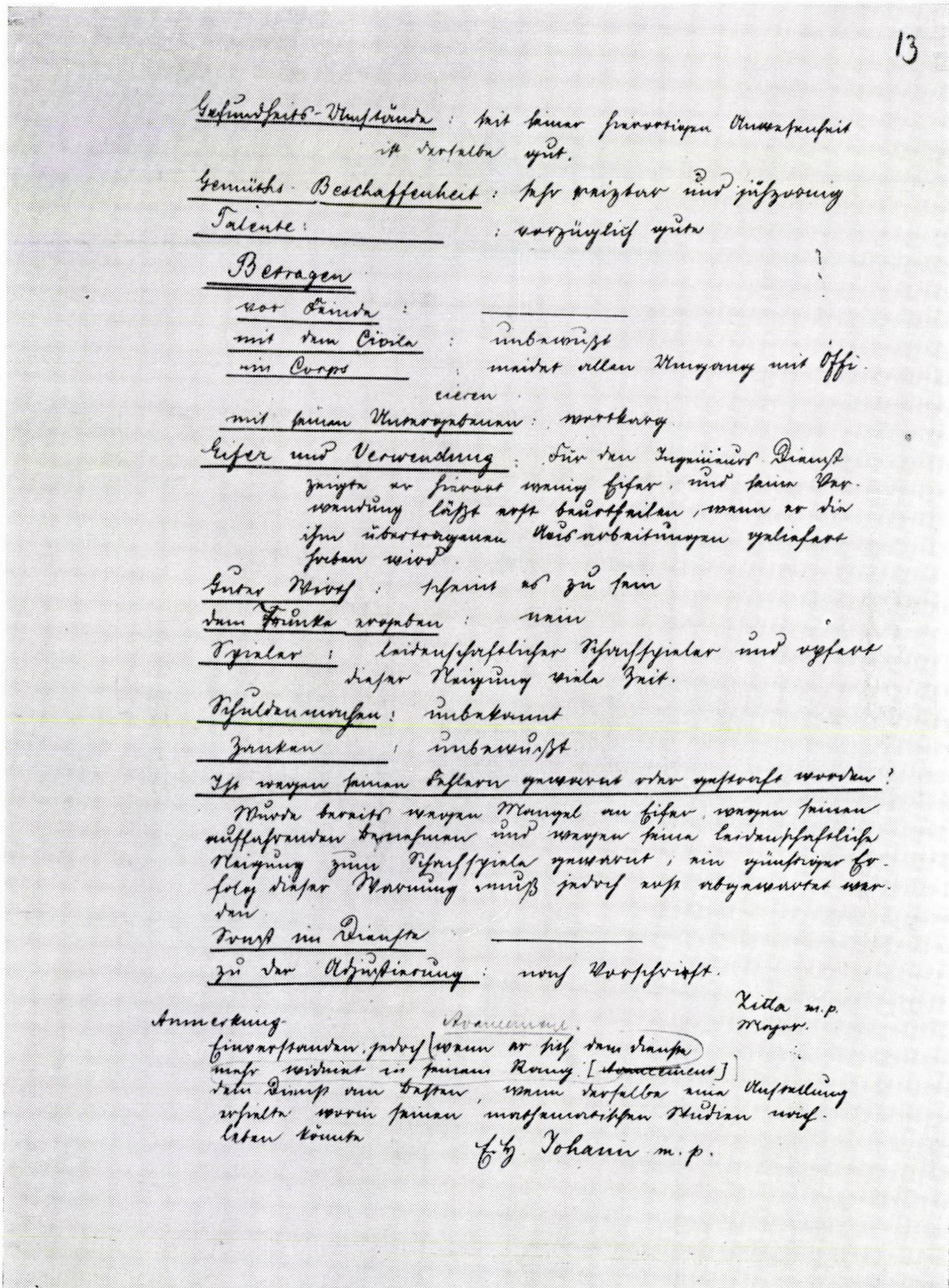
von mehreren Länder und welche:

vorzüglich Ungarn, Siebenbürgen und Galizien

vor Feind: hat noch nicht Angelegenheit gehabt

bei welchen Gelegenheiten öffentlich angerühmt wurde, Belohnung, Dekorationen etc.: die öffentliche Recension des von ihm herausgegebenen Werkchens erwartet er erst nachdem sich dasselbe, vermöge eines Privatbriefes des größten damaligen und eines der größten Mathematiker aller Zeiten Herrn Hofrath von Gauss vollkommen bewährt hat.

20. képmelléklet
Szabó Péter följegyzéseiből



13

Gesundheits-Umstände: seit seiner hiervortigen Anwesenheit ist derselbe gut.

Gemüths Beschaffenheit: sehr reizbar und jähzornig

Talente: vorzüglich gute

Betragen

vor Feinde: ——

mit dem Civile: unbewußt

im Corps: meidet allen Umgang mit Officieren

mit seinen Untergebenen: wortkarg

Eifer und Verwendung: Für den Ingenieurs Dienst zeigte er hievor wenig Eifer, und seine Verwendung läßt erst beurtheilen, wenn er die ihm übertragenen Ausarbeitungen geliefert haben wird

Guter Wirth: scheint es zu sein

dem Trunke ergeben: nein

Spieler: leidenschaftlicher Schachspieler und opfert dieser Neigung viele Zeit.

Schuldenmachen: unbekannt

Zanken: unbewußt

Ist wegen seinen Fehlern gewarnt oder gestraft worden?

Würde bereits wegen Mangel an Eifer, wegen seinem aufbrausenden Benehmen und wegen seiner leidenschaftlichen Neigung zum Schachspiele gewarnt; ein günstiger Erfolg dieser Warnung muß jedoch erst abgewartet werden.

Sonst im Dienste: ——

zu der Adjustirung: nach Vorschrift.

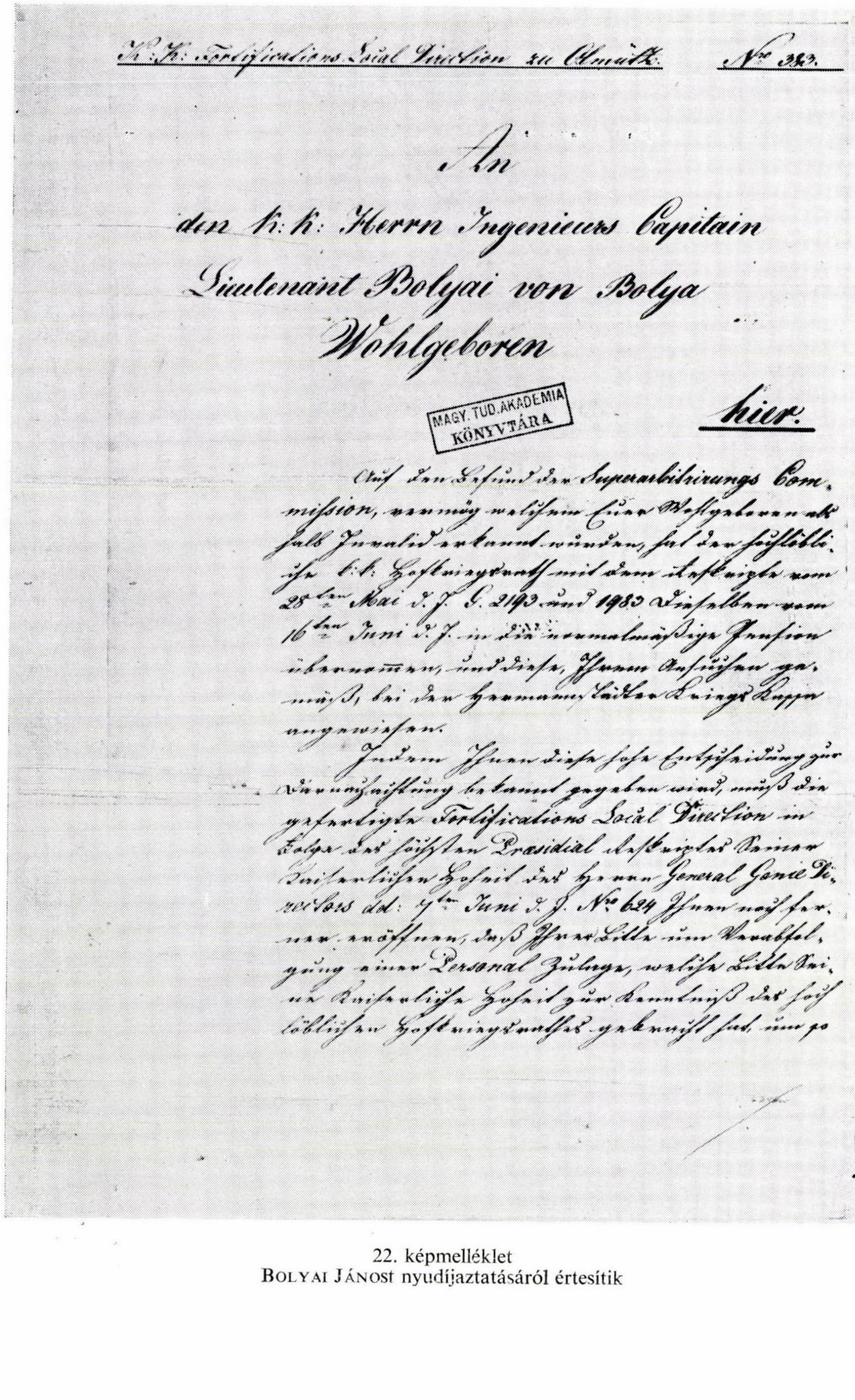
Zitta m.p.
Major.

Anmerkung. ~~Avancement~~.

Einverstanden, jedoch [wenn er sich dem Dienste mehr widmet in seinem Rang [~~Avancement~~]] dem Dienst am besten, wenn derselbe eine Anstellung erhielte worin seinen mathematischen Studien nachleben könnte

EH. Johann m.p.

21. képmelléklet
Szabó Péter följegyzéseiből



K: K: Fortifications Local Direction zu Olmütz. No 383.

An

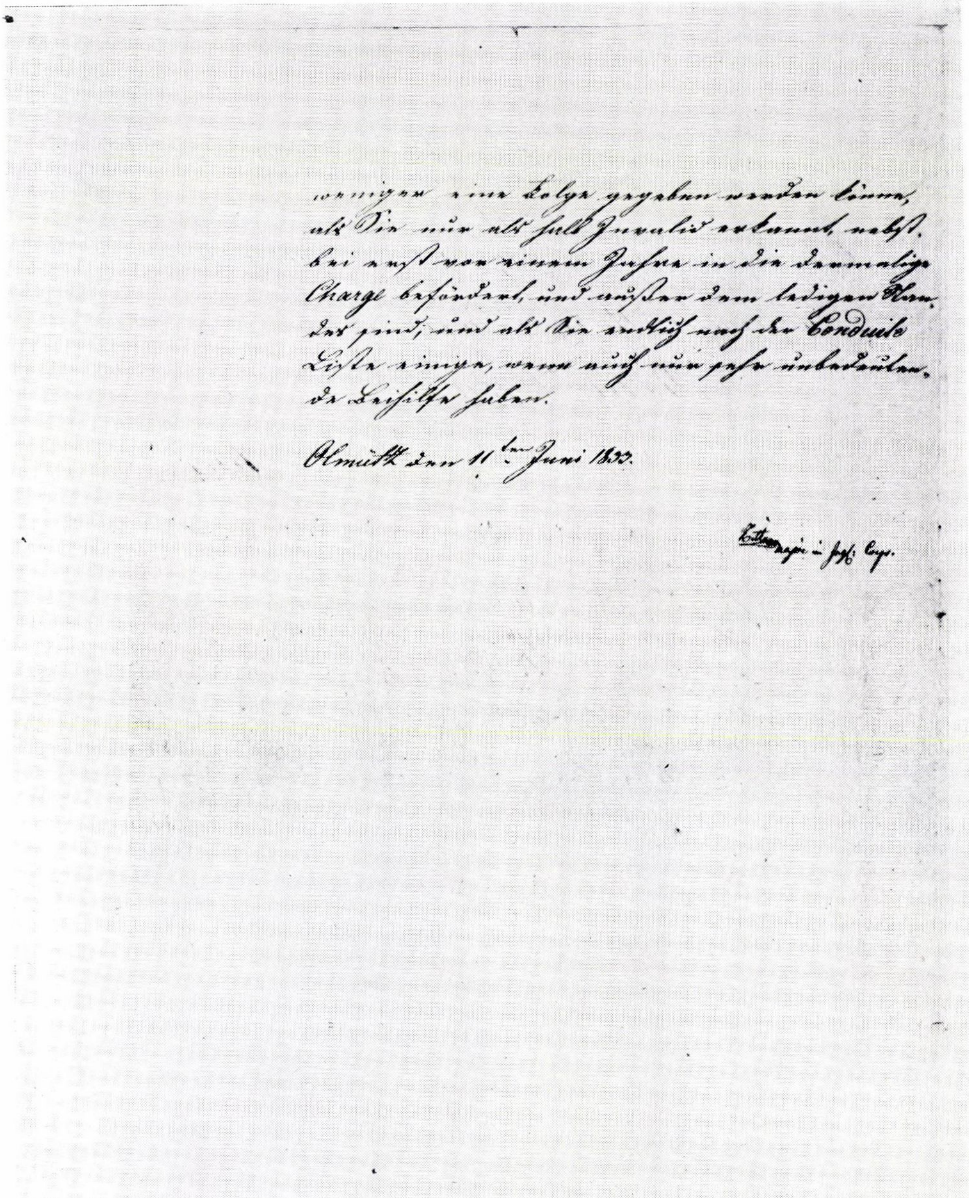
den k: k: Herrn Ingenieurs Capitain Lieutenant Bolyai von Bolya Wohlgeboren

hier.

Auf den Befund der Superarbitrirungs Commission, vermög welchem Euer Wohlgeboren als Invalid erkannt wurden, hat der hochlöbliche k. k. Hofkriegsrath mit dem Rescripte vom 28ten Mai d. J. G. 2193 und 1983 dieselben vom 16ten Juni d. J. in den normalmäßigen Pension übernommen, und diese, Ihnen auszuzahlen gemäß, bei dem hiesigen Kreis Kassa angewiesen.

Indem Ihnen diese hohe Entscheidung zur Darnachachtung bekannt gegeben wird, muß die gefertigte Fortifications Local Direction in Folge des höchsten Praesidial Rescriptes Seiner kaiserlichen Hoheit des Herrn General Genie Directors dd: 7ten Juni d. J. No 624 Ihnen noch ferner eröffnen, daß Ihre Bitte um Verabfolgung einer Personal Zulage, welche Bitte bei ... Kaiserliche Hoheit zur Kenntniß des hoch löblichen Hofkriegsrathes gebracht hat, um so

22. képmelléklet
BOLYAI JÁNOST nyudíjaztatásáról értesítik

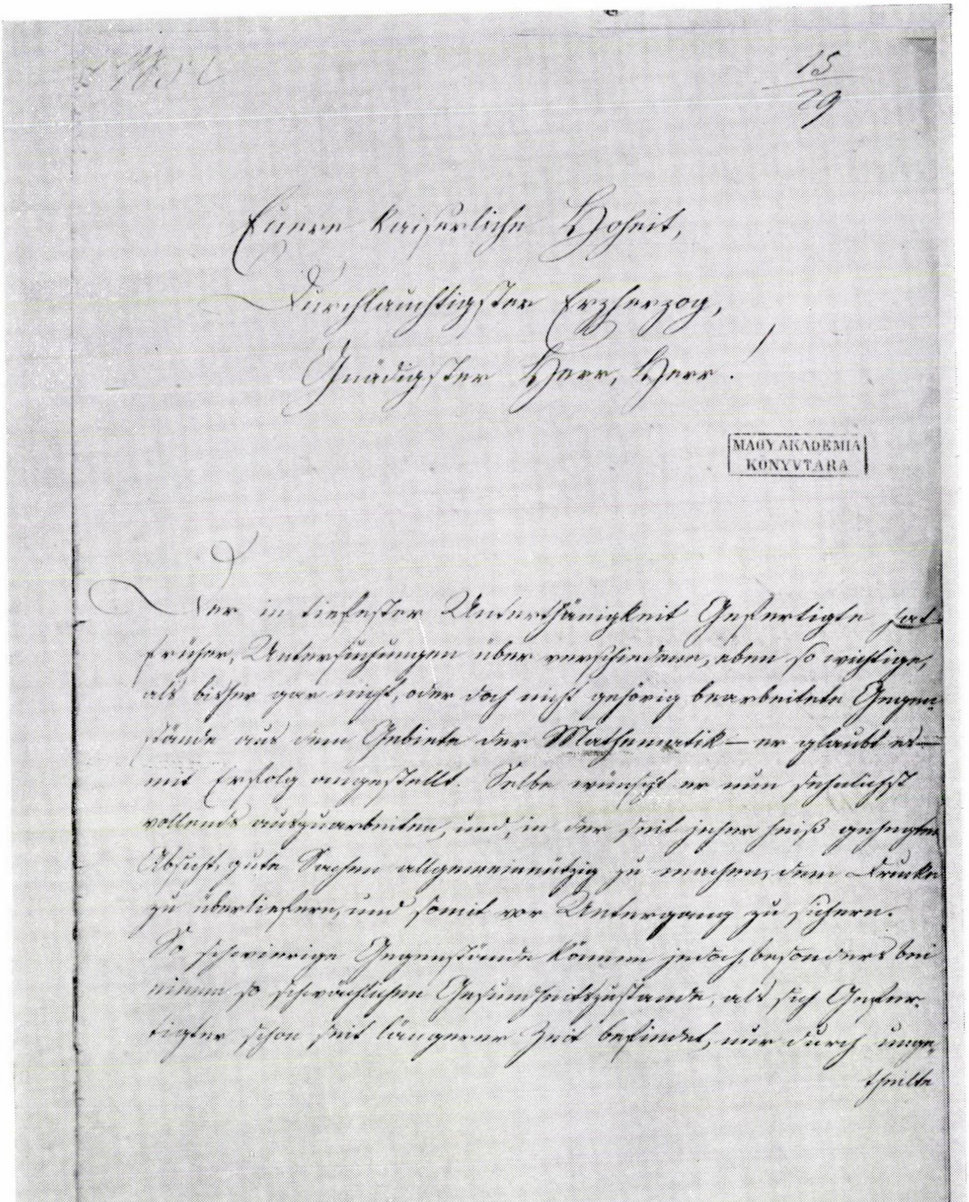


wenigen eine Folge gegeben werden könne,
als Sie nur als halb Invalid erkannt, nebst
bei erst vor einem Jahre in die damalige
Charge befördert, und außer dem ledigen Stan-
des sind, und als Sie endlich nach der Conduite
Liste einige, wenn auch nur sehr unbedeutende,
Schulden haben.

Olmütz den 11ten Juni 1833.

[illegible]

23. képmelléklet
Bolyai Jánost nyugdíjaztatásáról értesítik. Az okirat befejező része



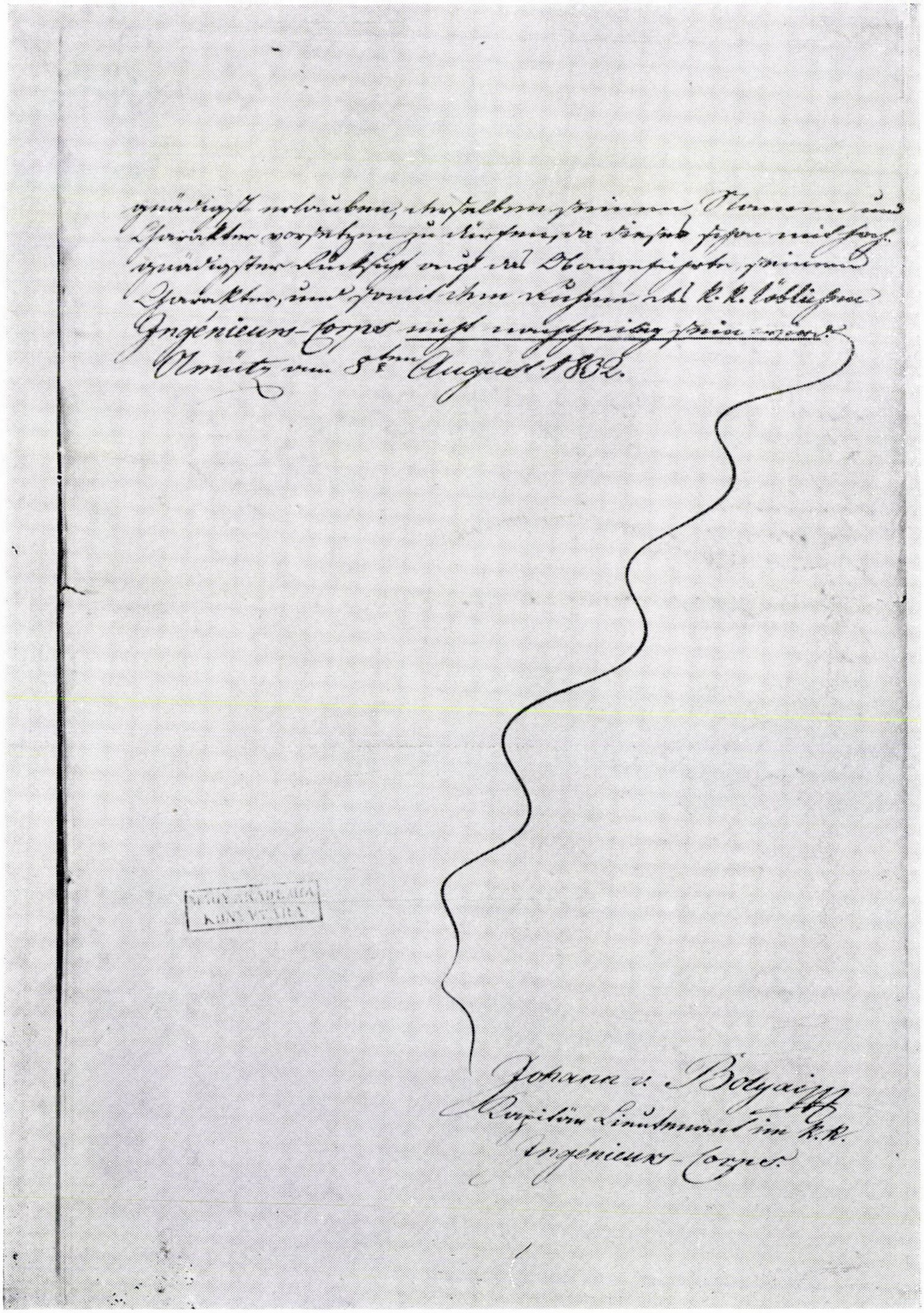
15/29

Euer kaiserliche Hoheit,
Durchlauchtigster Erzherzog,
Gnädigster Herr, Herr!

Der in tiefester Unterthänigkeit Gefertigte hat früher Untersuchungen über verschiedene, eben so wichtige, als bisher gar nicht, oder doch nicht gehörig bearbeitete Gegenstände aus dem Gebiete der Mathematik — er glaubt [illegible] mit Erfolg angestellt. Selbe wünscht er nun sehnlichst vollends auszuarbeiten, und, in der Zeit jener heiß gewünschten Absicht, gute Sachen allgemeinnützig zu machen, dem Drucke zu überliefern, und somit der [illegible] zu führen. Die schwierigen Gegenstände können jedoch besonders bei einem so schwächlichen Gesundheitszustande, als sich Gefertigter schon seit längerer Zeit befindet, nur durch eine [illegible]

[illegible]

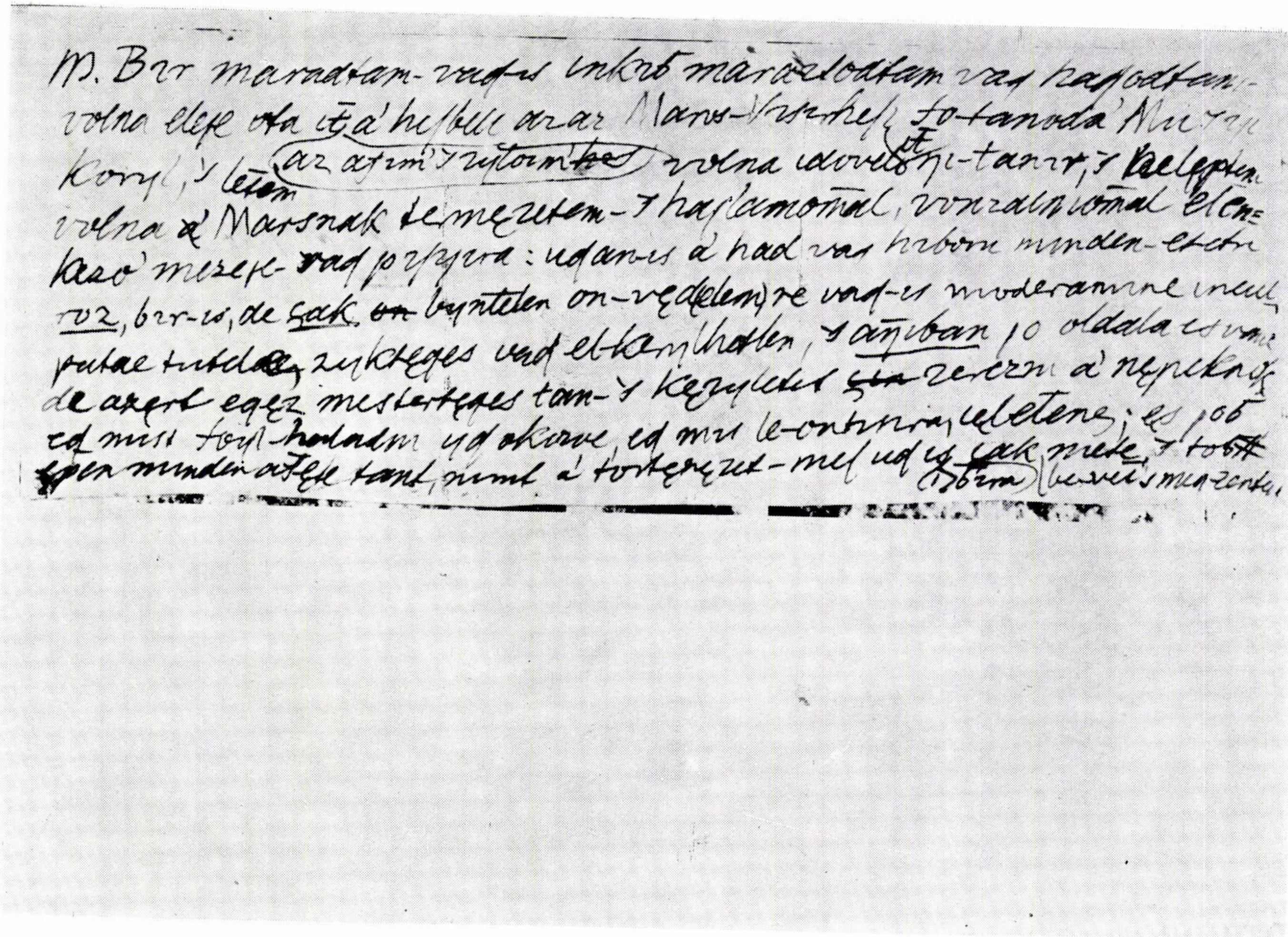
24. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS folyamodványa 1832. augusztus 8-án. Az első kéziratoldal



Olmütz am 8ten August 1832.

Johann v. Bolyai
Unterlieutenant im k.k.
Ingénieurs-Corps.

25. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS folyamodványa 1832. augusztus 8-án. Az utolsó kéziratoldal



26. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS sajátkezű feljegyzése egy papírszeleten:

„Bár maradtam ....volna, ...
's lettem volna idővel ....

(Auszug aus dem Gauss'schen Briefe) 15/29
1832

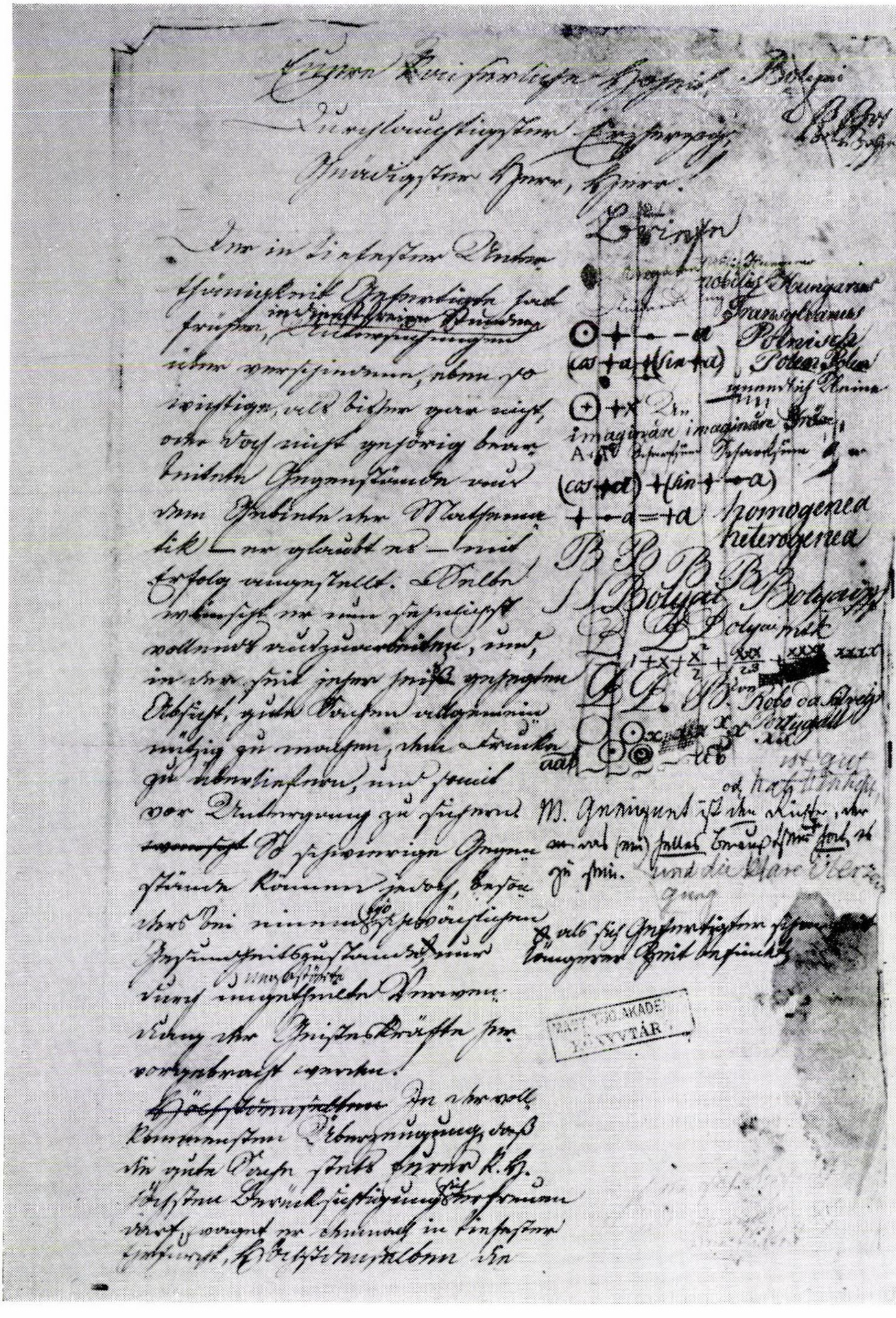
Durch deine beiden mir durch Herrn Zeyk zugestellten Briefe hast du, mein alter unvergesslicher Freund, mich sehr erfreut. Ich zögerte nach Empfang des ersteren, dir sogleich zu antworten, weil ich erst die Ankunft der versprochenen kleinen Schrift erwarten wollte, außer dem auch durch mancherlei Lebensverhältnisse*) — Jetzt einiges über die Arbeit deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange „dass ich solche nicht loben darf": so wirst du wohl einen Augenblick stutzen; aber ich kann nicht anders, sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg den dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen zum Theil schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. Mein Vorsatz war von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papiere gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das was ich ihnen mittheilte mit besonderem Interesse aufnahmen.

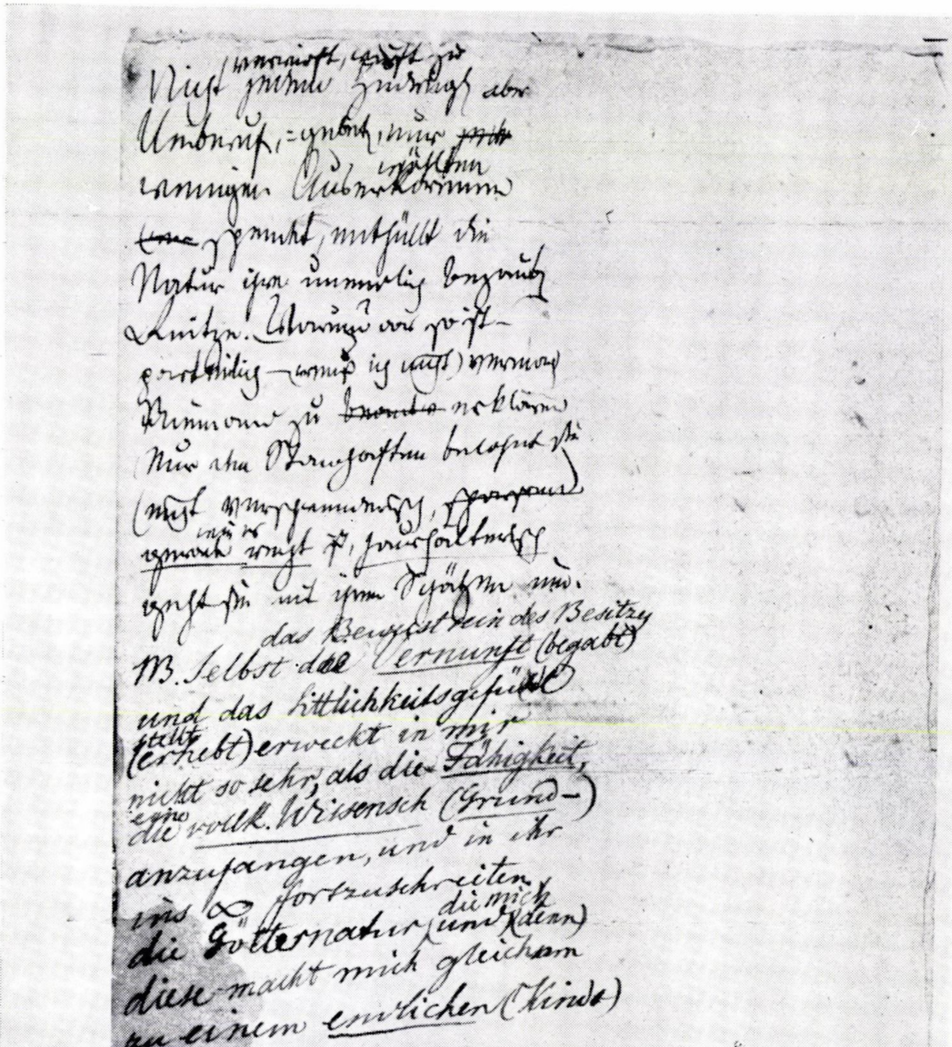
Um

*) Hier folgt nun eine kurze Schilderung seiner häuslichen Verhältnisse, welche, da sie das Wesentliche gar nicht betreffen, gnädigst erlaubt sey zu übergehen. Bolyai

27. képmelléklet
„Auszug aus dem GAUSS'schen Briefe".
BOLYAI JÁNOS sajátkezű levélmásolata megjegyzéseivel. A kézirat első oldala

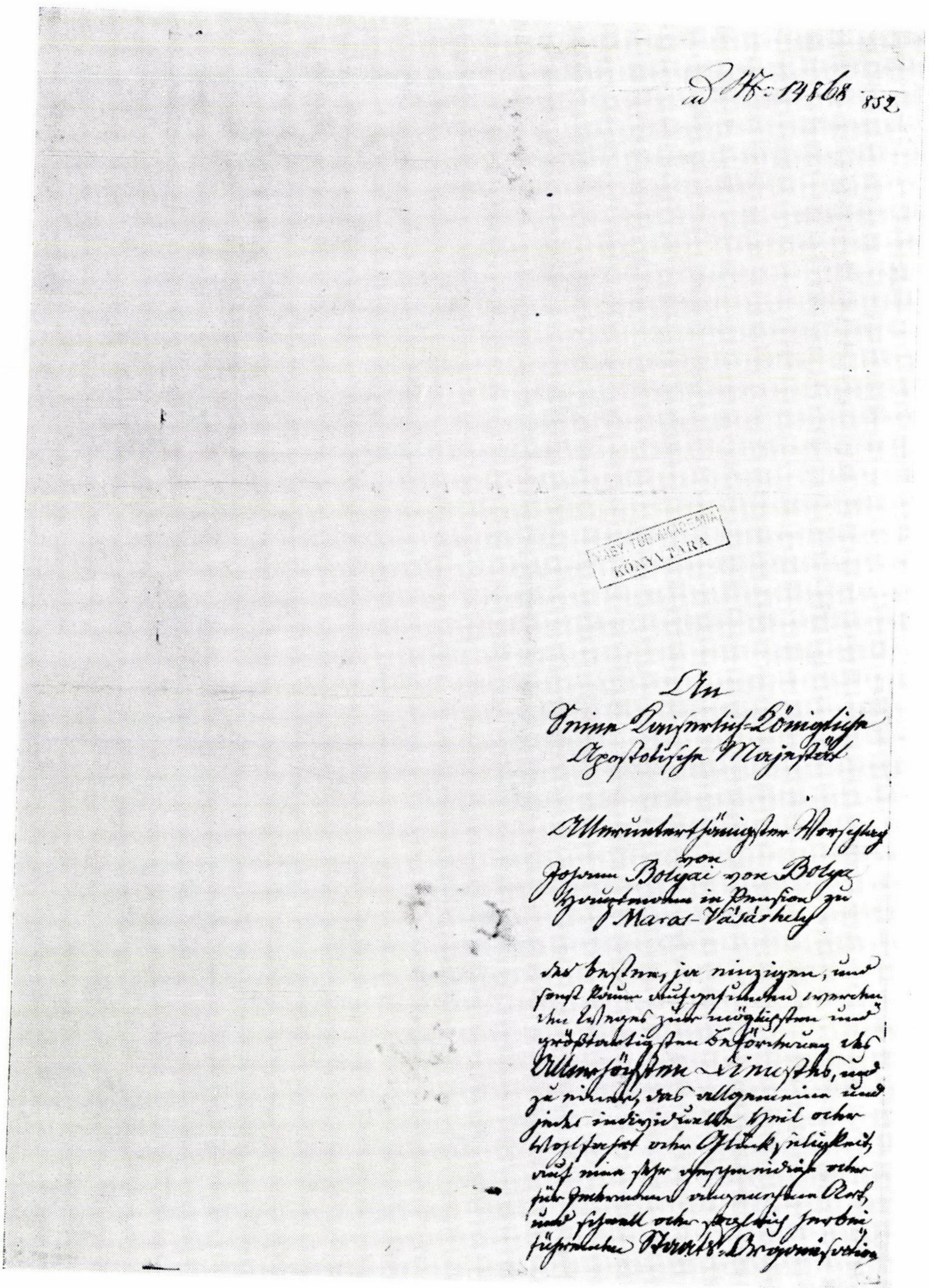


28. képmelléklet
A lembergi folyamodvány-tervezet első oldala

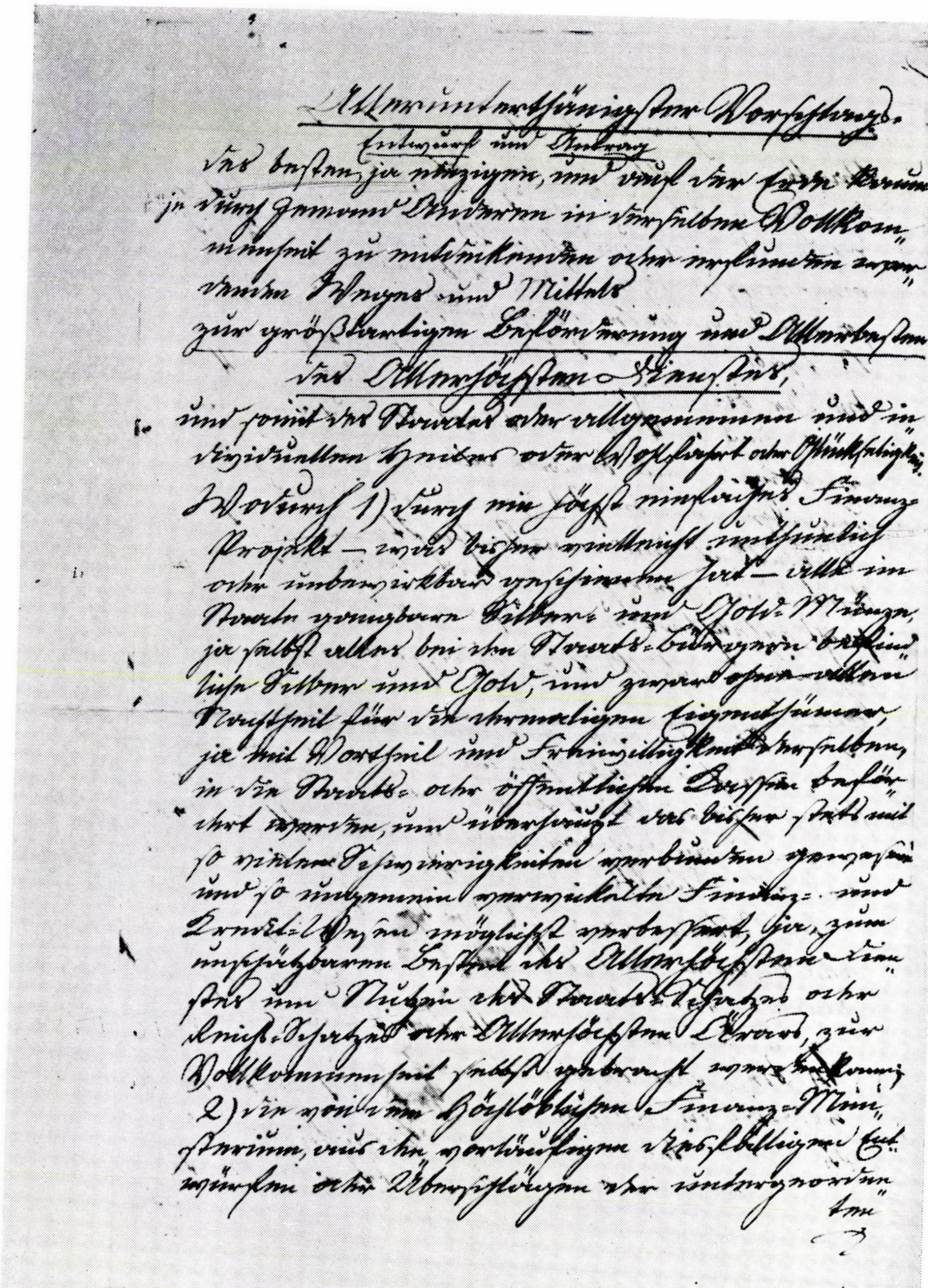


das Bewusstsein des Besitzes
M. Selbst die Vernunft (begabt)
und das Sittlichkeitsgefühl
stellt (erhebt) erweckt in mir
nicht so sehr, als die Fähigkeit,
eine die vollk. Wissensch (Grund-)
anzufangen, und in ihr
ins ∞ fortzuschreiten.
die Götternatur (und) die mich (denn)
diese macht mich gleichsam
zu einem endlichen (Kinde)
Gott.

29. képmelléklet
A lembergi folyamodvány-tervezet 12. kéziratoldala

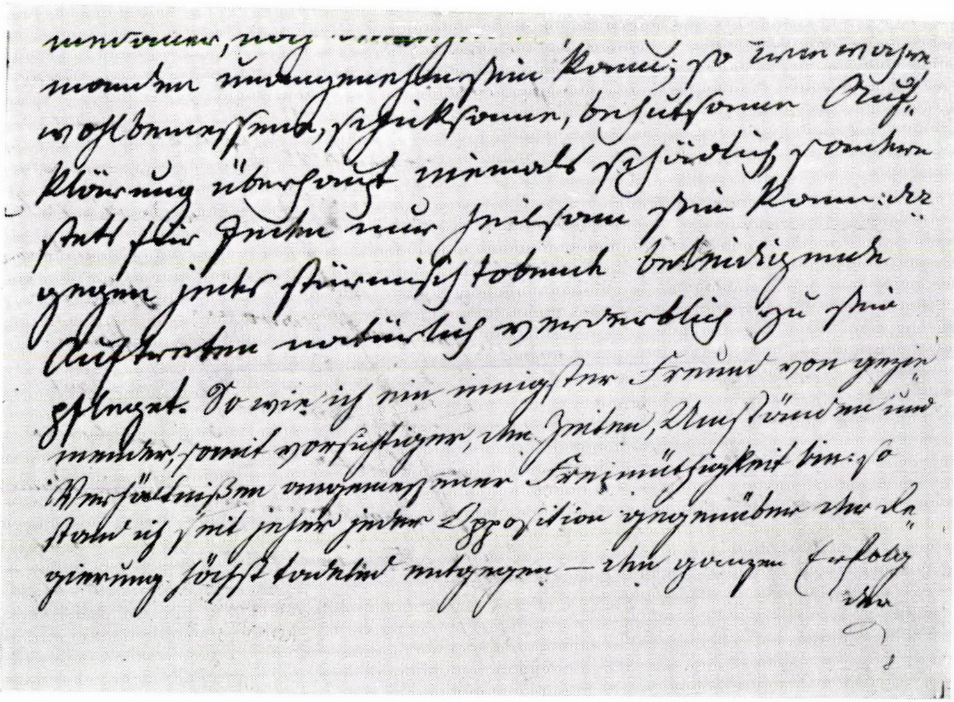


30. képmelléklet
BOLYAI JÁNOS előterjesztése a császárhoz 1852-ben. A kézirat felzete

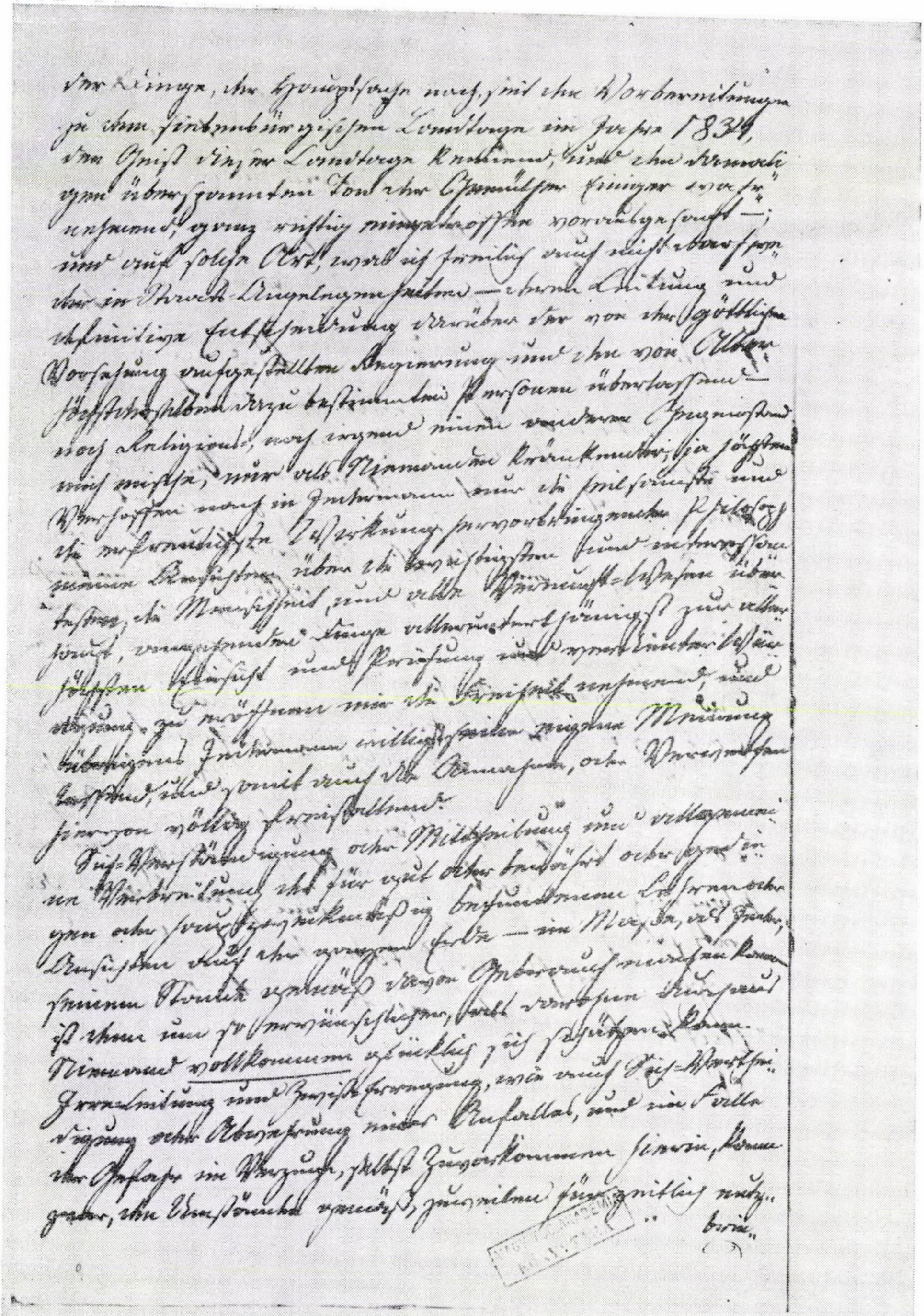


Allerunterthänigster Vorschlag.
Entwurf und Antrag
das Bestehende zu ergänzen, und auch der erste Keim
zu durch genauere Ansichten in derselben Vollkom-
menheit zu entwickelnden oder ergänzenden neuen
Wege und Mittels
zur großartigen Beförderung und Allerbesten
des Allerhöchsten Dienstes,
und somit des Staates oder allgemeinen und in-
dividuellen Heiles oder Wohlfahrt oder Glückseligkeit;
Wodurch 1) durch ein höchst einfaches Finanz-
Projekt — was bisher vielleicht wahrscheinlich
oder unbegreiflich geschienen hat — alle im
Staate vorhandenen Silber- und Gold-Münzen,
ja selbst alles bei den Staatsbürgern befind-
liche Silber und Gold, und zwar ohne allen
Nachtheil für die dermaligen Eigenthümer,
ja mit Vortheil und Freiwilligkeit derselben,
in die Staats- oder öffentlichen Cassen beför-
dert werden, und überhaupt das bisher stets mit
so vielen Schwierigkeiten verbundene ganze [illegible]
und so ungemein verwickelte Finanz- und
Handels-Wesen möglichst verbessert, hier, zum
unschätzbaren Besten des Allerhöchsten Dien-
stes am Nutzen des Staats-Schatzes oder
Kriegs-Schatzes oder Allerhöchsten Aerars, zur
Vollkommenheit selbst gebracht werden können;
2) die [illegible] dem Hochlöblichen Finanz-Mini-
sterium, und den vorläufigen [illegible] Ent-
würfen oder Übergehung der untergeordne-
ten

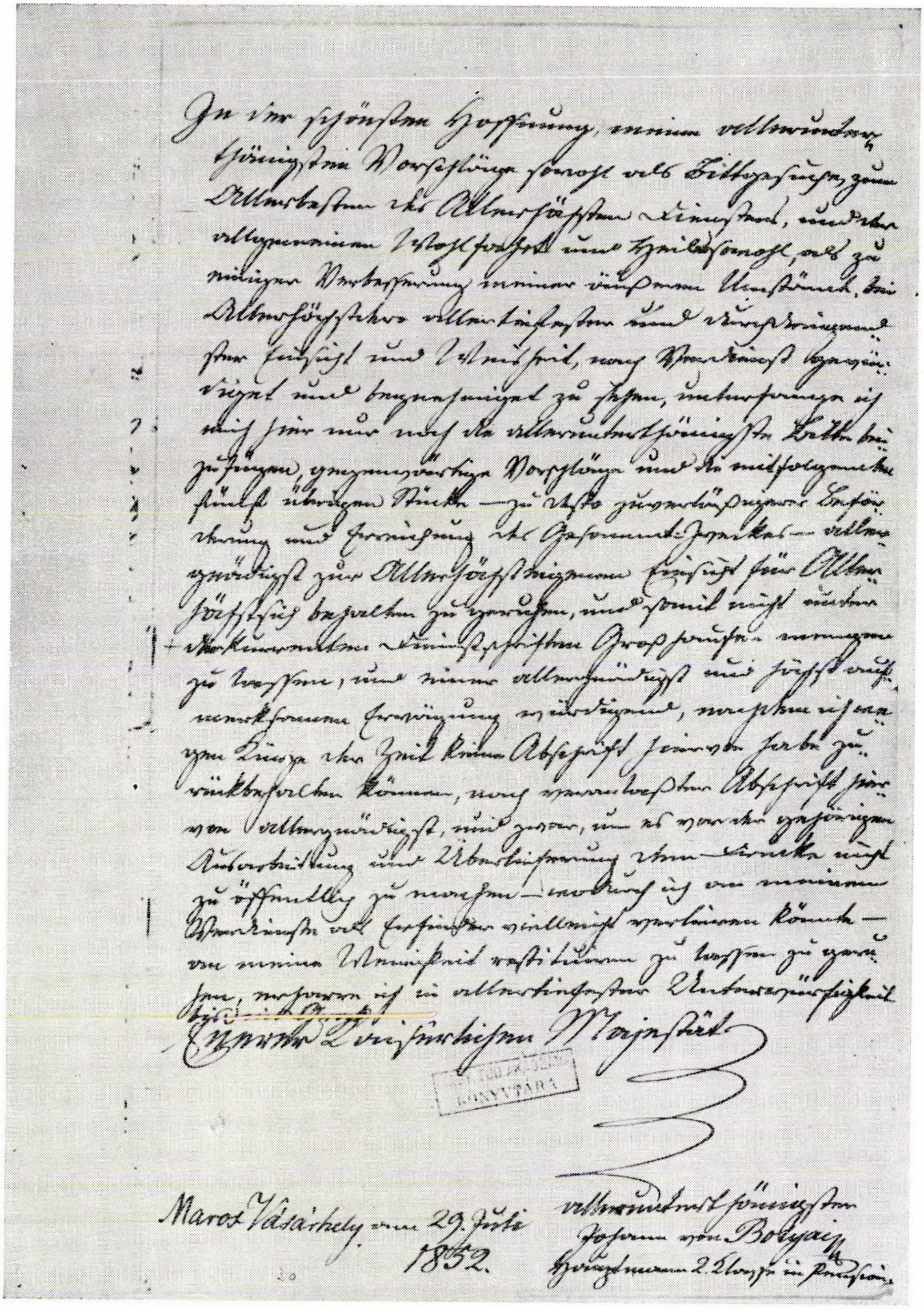
31. képmelléklet
Bolyai János előterjesztése a császárhoz 1852-ben. A kézirat második oldala



32a képmelléklet
Bolyai János előterjesztése a császárhoz 1852-ben
Részlet a kézirat 8. oldaláról



32b képmelléklet
Részlet a kézirat 9. oldaláról



33. képmelléklet

BOLYAI JÁNOS előterjesztése a császárhoz 1852-ben. A kézirat befejező oldala

VÉLETLEN ELHELYEZÉSI PROBLÉMÁKRÓL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

Bevezetés

Véletlen elhelyezési problémák számos gyakorlati és elméleti területen felmerülnek. A kérdéskör gyakorlati jelentősége megtalálható például szemcsés anyagok szállítási és raktározási problémáinál, földművelésnél stb. A véletlen elhelyezési problémák az utóbbi időben az elméleti fizikában is jelentős módon a kutatás tárgyát képezték. (Folyadékok strukturális felépítésének vizsgálata, részecskék ütközése által okozott energiaveszteség vizsgálata stb.)

A véletlen elhelyezési problémák matematikai tárgyalása általában igen nehéz, konkrét eredmények mindmáig csak néhány speciális esetben ismeretesek. Ilyen speciális eset található pl. RÉNYI ALFRÉD [1] alatti dolgozatában. RÉNYI A. a J. BERNAL és W. SCHMETTERER felvetette problémakörből a SCHMETTERER-féle feladat egydimenziós analogonját oldotta meg, mely a következőképpen szól:

A $(0, x)$ intervallumra véletlenszerűen[1] ráhelyezünk egységnyi hosszúságú szakaszokat úgy, hogy azoknak ne legyen egymással közös pontjuk. Az elhelyezést addig folytatjuk, míg a szabad helyek közül a legnagyobb hossza sem haladja meg az egységet.

Meghatározandó az ily módon elhelyezhető szakaszok összhosszának (számának) várható értéke. Ezt a mennyiséget $M(x)$-szel jelölve, a szerző azt az eredményt kapta, hogy

$$M(x) = Cx-(1-C)+o(1/x^n),$$

ahol

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right)dt = 0{,}748\ldots$$

n pedig tetszőleges nagy szám.

Ennek a feladatnak síkbeli analogonját vizsgálta PALÁSTI ILONA [2] alatti munkájában. BÁNKÖVI GYÖRGY és DOBÓ ANDOR a [3] alatti dolgozatukban olyan egydimenziós problémákkal foglalkoztak, melyeknél a szakaszoknak nemcsak elhelyezése, hanem hossza is a véletlentől függ. (Az általuk vizsgált modell speciális esetként tartalmazza a RÉNYI által vizsgált modellt.)

Lényegében BÁNKÖVI GY. és DOBÓ A. által vizsgált modellt tárgyalja P. E. NEY is [4] dolgozatában, azzal a különbséggel, hogy NEY a magasabb momentumokat is vizsgálja.

A tárgyalt modellt N. G. DE BRUIJN észrevétele alapján [1] és [3] a parkolási probléma modelljének tekinti.

[1] Ezen azt értjük, hogy a szakaszok baloldali végpontja a $(0, x-1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

P. E. NEY modelljének az alábbi fizikai problémát felelteti meg[2]:

Egy x energiájú részecske (itt x megfelel az intervallum hosszának) ütközést szenved, és x_1, illetve x_2 energiájú részecskére bomlik. Az elhelyezendő szakasz hosszának az ütközésnél fellépő energiaveszteség felel meg, míg a fedetlenül maradt intervallum továbbra is az elbomlott részecskék energiáját reprezentálja. Feltételezhető, hogy egy bizonyos energiánál kevesebb energiával rendelkező részecske már nem bomlik el, s így végső fokon az egydimenziós térkitöltés hosszának várható értéke az energiaveszteség várható értékének felel meg.

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy az [1]-ben vizsgált feladatot M. S. KLAMKIN (AVCO), D. J. NEWMAN (Brown University) és L. SHEPP (Princeton University) neve alatt „parkolási probléma" címen a SIAM REVIEW 1960. júliusi száma megoldandó feladatként kitűzte. A SIAM REVIEW 1962. júliusi száma közli ALAN G. KONHEIM (I. B. M.) és LEOPOLD FLATTO (Reeves Instrumentation Corp.) megoldását. Ezt követően a szerkesztőség megjegyzi, hogy mivel a problémát harmadkézből kapták, megpróbálták lenyomozni az eredetét. Ez a publikálás előtt azonban nem sikerült. Később H. ROBBINS (Stanford University) értesítette őket, hogy a problémát C. DERMAN és M. KLEIN-től kapta (Columbia University) 1957-ben, és 1958-ban A. DVORETZKYvel (Hebrew University Jerusalem) együtt bebizonyította, hogy

$$M(x) = Cx-(1-C)+o(x^{-n}).$$

Vizsgálataik eredményeit közölni akarták, de nem tették, mivel őket megelőzően — tőlük függetlenül — RÉNYI A. hasonló eredményeket már publikált [1]-ben. Megjegyezték továbbá, hogy ugyanezen eredményt bizonyította P. E. NEY bölcsészdoktori disszertációjában a Columbia Egyetemen.

T. DALENIUS (University of California, Berkeley) is küldött értesítést RÉNYI publikációjára vonatkozóan.

A szerkesztőség azt is megemlíti, hogy RÉNYI A. dolgozatának összefoglalóját névtelenül beküldték a National Bureau of Standard-től.

Az eddig felsorolt személyeken kívül az [1]-ben ismertetett problémát — egymástól függetlenül — megoldotta még АМБАРЦУМЯН, P. [5], J. S. GRIFFITHS [6] és I. J. SMALLEY [7].

Az [1]-ben tárgyalt eset problémaköréhez tartozó vizsgálatokat tartalmaz BÁNKÖVI GY. [8], D. MANNION (University of Cambridge) [9], valamint A. DVORETZKY és H. ROBBINS [10] dolgozata.

Az itt ismertetett problémákat RÉNYI A. „véletlen térkitöltési problémák" néven foglalta össze. A jelen dolgozatban többnyire „véletlen térlefedési problémákkal" fogunk foglalkozni. Ezen problémák tárgyalásai az előbbiekkel szemben esetenként azért nehezebbek, mert a vizsgált valószínűségi változó jellemzőjének (pl. a várható értéknek) létezését külön is bizonyítani kell. (Az [1]-ben tárgyalt feladatnál pl. a várható érték nyilván létezik, mivel a szakaszok összhossza korlátos.)

Az általunk tárgyalt esetekben egydimenziós kétszeresen véletlen elhelyezési kérdéseket vizsgálunk.

Az 1. §-ban az elhelyezési problémakör egy viszonylag általános matematikai megfogalmazását adjuk. Ebben a §-ban a kérdéskör áttekinthetősége végett beve-

[2] P. E. NEY dolgozatának lábjegyzetében megemlíti, hogy a vizsgált kérdéskör kutatását a Haditengerészeti Kutató Hivatal (Office of Naval Reasarch) finanszírozta.

zetünk néhány alapfogalmat is. A 2. §-ban két véletlen elhelyezési modellt, s velük kapcsolatos matematikai vizsgálatokat ismertetünk, miközben rámutatunk a kapott eredmények egy alkalmazási területére is. A 3. §-ban a véletlen elhelyezések kérdéskörének további vizsgálatával foglalkozunk. Ebben a §-ban többek között egy olyan általános modellt ismertetünk és vizsgálunk, mely speciális esetként tartalmazza a 2. §-ban bemutatott modelleket, illetve eredményeket is. A 4. §-ban az elhelyezési problémakör olyan irányú vizsgálataira mutatunk rá, amelynél a felvetett kérdések TAKÁCS LAJOS által publikált eredmények ismerete alapján könynyen megválaszolhatók.

1. §. A véletlen elhelyezési problémakör matematikai megfogalmazása

Tekintsük az alábbi szkémát:

Jelöljük η-val valamely H halmazbeli ω elem (tárgy) „kiterjedésének" mértékét (hossz, terület, térfogat stb.) azaz legyen $\eta=\eta(\omega)$.

Jól definiált eljárás szerint válasszunk ki H-ból bizonyos számú elemet (H_1 halmaz) s ezeket ugyancsak jól definiált eljárás szerint helyezzük el egy előre adott T tartományra. Az ily módon T-re elhelyezett ω elemeknek tekintsük egy jól meghatározott H_2 halmazát, ($H_2 \subseteqq H_1 \subseteqq H$) és vizsgáljuk ezen elemekhez tartozó ξ értékeknek a T tartományra vonatkoztatott valamilyen ξ_T tulajdonságát.

1. Definíció: Ha η minden ω-ra nézve ugyanazon konstans értéket veszi fel, továbbá ha H elemeinek a T tartományra való elhelyezése — adott értelemben — véletlenszerűen történik, akkor a fenti szkémát „véletlen elhelyezési szkémának", minden e kérdéskörhöz tartozó problémát pedig „véletlen elhelyezési problémának" nevezünk.

2. Definíció: Ha az 1. definícióban szereplő η valószínűségi változó, akkor a szkémát „kétszeresen véletlen elhelyezési szkémának", minden e kérdéskörhöz tartozó problémát pedig „kétszeresen véletlen elhelyezési problémának" nevezünk.

3. Definíció: Ha η valószínűségi változó, de H elemeinek a T tartományra való elhelyezése nem véletlenszerűen, hanem valamilyen szisztematikus[3] módon történik, akkor a szkémát „szisztematikusan véletlen elhelyezési szkémának", minden e kérdéskörhöz tartozó problémát pedig „szisztematikusan véletlen elhelyezési problémának" nevezünk.

Megemlítjük, hogy azzal az esettel, amikor a 3. definícióban η nem valószínűségi változó, a diszkrét geometria foglalkozik.

4. Definíció: Azt az eljárást, amely egy-egy szkéma megvalósítási módját írja le, alapmodellnek vagy csak röviden modellnek nevezzük.

5. Definíció: Egy adott modell által megvalósított elhelyezést realizált elhelyezésnek, vagy röviden realizációnak nevezünk.

Az 5. definíció értelmében valamely szisztematikusan véletlen elhelyezési szkéma gyakran úgy is tekinthető, mint a kétszeresen véletlen elhelyezési szkéma egy realizációja.

[3] Ezen pontosabban azt értjük, hogy ha már egy H-beli elemet a T tartományra elhelyeztünk, akkor előre meg tudjuk mondani azt, hogy a következő H-beli elemet a T tartományon hová helyezzük el.

A definíciók alapján pl. RÉNYI A. és PALÁSTI I. dolgozata véletlen elhelyezési problémával foglalkozik, míg BÁNKÖVI GY. és DOBÓ A., valamint P. E. NEY dolgozata kétszeresen véletlen elhelyezési problémát tárgyal. A szisztematikusan véletlen elhelyezés kérdéskörébe sorolhatók pl. a rekurrens folyamatok.

2. §. Véletlen elhelyezési modellek

Legyen az elhelyezendő szakaszok hossza $1+\eta$, ahol $\eta \geqq 0$ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F(y)$, $0 \leqq y \leqq h$. A véletlenszerűen történő elhelyezést adjuk meg az alábbi modell alapján.

1. MODELL:

1° Ha $x<0$, akkor nem helyezünk el szakaszt.
2° Ha $x \geqq 0$, helyezzük el az első $1+y_1$ hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja — melyet τ_1-el jelölünk — a $(-(1+y_1), 0]$ intervallumon egyenletes eloszlású legyen.
3° A következő $1+y_2$ hosszúságú szakaszt helyezzük el úgy, hogy az $(y_1-y_2+\tau_1, 1+y_1+\tau_1]$ intervallumba eső baloldali végpontja szintén egyenletes eloszlású legyen, és így tovább.
4° Az eljárás akkor ér véget, ha a $[0, x]$ intervallumot a közölt módon teljesen lefedtük.

Az ily módon elhelyezett szakaszok összhossza, illetve száma nyilván valószínűségi változó. Jelöljük ezeket $\xi_x(\eta)$, illetve $\zeta_x(\eta)$-szel. Várható értéküket pedig $M\{\xi_x(\eta)\}=m_1(x)$, illetve $M\{\zeta_x(\eta)\}=n_1(x)$-szel. Ez utóbbiak létezése nem teljesen evidens. Hogy $m_1(x)$, illetve $n_1(x)$ tulajdonságait vizsgálhassuk, ahhoz először bizonyítanunk kell létezésüket.

1. TÉTEL: *Az 1. modell alapján történő elhelyezésnél létezik a $\zeta_x(\eta)$ valószínűségi változó r-edik momentuma, amely az*

$$M\{(\zeta_x(\eta)-1)^r\} = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] H_{n+1}(x) \qquad (r=1,2,\dots) \tag{1}$$

rekurziós képlet alapján számolható ki. Itt

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ \int\limits_0^{\max(0,\, x-1)} dF(y) + \int\limits_{\max(0,\, x-1)}^{h} \frac{x}{1+y}\, dF(y) & \text{ha} \quad 0<x<1+h \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqq 1+h \end{cases} \tag{2}$$

a két egymásután elhelyezett szakasz jobboldali végpontjai távolságának eloszlásfüggvénye és $H_n(x)$ a $H(x)$ függvény n-edik konvolúciója.

Bizonyítás: Jelöljük δ_i-vel az i-ediknek $(i=1,2,\dots)$ elhelyezett szakasz jobboldali végpontját $(\delta_0=0)$. Könnyen belátható, hogy a $\delta_i-\delta_{i-1}$ független valószínűségi változók pozitívak és feltételes eloszlásfüggvényük az $\eta_i = y$ feltétel mellett

$$(3)\qquad P(\delta_i - \delta_{i-1} < u \mid \eta_i = y) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad u \leqq 0 \\ \dfrac{u}{1+y} & \text{ha} \quad 0 < u < 1+y \qquad (i = 1, 2, \ldots) \\ 1 & \text{ha} \quad u \geqq 1+y. \end{cases}$$

Innen a

$$(4)\qquad P(\delta_i - \delta_{i-1} < u) = \int_0^h P(\delta_i - \delta_{i-1} < u \mid \eta_i = y)\, dF(y)$$

összefüggés alapján

$$H(u) = P(\delta_i - \delta_{i-1} < u) = \begin{cases} 0 & \text{ha } u \leqq 0 \\ \displaystyle\int_0^{\max(0,\, u-1)} dF(y) + \int_{\max(0,\, u-1)}^{h} \frac{u}{1+y}\, dF(y) & \text{ha } 0 < u < 1+h \\ 1 & \text{ha } u \geqq 1+h. \end{cases}$$

Ezek szerint a $\delta_0, \delta_1, \ldots$ sorozat rekurrens folyamatot alkot, ahol $\delta_i - \delta_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eloszlásfüggvénye $H(u)$. Az 1. modell alapján a $\delta_i - \delta_{i-1}$ valószínűségi változókra fennáll a

$$(5)\qquad \delta_i - \delta_{i-1} \leqq 1 + \eta_i \leqq 1 + h$$

egyenlőtlenség, amiből a szóban levő valószínűségi változók momentumainak létezése következik.

Minthogy $\zeta_x(\eta) - 1$ adja meg a $[0, x]$ intervallumban bekövetkező regenerációs pontok számát és $H(x)$-nek akárhányadik momentuma létezik, továbbá $H(0) = 0$, így

$$M\{(\zeta_x(\eta) - 1)^r\} = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] H_{n+1}(x).$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNY: *Az* 1. *modell alapján történő elhelyezésnél létezik a* $\xi_x(\eta)$ *valószínűségi változó r-edik momentuma* $(r = 1, 2, \ldots)$ *és*

$$(6)\qquad M\{\xi_x^r(\eta)\} \leqq (1+h) M\{\zeta_x^r(\eta)\}.$$

2. TÉTEL:

$$(7)\qquad m_1(x) = \int_0^h \frac{1}{1+y} \int_{x-1-y}^{x} m_1(t)\, dt\, dF(y) + \int_0^h (1+y)\, dF(y),$$

$$(8)\qquad n_1(x) = \int_0^h \frac{1}{1+y} \int_{x-1-y}^{x} n_1(t)\, dt\, dF(y) + 1.$$

Bizonyítás: Jelölje $(\xi_x(\eta)|y:t)$ a $[0, x]$ intervallumot lefedő $1+y_i$ $(i=1, 2, \dots)$ hosszúságú szakaszok összegét azon feltétel mellett, hogy az először elhelyezett szakasz hossza $1+y_1 = 1+y$ és ennek baloldali végpontja a $\tau_1 = t$ pontban van $(-(1+y) < t \leqq 0)$. Nyilvánvaló, hogy

$$(\xi_x(\eta)|y;t) = 1+y+\xi_{x-t-1-y}(\eta),$$

így

$$M\{\xi_x(\eta)|y;t\} = 1+y+M\{\xi_{x-t-1-y}(\eta)\}$$

Minthogy t a $(-(1+y), 0]$ intervallumban egyenletes eloszlású, ezért a teljes várható érték tétel alapján

$$M\{\xi_x(\eta)|y\} = \frac{1}{1+y} \int\limits_{-(1+y)}^{0} m_1(x-t-1-y)\,dt + 1 + y.$$

Mivel továbbá

$$m_1(x) = \int\limits_0^h M\{\xi_x(\eta)|y\}\,dF(y),$$

így az 1° következtében (7) már nyilvánvaló. Ha a közölt elhelyezési eljárás esetén nem a szakaszok összhosszának, hanem a szakaszok számának várható értékét vizsgáljuk, akkor a (7) összefüggés levezetésénél alkalmazott gondolatmenettel a (8) egyenlethez jutunk. Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNY: *A* (7) *és a* (8) *összefüggésből következik, hogy*

(9) $$m_1(x) = \int\limits_0^h (1+y)\,dF(y) n_1(x).$$

Ennek alapján ha például $n_1(x)$ aszimptotikus összefüggését ismerjük, akkor $m_1(x)$ aszimptotikus összefüggését a (9) segítségével közvetlenül nyerjük.

Az 1. tétel, valamint a 2. tétel következménye alapján közvetlenül megadhatjuk $m_1(x)$, illetve $n_1(x)$ aszimptotikus összefüggéseit. Vegyük figyelembe ugyanis, hogy az 1. tétel értelmében $\zeta_x(\eta)$ momentumainak vizsgálatát egy rekurrens folyamat modelljének vizsgálatára vezettük vissza. Ez utóbbira nézve viszont ismeretesek az alábbi aszimptotikus összefüggések, (lásd: [11], [12]):

(10) $$\lim_{x\to\infty} \frac{M\{\zeta_x(\eta)\}}{x} = \frac{1}{\mu},$$

ahol

(11) $$\mu = \int\limits_0^\infty x\,dH(x).$$

Ha pedig $H(x)$ nem rácsos eloszlás [azaz nincs olyan $d>0$ szám, amelyre $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P(\delta_1 = jd) = 1$] és

(12) $$\sigma^2 = \int\limits_0^\infty (x-\mu)^2\,dH(x) < \infty,$$

akkor

$$\lim_{x\to\infty}\left[M\{\zeta_x(\eta)\}-\frac{x}{\mu}\right]=\frac{\sigma^2}{2\mu^2}+\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Megemlítjük ezenkívül, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{D^2\{\zeta_x(\eta)\}}{x}=\frac{\sigma^2}{\mu^3}. \tag{14}$$

Az $m_1(x)$-re, illetve $n_1(x)$-re vonatkozó aszimptotikus összefüggéseket az alábbiak során nem ezen ismert formulák alapján határozzuk meg, hanem a következőkben bizonyított lemma felhasználásával adjuk meg azokat. Ezzel elkerülhető a $H(x)$ függvénynek a számolásba való bevonása, ami különösen akkor előnyös, ha a $H(x)$-re vonatkozó összefüggés túlságosan bonyolult.

LEMMA: *Ha a $T(x)$ függvény eleget tesz az alábbi összefüggésnek:*

$$T(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x<0\\ \displaystyle\int_0^h\frac{1}{1+y}\int_{x-1-y}^{x}T(t)\,dt\,dF(y)+1 & \text{ha}\quad x\geqq 0\end{cases}, \tag{15}$$

ahol $F(y)$ a $[0,h]$ intervallumon monoton növekedő függvény, melyre $\int_0^h dF(y)=1$,

akkor:

1′ A $0\leqq x<\infty$ intervallumon $T(x)$ szigorúan monoton növekedő függvény, melyre

$$2' \quad \lim_{x\to\infty}\left[T(x)-\frac{2}{\int_0^h(1+y)\,dF(y)}x\right]=\frac{2}{3}\,\frac{\int_0^h(1+y)^2\,dF(y)}{\left[\int_0^h(1+y)\,dF(y)\right]^2}. \tag{16}$$

Bizonyítás: Az 1′ alatti állítás igazolása végett differenciáljuk a (15) egyenlet mindkét oldalát x-szerint. Ekkor

$$T'(x)=\int_0^h\frac{1}{1+y}[T(x)-T(x-1-y)]\,dF(y). \tag{17}$$

Innen látható, hogy a $0\leqq x\leqq 1$ intervallumon $T(x)$ szigorúan monoton növekvő függvény. Tegyük fel, hogy $x>1$ esetén $T(x)$ nem szigorúan monoton növekvő. Jelöljük ξ-vel ($\xi>1$) az első olyan x helyet, ahol $T'(\xi)=0^4$. Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$\int_0^h\frac{1}{1+y}[T(\xi)-T(\xi-1-y)]\,dF(y)=0.$$

Mivel $F(y)$ monoton növekvő, ezért létezik olyan y_0 $(0 \leqq y_0 \leqq h)$, amelyre

$$T(\xi) - T(\xi - 1 - y_0) = 0$$

(A $T(x) > 0$ folytán $\xi - 1 - y_0 < 0$ nem állhat fenn.) Minthogy $0 \leqq \xi - 1 - y_0 < \xi$ és $T(\xi) = T(\xi - 1 - y_0)$, ezért *Rolle*-tétele értelmében $\xi - 1 - y_0$ és ξ között van legalább egy olyan ϑ hely, melyre $T'(\vartheta) = 0$. Ez viszont ellentmondásra vezet, mert nem ξ az első olyan hely, ahol $T'(\xi) = 0$. Ezzel az 1′ alatti állítást igazoltuk.

Az eddig bizonyítottakból következik, hogy

$$\frac{d^n T(x)}{dx^n} > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

ami egyben azt is jelenti, hogy $T(x)$ a $0 \leqq x < \infty$ intervallumon alulról konvex.

A 2′ alatti állítás igazolására $T(x)$ *Laplace*-transzformáltját jelöljük $\varphi(s)$-sel, azaz

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T(x)\, dx. \tag{19}$$

A $T'(x)$-re kapott egyenlet mindkét oldalát e^{-sx}-szel szorozva és x szerint integrálva, az

$$\int_0^\infty e^{-sx} T'(x)\, dx = \int_0^h \frac{dF(y)}{1+y} \int_0^\infty e^{-sx} T(x)\, dx - \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^h \frac{T(x-1-y)}{1+y}\, dF(y)\, dx \tag{20}$$

egyenletet kapjuk.

Figyelembe véve, hogy a (20) jobboldalán álló integrálás sorrendje felcserélhető, és hogy

$$\int_0^h \frac{1}{1+y} \int_0^\infty e^{-sx} T(x-1-y)\, dx\, dF(y) = \varphi(s) \int_0^h \frac{e^{-s(1+y)}}{1+y}\, dF(y),$$

másrészt, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx} T'(x)\, dx = -1 + s\varphi(s), \tag{21}$$

az alábbi összefüggésre jutunk:

$$\varphi(s) = \frac{1}{s + \displaystyle\int_0^h \frac{e^{-s(1+y)}}{1+y}\, dF(y) - \int_0^h \frac{dF(y)}{1+y}}. \tag{22}$$

[4] Könnyen belátható, hogy ilyen ξ létezik, ha van olyan $x \in (1, \infty)$ melyre $T'(x) = 0$. Ugyanis legyen $\xi = \inf\{x;\ T'(x) = 0\}$. Ekkor létezik olyan $x_1, x_2, \ldots$ sorozat, melyre $T'(x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és $x_k \to \xi$. Így $T'(x)$ folytonossága miatt $T'(\xi) = \lim_{k \to \infty} T'(x_k) = 0$.

Innen

$$\lim_{s\to 0} s^2\varphi(s) = \frac{2}{\int\limits_0^h (1+y)\,dF(y)}. \tag{23}$$

A továbbiak során alkalmazzuk az alábbi *Tauber*-típusú tételt: Ha $\alpha(x)$ monoton növekvő függvény $(0 \leqq x < \infty)$, $\beta > 0$ és

$$\lim_{s\to 0} s^\beta \int\limits_0^\infty e^{-sx}\,d\alpha(x) = C, \tag{24}$$

akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x^\beta} = \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{25}$$

(Lásd: [15] 108. tétel.)

Ebből már következik, hogy ha $\alpha'(x)$ is monoton növekvő függvény $(0 \leqq x < \infty)$, $\beta \geqq 1$ és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x^\beta} = \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}, \tag{26}$$

akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha'(x)}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{C}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{27}$$

Mivel az

$$\alpha(x) = \int\limits_0^x T(u)\,du$$

és (1′ értelmében) az $\alpha'(x) = T(x)$ függvény monoton növekvő, továbbá

$$s^2 \int\limits_0^\infty e^{-sx}\,d\alpha(x) = s^2\varphi(s),$$

így az említett tételből ($\beta = 2$ esetén) azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x T(u)\,du}{x^2} = \frac{1}{\int\limits_0^h (1+y)\,dF(y)},$$

illetve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T(x)}{x} = \frac{2}{\int\limits_0^h (1+y)\,dF(y)}. \tag{28}$$

Az eddig bizonyítottakból következik, hogy

$$(29)\qquad \lim_{x\to\infty} T'(x) = \frac{2}{\int\limits_0^h (1+y)\,dF(y)}.$$

Ennek ismeretében pedig (17) alapján

$$(30)\qquad \lim_{x\to\infty} T''(x) = 0.$$

Minthogy a $0 \leqq x < \infty$ intervallumon $T(x)$ alulról konvex, ezért az $y = ax+b$ aszimptota az érintő határfekvése (lásd [16] 358. o.), azaz

$$(31)\qquad \lim_{x\to\infty} T'(x) = a,$$

$$(32)\qquad \lim_{x\to\infty} [T(x) - xT'(x)] = b.$$

A $T(x) - xT'(x) = \gamma(x)$ jelölés mellett figyelembe véve, hogy

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx} xT'(x)\,dx = -\frac{d}{ds}\left(\int\limits_0^\infty T'(x) e^{-sx}\,dx\right) = -\varphi(s) - s\varphi'(s),$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\gamma(x)\,dx = \psi(s) = 2\varphi(s) + s\varphi'(s).$$

Innen

$$(33)\qquad \lim_{s\to 0} s\psi(s) = \frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_0^h (1+y)^2\,dF(y)}{\left[\int\limits_0^h (1+y)\,dF(y)\right]^2},$$

aminek következménye, hogy

$$(34)\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x \gamma(t)\,dt}{x} = \lim_{s\to\infty} s\psi(s).$$

Mivel $\gamma(x)$ szintén monoton függvény, ezért

$$(35)\qquad \lim_{x\to\infty} \gamma(x) = b = \frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_0^h (1+y)^2\,dF(y)}{\left[\int\limits_0^h (1+y)\,dF(y)\right]^2}.$$

Q. e. d.

MEGJEGYZÉS: A (17) összefüggés alapján $T(x)$ értékét rekurzív módon szakaszonként explicite közvetlenül is meghatározhatjuk. Így pl.

$$T(x) = e^{-\int_0^h \frac{dF(y)}{1+y}}, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x < 1.$$

3. TÉTEL

$$\lim_{x\to\infty}\left\{M\{\zeta_x(\eta)\} - \frac{2x}{\int_0^h (1+y)\,dF(y)}\right\} = \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^h (1+y)^2\,dF(y)}{\left[\int_0^h (1+y)\,dF(y)\right]^2}, \tag{36}$$

$$\lim_{x\to\infty} P\left\{\frac{\zeta_x(\eta) - \left(\frac{x}{\mu}+1\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 x}{\mu^3}}} < t\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du, \tag{37}$$

ahol

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^h (1+y)\,dF(y), \tag{38}$$

és

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\int_0^h (1+y)^2\,dF(y) - \mu^2. \tag{39}$$

Bizonyítás: Mivel $n_1(x)$ eleget tesz a (15) alatti összefüggésnek, így a lemma alapján a (36) alatti állítás nyilvánvaló. Minthogy pedig $H(x)$ nem rácsos eloszlás[5] és $\sigma^2 < \infty$, ezért μ és σ^2-nak a tételben szereplő kifejezéseit a (13) alatti összefüggésnek a lemmában szereplő (16) alatti összefüggéssel való összehasonlításából kapjuk. Ezek után a tétel (37) alatti állítása már következik a [11] 259. oldalán levő, s a későbbiek során bebizonyított 3. feladat állításából.*

MEGJEGYZÉSEK:

1. Ha a $\zeta_x(\eta)$-ra alkalmazzuk a *Csebisev*-féle egyenlőtlenséget, akkor a (10) és (14) alapján kapjuk, hogy $x \to \infty$ esetén $\frac{\zeta_x(\eta)}{M\{\zeta_x(\eta)\}}$ sztochasztikusan konvergál 1-hez.

[5] Az $n_1(x)$-re vonatkozó pontosabb aszimptotika mint látható a $H(x)$-re tett kikötéstől függetlenül érvényes. Hogy $H(x)$ nem rácsos eloszlás az a σ^2 meghatározásánál van kihasználva.

* Kéziratunk nyomdába adása után vettük észre, hogy ez az eredmény TAKÁCS LAJOStól származik. (Vö. TAKÁCS LAJOS: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *MTA III. Oszt. Közleményei* **6** (1956) 3—4. 376. o.)

2. A $P(\zeta_x(\eta) \leqq n+1) = W(x, n)$ jelölés mellett

$$\int_0^\infty e^{-sx} W(x, n) dx = \frac{1-\left(1-\frac{1}{s\varphi(s)}\right)^{n+1}}{s}. \tag{40}$$

EGY GYAKORLATI ALKALMAZÁS. Tegyük fel, hogy egy bizonyos téglalap alakú földet repülőgépről művelnek (műtrágyázás gyomírtás stb.). A repülőgép a téglalap alakú föld egyik oldalával — jó közelítéssel — állandóan párhuzamosan halad, s eközben $1+\eta$ szélességű sávon végez munkát. (Ebben a sávban lehet olyan rész, amelyiket már előzőleg megműveltek, vagy olyan, amelyiket egyáltalán nem kellett volna megművelni.) Az eljárást addig folytatják, amíg az egész területet meg nem művelték. Ha x-szel jelöljük a téglalap azon oldalának hosszát, amelyre merőleges a repülőgép mozgási iránya, akkor a munka elvégzése megfelel a $[0, x]$ intervallumnak $1+\eta$ hosszúságú szakaszokkal való lefedésével. Amennyiben a repülőgép az 1. modellnek megfelelően végzi a feladatát, és x elég nagy, akkor jó közelítéssel átlagosan 2-szer annyi területet művelünk meg, mint amennyi szükséges, oly módon számolva a művelt terület nagyságát, hogy minden területrészt annyiszor veszünk figyelembe, ahányszor megműveltük. A repülőgép pedig átlagosan 2-szer annyi utat tesz meg, mint amennyi szükséges lenne. Más szóval ez azt jelenti, hogy átlagosan 2-szer annyi talajművelő anyagot (műtrágya, gyomirtó vegyszer stb.) használunk fel és a repülőgépet kétszer annyi ideig vesszük igénybe[6]. A gyakorlatban az ilyen módon történő talajművelés, mint látható, kevésbé volna gazdaságos. A továbbiakban egy olyan modellt vizsgálunk, mely a repülőgépről történő talajművelést lényegesen jobb közelítéssel írja le.

2. MODELL:

1° Ha $x<0$, akkor nem helyezünk el szakaszt.

2° Ha $x \geqq 0$, helyezzük el az első $1+y_1$ hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja — melyet τ_1-gyel jelölünk — a $(-c, 0]$ intervallumon egyenletes eloszlású legyen. Itt $0<c<1$ előre megadott állandó számérték.

3° A következő $1+y_2$ hosszúságú szakaszt helyezzük el úgy, hogy az $(1+y_1+\tau_1-c, 1+y_1+\tau_1]$ intervallumba eső baloldali végpontja szintén egyenletes eloszlású legyen; és így tovább.

4° Az eljárás akkor ér véget, ha a $[0, x]$ intervallumot a közölt módon teljesen lefedtük.

Az ily módon elhelyezett szakaszok összhossza, illetve száma nyilván valószínűségi változó. Jelöljük ezeket $\gamma_x(\eta)$-val, illetve $\delta_x(\eta)$-val. Minthogy ez esetben a szóban levő valószínűségi változók korlátosak, így momentumaik léteznek.

[6] Itt feltételezzük, hogy a gép állandó sebességgel repül.

Legyen $M\{\gamma_x(\eta)\}=m_2(x)$, $M\{\delta_x(\eta)\}=n_2(x)$. Ekkor a 2. tétel bizonyításánál alkalmazott gondolatmenet megismétlésével kapjuk, hogy:

$$(41)\qquad m_2(x) = \int_0^h \frac{1}{c} \int_{x-1-y}^{x+c-1-y} m_2(t)\,dt\,dF(y) + \int_0^h (1+y)\,dF(y)$$

$$\left(m_2(x) = \int_0^h (1+y)\,dF(y), \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1-c\right)$$

$$(42)\qquad n_2(x) = \int_0^h \frac{1}{c} \int_{x-1-y}^{x+c-1-y} n_2(t)\,dt\,dF(y)+1 \qquad (n_2(x) = 1, \text{ ha } 0 \leqq x \leqq 1-c).$$

A lemma megfelelő analogonjából pedig az alábbi aszimptotikus összefüggéseket kapjuk:

$$(43)\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{m_2(x)}{x} = \int_0^h (1+y)\,dF(y) \lim_{x\to\infty} \frac{n_2(x)}{x}$$

$$(44)\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{n_2(x)}{x} = \frac{1}{\int_0^h (1+y)\,dF(y) - \frac{c}{2}}.$$

MEGJEGYZÉS: Az előző modellnél közölt gyakorlati alkalmazást lényegében ez a modell írja le helyesen. A pilóta arra törekszik, hogy a már megművelt részből minél kevesebbet műveljen meg újra, ami 2. modellünk esetén annyit jelent, hogy a c értékét igyekszik csökkenteni. Mivel a c értéke jelentősen függhet az időjárási viszonyoktól, így esetleg előre meg tudjuk mondani, hogy érdemes-e valamely adott időpontban repülőgépről művelni a talajt. Ennél a modellnél már jelentősen csökken a felhasznált talajművelő anyag mennyisége és a repülőgép igénybevételének ideje. Ebben az esetben ugyanis mindkét mennyiség átlagosan

$$\frac{\int_0^h (1+y)\,dF(y)}{\int_0^h (1+y)\,dF(y) - \frac{c}{2}}$$

-szerese a minimálisan szükséges mennyiségnek. Mint látható, ha c kicsiny az $\int_0^h (1+y)\,dF(y)$ értékhez képest, akkor a fenti hányados közel egy.

3. §. A véletlen elhelyezések kérdéskörének további vizsgálata

Ebben a §-ban az elhelyezési problémakör további részletezésével foglalkozunk. Evégből tekintsük az 1. §-ban tárgyalt szkémát.

1. Definíció: Ha a H elemeinek a T tartományra adott modell szerint történő elhelyezése után található olyan H-beli elem, melynek van legalább egy olyan pontja, mely nem esik a T tartományra, akkor az ilyen modellt tartománylefedési modellnek nevezzük. Ellenkező esetben, vagyis ha H minden elemének minden pontja a T tartományra esik akkor a modellt tartománykitöltési modellnek nevezzük.

2. Definíció: Ha az elhelyezési modell olyan, mely szerint H elemeit adott módon adott irányban haladva helyezzük el (pl.: balról jobbra haladva), akkor az ilyen modellt iránytartó vagy iránytól függő modellnek nevezzük. Ha az elhelyezésnél az irányválasztásnak semmilyen szerepe nincsen, akkor az ilyen modellt irányt nem tartó vagy iránytól független modellnek nevezzük.

A dolgozatunkban eddig tárgyalt modellek kétszeresen véletlen, illetve véletlen irány tartó tartománylefedési modellek voltak. Az alábbiakban ennek a modellnek — az eddigiekhez viszonyítva — jóval általánosabb esetét ismertetjük, mely mint látni fogjuk speciális esetként tartalmazza az 1., illetve 2. modellt is.

Legyen az elhelyezendő szakaszok hossza $\psi(\eta)+1$, ahol $\vartheta=\psi(\eta)$, $\eta\geqq 0$ értékkészletén szigorúan monoton növekvő folytonos függvény: η valószínűség eloszlásfüggvénye $F(y)$, $(0\leqq y\leqq h)$. Tekintsük az alábbi modellt:

3. Modell:

1° Ha $x<0$, akkor nem helyezünk el szakaszt.

2° Ha $x\geqq 0$, helyezzük el az első $1+\psi(y_1)$ hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja — melyet τ_1-el jelölünk a $(-(1+\varphi(y_1)), 0]$ intervallumon egyenletes eloszlású legyen. Itt $\varphi(y)$ y-nak folytonos, egyértékű függvénye és $\psi(y)\geqq\varphi(y)$ továbbá $1+\varphi(y)>0$ és $\psi(y)-\varphi(y) = \alpha(y)$ függvény szigorúan monoton növekvő.

3° A következő $1+\psi(y_2)$ hosszúságú szakaszt helyezzük el úgy, hogy a $(\tau_1+\psi(y_1)-\varphi(y_2);\ 1+\tau_1+\psi(y_1)]$ intervallumba eső baloldali végpontja szintén egyenletes eloszlású legyen; és így tovább.

4° Az eljárás akkor ér véget, ha a $[0, x]$ intervallumot a közölt módon teljesen lefedtük.

Az ily módon elhelyezett szakaszok összhosszát, illetve számát jelöljük $\xi_x(\vartheta)$, illetve $\zeta_x(\vartheta)$-val.

4. Tétel: *Létezik a $\zeta_x(\vartheta)$, illetve $\xi_x(\vartheta)$ valószínűségi változók r-edik* $(r=1, 2, \ldots)$ *momentuma.*

Bizonyítás: Az 1. tételben alkalmazott jelölések megtartásával.

$$
(1)\qquad P(\delta_i-\delta_{i-1}<u \mid \eta_i = y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } u\leqq\psi(y)-\varphi(y) \\ \dfrac{u+\varphi(y)-\psi(y)}{1+\varphi(y)} & \text{ha } \psi(y)-\varphi(y)<u<1+\psi(y) \\ 1 & \text{ha } u\geqq 1+\psi(y). \end{cases}
$$

Innen

$$P(\delta_i-\delta_{i-1}<u)=H(u)=\begin{cases}0 & \text{ha } u\leqq\psi(0)-\varphi(0)\\ \displaystyle\int\limits_0^{\min(\alpha^{-1}(u),h)}\frac{u+\varphi(y)-\psi(y)}{1+\varphi(y)}\,dF(y) & \text{ha } \psi(0)-\varphi(0)<u<1+\psi(0)\\ \displaystyle\int\limits_0^{\min(\psi^{-1}(u-1),h)}dF(y)+\int\limits_{\min(\psi^{-1}(u-1),h)}^{\min(\alpha^{-1}(u),h)}\frac{u+\varphi(y)-\psi(y)}{1+\varphi(y)}\,dF(y) & \text{ha } 1+\psi(0)\leqq u,\end{cases} \tag{2}$$

ahol $\alpha^{-1}(u)$, illetve $\psi^{-1}(u)$ az $\alpha(y)$, illetve $\psi(y)$ inverzét jelenti.

A fentiek alapján a $\zeta_x(\vartheta)$ valószínűségi változóra vonatkozó állításunk további bizonyítása az 1. tétel bizonyításánál alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan történik. A $\zeta_x(\eta)$ r-edik momentumának létezéséből a

$$\xi_x^r(\vartheta)\leqq(1+h)^r\zeta_x^r(\vartheta)$$

egyenlőtlenség folytán a $\xi_x(\vartheta)$ valószínűségi változó r-edik momentumának létezése következik. Q. e. d.

5. TÉTEL: *Ha a $\xi_x(\vartheta)$ és $\zeta_x(\vartheta)$ valószínűségi változók várható értékét $M\{\xi_x(\vartheta)\}=$ $=\mu(x)$-szel, illetve $M\{\zeta_x(\vartheta)\}=\nu(x)$-szel jelöljük, akkor $\mu(x)$, illetve $\nu(x)$ eleget tesz az alábbi függvényegyenletnek:*

$$\mu(x)=\int\limits_0^h\frac{1}{1+\varphi(y)}\int\limits_{x-1-\psi(y)}^{x+\varphi(y)-\psi(y)}\mu(t)\,dt\,dF(y)+\int\limits_0^h(1+\psi(y))\,dF(y), \tag{3}$$

$$\nu(x)=\int\limits_0^h\frac{1}{1+\varphi(y)}\int\limits_{x-1-\psi(y)}^{x+\varphi(y)-\psi(y)}\mu(t)\,dt\,dF(y)+1. \tag{4}$$

A tétel bizonyítását a szokásos gondolatmenet megismétlésével végezhetjük el. Az (1) és (2)-ből kapjuk, hogy

$$\mu(x)=\int\limits_0^h(1+\psi(y))\,dF(y)\,\nu(x). \tag{5}$$

A $\mu(x)$, illetve $\nu(x)$ aszimptotikus vizsgálata az ismertetett *Tauber*-típusú tétel segítségével a 2. §-ban történtekhez hasonlóan elvégezhető. Ennek alapján $\nu(x)$-re az alábbi aszimptotikus összefüggést kapjuk.

6. TÉTEL:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\nu(x)}{x}=\frac{2}{2\int\limits_0^h\psi(y)\,dF(y)+1-\int\limits_0^h\varphi(y)\,dF(y)}. \tag{6}$$

Megjegyezzük, hogy az 1. modellnek a $\psi(y)=\varphi(y)=y$ speciális választás; a 2. modellnek pedig a $\psi(y)=y$ és $\varphi(y) = c-1$ választás felel meg. Az 1. modellnél $\psi(y)-\varphi(y) = \alpha(y) \equiv 0$ ugyan nem szigorúan monoton növekvő függvény, ennek ellenére a 4. tétel állítása az 1. tétel folytán helyesnek bizonyul. Ez azért van, mert a 4. tétel akkor is igaz, ha a $[0, h]$ intervallum véges sok olyan szakaszra bontható, melyek közül egyeseken $\alpha(y)$ szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő, más szakaszokon pedig értékei konstansok.

Az eddig tárgyalt modellek iránytartó tartománylefedési modellek voltak. A teljesség kedvéért most bemutatunk egy iránytartó tartománykitöltési modellt. Legyen továbbra is $1+\eta$ az elhelyezendő szakasz hossza, ahol $\eta \geqq 0$ eloszlásfüggvénye $F(y)$, $0 \leqq y \leqq h$. Az elhelyezési eljárást alábbi modellben adjuk meg:

4. Modell:

1° Ha $x<1+h$, akkor nem helyezünk el szakaszt.

2° Ha $x \geqq 1+h$, akkor helyezzük el az első $1+y_1$ hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja az origóba essék.

3° A következő $1+y_2$ hosszúságú szakaszt helyezzük el úgy, hogy az $(1+y_1, x-(1+h)]$ intervallumba eső baloldali végpontja egyenletes eloszlású legyen; és így tovább.

4° Az eljárás akkor ér véget, ha a $[0, x]$ intervallumot a közölt módon kitöltöttük $1+\eta$ hosszúságú szakaszokkal, pontosabban, ha az $x-(1+h)$ pontot is befedtük szakasszal.

Az esetben, ha $\xi_x(\eta)$-val, illetve $\bar{\zeta}_x(\eta)$-val az elhelyezett szakaszok összhosszát, illetve számát jelöljük, várható értéküket pedig $\bar{\mu}(x)$-szel, illetve $\bar{v}(x)$-szel, akkor, a már szokásossá vált gondolatmenet megismétlésével kapjuk, hogy

$$\bar{\mu}(x) = \int_0^h \frac{1}{x-(1+h)-(1+y)} \int_{1+h}^{x-(1+y)} \bar{\mu}(t)\,dt\,dF(y) + \int_0^h (1+y)\,dF(y), \tag{7}$$

illetve

$$\bar{v}(x) = \int_0^h \frac{1}{x-(1+h)-(1+y)} \int_{1+y}^{x-(1+y)} \bar{v}(t)\,dt\,dF(y)+1. \tag{8}$$

Ennél a tartománykitöltési modellnél az elhelyezett szakaszok nem fedik egymást. Természetesen könnyen adható olyan iránytartó, tartománykitöltési modell is, ahol az elhelyezett szakaszok egymást fedik. (Ilyen esetre jutunk, ha pl. az előző modellnél t értékét a $(c, 1+y]$ intervallumba válasszuk egyenletes eloszlás szerint, s itt $0<c<1$.)

Az eddigiek során iránytartó elhelyezési modelleket ismertettünk. Az iránytól független elhelyezési kérdések tárgyalása általában nehezebb feladatot jelent. A nehézség pl. a várható értékek létezésének bizonyításán kívül már ott megmutatkozik, hogy nem tudjuk könnyen ezeknek függvényegyenleteit felállítani.

Az itt előforduló nehézségek megvilágítása végett tekintsük az alábbi modellt.

5. MODELL:

1° Ha $x<0$, akkor nem helyezünk el szakaszt.

2° Ha $x \geqq 0$, helyezzük el az első $1+y_1$ hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja — melyet τ_1-gyel jelölünk — a $[-1, x-y_1]$ intervallumon egyenletes eloszlású legyen.

3° A továbbiakban a 2°-nak megfelelően elhelyezett szakaszok közül azokat, és csak azokat vesszük tekintetbe, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

α) A szóbajövő szakasz a $[0, x]$ intervallumnak legalább egy olyan pontját is fedi, amelyet az előzőleg elhelyezett szakaszok közül egy sem fedett.

β) A már elhelyezett szakaszok közül egyből sem fed egységhosszúságúnál többet.

4° Az eljárás akkor ér véget, ha a $[0, x]$ intervallumot a közölt módon teljesen lefedtük.

Az ily módon elhelyezett szakaszok összhossza, illetve száma nyilván valószínűségi változó. Jelöljük ezeket $\sigma_x(\eta)$-szel, illetve $\chi_x(\eta)$-szel, várható értéküket pedig $\varrho(x)$-szel, illetve $\omega(x)$-szel. Mint látni fogjuk, ez utóbbiakra vonatkozó függvényegyenleteket a *β)* korlátozó feltétel elhagyásával nem igen tudnánk felírni. A függvényegyenletek felállítását igen megkönnyíti az alábbiak során közölt tétel.

Jelölje $(\sigma_x(\eta)|y; t)$ a $[0, x]$ intervallumot lefedő $1+y_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ hosszúságú szakaszok összhosszát azon feltétel mellett, hogy az először elhelyezett szakasz hossza $1+y$ $(0 \leqq y \leqq h)$ és ennek baloldali végpontja a t pontban van $(-1 \leqq t \leqq x-y)$. Ennek megfelelően értelmezzük a $(\chi_x(\eta)|y; t)$ valószínűségi változót.

7. TÉTEL:

$$(\sigma_x(\eta)|y; t) = \sigma_t(\eta)+\sigma_{x-t-1-y}(\eta)+1+y. \tag{9}$$

$$(\chi_x(\eta)|y; t) = \chi_t(\eta)+\chi_{x-t-1-y}(\eta)+1. \tag{10}$$

Bizonyítás: A tétel két állítását egyszerre igazoljuk. Az elsőként elhelyezett $1+y$ hosszúságú szakasz a tételben szereplő egyenlőségek jobboldalán egyszer szerepel (harmadik tag). A baloldalon szintén egyszer szerepel. Tegyük fel, hogy az első n $(n \geqq 1)$ — a modellnek megfelelően elhelyezett — szakaszok közül mindegyiket és csak ezeket figyelembe vettük a jobboldal egy és csak egy tagjában. Mivel az elhelyezést a közölt modell szerint végeztük, így természetesen a baloldalon is számításba vettük mindegyiket.

A soron következő $n+1$-edik szakasz az elsőként elhelyezett szakaszból egységnél többet vagy nem többet fed. Az előbbi esetben a szakaszt a baloldalon a 3° *β)* feltétel folytán, a jobboldalon pedig 2° folytán nem vesszük figyelembe. Az utóbbi esetben a szakasz vagy a $[-1, t+1]$, vagy a $[t+y, x+1]$ intervallumon helyezkedik el. Ha a szakasz a $[-1, t+1]$ intervallumban helyezkedik el, akkor a $[-1, x+1]$ intervallumon elhelyezett szakaszok közül akkor és csak akkor fed valamelyikből egységnél többet, ha a $[-1, t+1]$ intervallumon elhelyezett szakaszok közül is valamelyikből egységnél többet fed. Hasonlóképpen a $[0, x]$ intervallumon akkor és csak akkor fed eddig le nem fedett pontot, ha a $[0, t]$ intervallumon is lefed eddig fedetlen pontot; ugyanis a $[t, t+1]$ intervallum már le van fedve. Ennél az esetnél a szakasz a $[t+1+y, x]$ intervallum egyetlen pontját sem fedheti, mert az diszjunkt a $[-1, t+1]$ intervallummal. Tehát ekkor, ha a szakaszt figyelembe vesszük a baloldalon, akkor a jobboldal első tagjánál is figyelembe vesszük — és csak ott. Ha pedig nem vesszük figyelembe a baloldalon, akkor a jobboldal egyik tagjánál sem vesszük figyelembe. Ugyanez a gondolatmenet akkor is, ha az elhelyezendő szakasz a $[t+y, x+1]$ intervallumba esik. Végeredményben tehát az $n+1$-edik szakaszt vagy mindkét oldalon egyszer vesszük figyelembe, vagy egyszer sem. Ezáltal állításunkat teljes indukcióval bizonyítottuk.

A bizonyított tétel alapján $\varrho(x)$, illetve $\omega(x)$-re az alábbi függvényegyenleteket kapjuk:

$$\varrho(x) = \int_0^h \frac{2}{1+x-y} \int_0^{x-y} \varrho(t)\,dt\,dF(y) + \int_0^h (1+y)\,dF(y), \tag{11}$$

$$\omega(x) = \int_0^h \frac{2}{1+x-y} \int_0^{x-y} \omega(t)\,dt\,dF(y) + 1. \tag{12}$$

Természetesen $\varrho(x)$, illetve $\omega(x)$ létezését külön is bizonyítanunk kell.

Anélkül, hogy az egyes modellek vizsgálatainak összehasonlításánál teljességre törekednénk megemlítjük, hogy az esetben, amikor pl. $\eta \equiv 0$[7] az 5. modell alapján történő elhelyezésnél $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\omega(x)}{x}$ értékére ugyanazon értéket kapjuk, mint az 1. modell alapján történő elhelyezésnél $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n_1(x)}{x}$ értékére, azaz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\omega(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n_1(x)}{x} = 2. \tag{13}$$

(Pontosabban; $\lim\limits_{x\to\infty} [n_1(x) - 2x] = \frac{2}{3}$; $\omega(x) = 2x+1$ minden x-re.)

Ez egyben azt jelenti, hogy iránytól függő véletlen elhelyezési szkémákat bizonyos tulajdonságok vizsgálata szempontjából helyettesíthetünk iránytól független véletlen elhelyezési szkémákkal és fordítva. Ennek a ténynek különösen akkor van jelentősége, amikor a véletlen elhelyezési problémát *Monte Carlo*-módszer alkalmazásával az előírt utasításoknak megfelelően, véletlen számtáblázat felhasználásával realizáljuk.

[7] Ekkor η eloszlásfüggvénye elfajult eloszlásfüggvény, azaz

$$P(\eta < y) = F(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leqq 0 \\ 1 & \text{ha } y > 0. \end{cases}$$

4. §. Elhelyezési problémák más irányú vizsgálatairól

Az eddig ismertetett elhelyezési problémáknál az elhelyezett szakaszok számának, illetve összhosszának várható értékét igyekeztük meghatározni. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy a véletlen elhelyezési problémakör csak ilyen jellegű kérdések vizsgálatából áll. (Ez az 1. §-ban tárgyalt szkéma alapján nyilvánvaló.) Ebben a §-ban a véletlen elhelyezési problémakör egy — a dolgozatunkban eddig nem említett — olyan irányú vizsgálatáról teszünk említést, mely a rekurrens folyamatok elméletében megtalálható eredmények ismeretében könnyen megválaszolható.

Legyen az $\eta>0$ és $\zeta>0$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(y)$, illetve $G(z)$. A $[0, x]$ intervallumon véletlenszerűen helyezzünk el y_i hosszúságú szakaszokat, ahol y_i $(i=1, 2, \ldots)$ az η valószínűségi változó értékeire vonatkozó sorozatos független megfigyelések eredményei. A szakaszok elhelyezését az alábbi modell szerint végezzük.

6. MODELL:

1° Helyezzük el az első y_1 hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja az origóba essék.

2° Az ezt követő y_2 szakaszt helyezzük el úgy, hogy annak baloldali végpontja egybe essék azon y_1 jobboldali végpontjából felmért z_1 szakasz jobboldali végpontjával, melynek eloszlásfüggvénye $G(z)$; és így tovább. (E feltétel szerint a z_i $(i=1, 2, \ldots)$ hosszúságú szakaszokon fedetlenül marad a szóban levő intervallum. A továbbiakban e fedetlenül maradt helyeket hézagoknak nevezzük.)

3° Az elhelyezést addig folytatjuk, amíg a fedés céljából elhelyezendő szakasz baloldali végpontja x-nél nem lesz nagyobb. (Ekkor már nem helyezünk el szakaszt.)

4° A $[0, x]$ intervallum ily módon való lefedését ismételjük meg n-szer.

Kérdés, *mekkora lesz valamely tetszés szerinti t pontot fedő szakaszok számának várható értéke.* (A modell alapján nyilvánvaló, hogy ez az érték nem függ x-től.)

Az esetben, ha $F(y) = 1-e^{-\lambda y}$, akkor a felvetett kérdésre könnyen válasz adható TAKÁCS LAJOS [12], illetve [13] alatti dolgozatai eredményei alapján. (Ezekben a dolgozatokban található eredmények tulajdonképpen megadják a hézagok összegének eloszlását, és várható értékét is.)

Így például $t\to\infty$ esetén a [13]-ban található — s a PALEY—WIENER-tétel felhasználásával bizonyított — egyik aszimptotikus összefüggés ismeretében egyszerű meggondolással a kérdéses várható értékre az

$$\frac{n}{1+\lambda\int\limits_0^\infty z\,dG(z)} \tag{1}$$

érték adódik.

Abban az esetben, ha $G(z)$ is exponenciális eloszlású μ paraméterrel, a felvetett kérdésre — TAKÁCS L. eredményeinek felhasználása nélkül is — minden t-re fennálló (pontos) összefüggést adhatunk. Nevezetesen ekkor, valamely tetszés szerinti

t-pontot fedő szakaszok számának várható értéke:

(2)
$$n\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}\right).$$

Legyen ugyanis $v(t)$ annak a valószínűsége, hogy valamely t pont — a $[0, x]$ intervallumnak egyszeri lefedése után — fedésbe kerül. Ekkor

$$v(t+\Delta t) = v(t)(1-\lambda\Delta t)+(1-v(t))\mu\Delta t+o(\Delta t) =$$
$$= v(t)-(\mu+\lambda)v(t)\Delta t+\mu\Delta t+o(\Delta t).$$

Innen

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = -(\mu+\lambda)v(t)+\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Elvégezve a $\Delta t\to 0$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$v'(t) = -(\mu+\lambda)v(t)+\mu.$$

Ebből a $v(0)=1$ kezdeti feltétel mellett a

(3)
$$v(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

összefüggéshez jutunk. A $v(t)$ valószínűség ismeretében a keresett várható érték a szóbajövő binomiális eloszlás várható értéke lesz.

Megemlítjük, hogy e paragrafusban felvetett kérdés a 6. modellben tett általános feltételek mellett is egzaktul megválaszolható TAKÁCS LAJOS-nak a tartózkodási idő problémák területén elért eredményei alapján. (lásd. pl. 14.).

E szerint a kérdéses várható érték:

(4)
$$n\int_0^t[1-F(t-y)]\,dW(y),$$

ahol

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t),$$

s itt

$$H_n(x) \quad \text{a} \quad H(x) = F(x)*G(x) = \int_0^x F(x-y)\,dG(y)$$

eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját jelenti. Az esetben, ha $\int_0^\infty ydF(y)+\int_0^\infty zdG(z)<\infty$, és $H(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény, akkor

(5)
$$n\lim_{t\to\infty}\int_0^t[1-F(t-y)]\,dW(y)= n\frac{\int_0^\infty y\,dF(y)}{\int_0^\infty y\,dF(y)+\int_0^\infty z\,dG(z)}.$$

IRODALOM

[1] RÉNYI A.: Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról, *MTA. Mat. Kut. Int. Közleményei,* 3 (1958) 109—127.
[2] PALÁSTI, I.: On some random space filling problems, *MTA. Mat. Kut. Int. Közleményei,* 5 (1960) 353—360.
[3] BÁNKÖVI GY.—DOBÓ A.: Egydimenziós véletlen térkitöltés változó hosszúságú szakaszokkal, *MTA. III. Oszt. Közleményei,* **11** (1960) 399—415.
[4] NEY, P. E.: A random interval filling problem, *Annals of Math. Stat.,* 33 (1962) 702—718.
[5] Амбарцумян, Р.: К задаче о заполнении прямой последовательно бросамыми отрезками, *Proc. VII th All-Union Conf. Math. Statist. and Probab., Tbilisi* (1963).
[6] GRIFFITHS, I. S.: Packing of equal 0-spheres, *Nature,* 196 (1962) 764.
[7] SMALLEY, I. J.: Packing of equal 0-spheres, *Nature,* 194 (1962) 1271.
[8] BÁNKÖVI, GY.: On gaps generated by a random space-filling procedure, *MTA. Mat. Kut. Int. Közleményei,* 7 (1962) 395—407.
[9] MANNION, D.: Random space-filling one dimension, *MTA. Mat. Kut. Int. Közleményei,* 9 (1964) 143—153.
[10] DVORETZKY, A.—ROBBINS, H.: On the „parking" problem, *MTA. Mat. Kut. Int. Közleményei,* 9 (1964) 209—225.
[11] MEDGYESSY, P.—TAKÁCS, L.: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.
[12] TAKÁCS L.: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál, *MTA. Alk. Mat. Int. Közleményei,* II (1954) 135—151.
[13] TAKÁCS, L.: Occurence and coincidence in case of happenings with arbitrary distribution law of duration, *Acta Math. Hung.* 2 (1951) 275—298.
[14] TAKÁCS, L.: Tartózkodási idő problémákról, *MTA. III. O. Közleményei* 7 (1957) 371—395. o.
[15] HARDY, G. H.: *Divergent series,* Oxford University Press, Oxford, 1949.
[16] SZÁSZ, P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei,* I. Budapest, 1951.

(Beérkezett: 1965. IV. 20.)

ORTOGONALITÁS ÉS FÜGGETLENSÉG

Írta: RÉVÉSZ PÁL

Bevezetés

A valószínűségszámítás egyik legalapvetőbb fogalma a függetlenség. Szinte azt lehetne mondani, hogy a valószínűségszámítás és a mértékelmélet között az adja meg az alapvető különbséget, hogy a valószínűségszámításban előforduló függvényekre (valószínűségi változókra) igen gyakran teljesül a függetlenségi feltétel, míg a mértékelméletben (vagy az analízis más ágaiban) csak kivételesen fordulnak elő független függvények. Mindenesetre a valószínűségszámítás legszebb, legteljesebb tételei a független valószínűségi változókkal kapcsolatosak. Ez a tény a valószínűségszámítás elméleti és gyakorlati alkalmazásaiban egyaránt sok nehézséget okoz. Így igen jelentősek azok a vizsgálatok, amelyek arra vonatkoznak, hogy az egyes valószínűségszámítási tételekben a függetlenségi feltétel mennyiben gyengíthető, illetve milyen speciális függési feltétellel pótolható.

A valószínűségszámítás analízisbeli és gyakorlati alkalmazásai szempontjából is egyik legkényelmesebb feltétel, amellyel időnként a függetlenség pótolható, az L^2 térbeli ortogonalitás. Természetesen az ortogonalitási feltétel sokkal gyengébb, mint a függetlenségi feltétel, így általában az ortogonalitás nem pótolja a függetlenséget. A következő kérdések vetődnek fel ezzel kapcsolatban:

1. Milyen mértékben pótolható a függetlenségi feltétel az ortogonalitási feltétellel?
2. Milyen mértékben pótolható a függetlenség olyan feltétellel, amely az ortogonalitás és a függetlenség „között" van?
3. Található-e tetszőleges ortogonális sorozatnak olyan részsorozata, amely „közel független"?
4. Bizonyos speciális ortogonális sorok vizsgálata a függetlenség szempontjából.

Ezek a kérdések a valószínűségszámítás és az ortogonális sorok elmélete szempontjából egyaránt érdekesek, ezért úgy érzem, hogy hasznos összefoglalni az ismert eredményeket és a felvetődő problémákat.

Jelen dolgozat 0. §-ában összefoglaljuk a valószínűségszámítás azon legfontosabb tételeit, amelyek véleményünk szerint leginkább jellemzőek a független valószínűségi változókra, pontosabban felsoroljuk azon tételeket, amelyek teljesülése esetén valószínűségi változók egy sorozatára azt lehet mondani, hogy tagjai „közel függetlenek". (Természetesen a tételeknek egy ilyen kiválogatása nagymértékben önkényes.) Az 1—4. §-ban rendre az 1—4. kérdésekre igyekszünk választ adni.

0. §. Független valószínűségi változók legfontosabb tulajdonságai

Legyen $\{X, \mathfrak{S}, \mu\}$ egy valószínűségi mező, azaz X egy absztrakt tér, $\mathfrak{S}$ X részhalmazainak egy σ-algebrája és μ egy $\mathfrak{S}$-n definiált valószínűségi mérték $(\mu(X)=1)$. Az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ X-n definiált mérhető függvényeket (valószínűségi változókat) függetlennek nevezzük, ha

$$\mu\{x: f_1(x)<\alpha_1, f_2(x)<\alpha_2, \ldots, f_n(x)<\alpha_n\} =$$
$$= \mu\{x: f_1(x)<\alpha_1\}\mu\{x: f_2(x)<\alpha_2\}\ldots\mu\{x: f_n(x)<\alpha_n\} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

minden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ valós szám n-esre. Az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ valószínűségi változókat függetleneknek nevezzük, ha bármely n-re $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függetlenek.

Független valószínűségi változók végtelen sorozatára egyik legegyszerűbb példa a *Rademacher* függvények. (A *Rademacher* függvények a $[0, 1]$ intervallumon (μ a közönséges *Lebesgue* mérték) a következő módon vannak definiálva: az n-ik *Rademacher* függvény $r_n(x)=1$, ha az x szám diadikus kifejtésének n-edik jegye 0, $r_n(x)=-1$ különben).

Egyik legalapvetőbb független valószínűségi változókra vonatkozó tétel a KOLMOGOROVtól származó

0—1 TÖRVÉNY: *Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ független valószínűségi változók sorozata. Ekkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots)$ minden elemének mértéke 0 vagy 1, ahol $B(f_1(x), f_2(x), \ldots)$ jelenti azt a legszűkebb σ-algebrát, amelyre vonatkozóan az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ függvények mérhetőek.*

A tétel jelentőségét jól mutatja három következménye.

1. KOROLLÁRIUM: *Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots$ független valószínűségi változók, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor vagy majdnem mindenütt konvergál, vagy majdnem mindenütt divergál.*

2. KOROLLÁRIUM: *Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots$ független valószínűségi változók, akkor az*

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{n} \tag{1}$$

sorozat vagy majdnem mindenütt egy azonosan konstans függvényhez konvergál, vagy majdnem mindenütt divergál.

3. KOROLLÁRIUM: *Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots$ független valószínűségi változók, amelyek csak a 0 és 1 értékeket vehetik fel, akkor azon pontok halmazának mértéke, amelyekben végtelen sok $f_i(x)$ veszi fel az 1 értéket, vagyis a $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x: f_i(x)=1\}$ halmaz mértéke csak 0 vagy 1 lehet.*

Ezeknek a korolláriumoknak a belátásához csak azt kell meggondolni, hogy a szóban forgó halmazok (amelyek mértékéről állítjuk, hogy 0 vagy 1) elemei a $\prod_{n=1}^{\infty} B(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots)$ halmaznak.

Az említett korolláriumokkal kapcsolatban érdekes kérdés, hogy valamely konkrét esetben miképp dönthető el, hogy a két lehetséges eset melyike teljesül. Erre vonatkozik a következő két tétel.

HÁROMSOR TÉTEL: *Ha* $f_1(x), f_2(x), \dots$ *független valószínűségi változók, akkor a* $\sum_{=1}^{\infty} f_i(x)$ *sor akkor és csak akkor konvergál majdnem mindenütt, ha a következő három sor mindegyike konvergál*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\bar{A}_n} f_n(x)\, d\mu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int_{\bar{A}_n} f_n^2(x)\, d\mu - \Big(\int_{\bar{A}_n} f_n(x)\, d\mu \Big)^2 \Big],$$

ahol $A_n = \{x : |f_n(x)| \geqq c\}$ *és* c *pozitív állandó. Ebből speciálisan következik, hogy ha* $\int f_n(x)\, d\mu = 0$, $\int f_n^2(x)\, d\mu = 1$, *akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ *sor majdnem mindenütt való konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele a* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ *sor konvergenciája.*

BOREL—CANTELLI LEMMA: *Ha* $f_1(x), f_2(x), \dots$ *független csak* 0 *és* 1 *értékeket felvevő valószínűségi változók, akkor a* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x : f_i(x) = 1\}$ *halmaz mértéke akkor és csak akkor* 1, *ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x : f_n(x) = 1\} = \infty.$$

A 2. Korolláriummal kapcsolatban megjegyezzük, hogy nem ismeretes jól használható szükséges és elégséges feltétel arra vonatkozóan, hogy az (1) sorozat konvergáljon. Egy elégséges feltételt ad a

NAGY SZÁMOK ERŐS TÖRVÉNYE: *Ha* $f_1(x), f_2(x, \dots$ *független négyzetesen integrálható valószínűségi változók, amelyekre*

$$\int f_i(x)\, d\mu = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int f_i^2(x)\, d\mu}{i^2} < \infty,$$

akkor

$$\frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{n} \to 0$$

majdnem mindenütt.

Ez a tétel egyszerű következménye a Háromsor tételnek és a Kronecker lemmának. Jegyezzük meg, hogy a lehető legjobb eredményt adja a következő értelemben: ha σ_i^2 nem negatív valós számoknak egy sorozata, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < \infty,$$

akkor létezik független valószínűségi változóknak olyan $f_1(x), f_2(x)$, sorozata, amelyre

$$\int f_i(x)\, d\mu = 0, \quad \int f_i^2(x)\, d\mu = \sigma_i^2 \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

és az (1) sorozat majdnem mindenütt divergens.

Megemlítjük, hogy az (1) sorozat majdnem mindenütt való konvergenciájának szükséges és elégséges feltételére vonatkozóan legjobb eredményeket CHUNG [1] és PROHOROV [2], [3] érték el.

Azzal a kérdéssel, hogy az (1) sorozat milyen sebességgel konvergál 0-hoz, foglalkoznak az iterált logaritmus tételek. Pontosabban azt a kérdést vizsgálják, hogy mi az a „legnagyobb" $h(n)$ függvény, amelyre még

$$h(n) \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{n} \to 0$$

majdnem mindenütt.

Itt az ilyen típusú ismert eredmények közül csak az egyik legegyszerűbbet említjük meg:

ITERÁLT LOGARITMUS TÉTEL: *Legyen $f_1(x), f_2(x), \dots$ független valószínűségi változók egyenletesen korlátos sorozata, amelyre*

$$\int f_i(x)\, d\mu = 0, \quad \int f_i^2(x)\, d\mu = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Ekkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1$$

majdnem mindenütt.

A tétel számos általánosításával foglalkozó cikk közül megemlítjük a [4], [5], [6] dolgozatokat.

Független valószínűségi változók alapvető tulajdonságai közül utolsóként a centrális határeloszlástételek csoportját említjük meg. Ezek közül is csak az egyik legegyszerűbbre szorítkozunk.

CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁSTÉTEL. *Legyen $f_1(x), f_2(x), \dots$ független valószínűségi változók egyenletesen korlátos sorozata, amelyre*

$$\int f_i(x)\, d\mu = 0, \quad \int f_i^2(x)\, d\mu = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Ekkor minden valós t-re.

$$\mu\left\{x : \frac{f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)}{\sqrt{n}} < t\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \Phi(t).$$

Független valószínűségi változókra vonatkozó határeloszlástételek elméletét igen részletesen tárgyalja a [7] könyv.

1. §. Ortogonális sorokra vonatkozó tételek

Tetszőleges ortogonális sorokra a 0. §-ban említett tételek általában nem vihetők át. Az alapvető nehézséget mutatja például a következő tény.

Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumban a $\sin x, \sin 2x, \dots$ ortogonális sorozatot. Jól ismeretes, hogy ennek

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

részletösszegeire teljesül az

$$|S_n(x)| \leq \left|\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}\right| \qquad (n=1, 2, \dots) \tag{2}$$

egyenlőtlenség. Már ez a tény nyilván lehetetlenné teszi, hogy a trigonometrikus sorozatra akár a centrális határeloszlás tétel, akár az iterált logaritmus tétel teljesüljön.

A (2) típusú korlátosság ortonormált rendszerekre nem egy kivételes, hanem egy elég általános jelenség, nevezetesen érvényes például *Walsh* függvényekre és ortogonális polinomokra is. Ez a tény felveti a következő problémát.

1. PROBLÉMA: Legyen $f_1(x), f_2(x), \dots$ az (a, b) intervallumon definiált egyenletesen korlátos teljes ortonormált rendszer. (Azaz legyen

$$\int f_i f_j \, d\mu = 0 \quad (i \neq j), \qquad \int f_i^2 \, d\mu = 1 \quad (i=1, 2, \dots)$$

és abból, hogy valamely négyzetesen integrálható g-re

$$\int f_i(x) g(x) \, d\mu = 0 \qquad (i=1, 2, \dots)$$

következzék, hogy $g=0$ majdnem mindenütt.) Található-e olyan az (a, b) intervallumon definiált $B(x)$ mérhető függvény és az $f_1(x), f_2(x), \dots$ sorozatnak olyan $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$ átrendezése, amelyre

$$|f_{n_1}(x)+f_{n_2}(x)+\dots+f_{n_k}(x)| \leq B(x) \qquad (k=1, 2, \dots). \tag{3}$$

Láttuk, hogy független függvényekre majdnem mindenütt teljesül, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f_1(x)+\dots+f_n(x)}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1,$$

míg ortogonális sorokra gyakran egy (3) típusú egyenlőtlenség érvényes. Ez a jelenség még egy kérdést sugallhat. Igaz-e, hogy az $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ típusú összeg független esetben a „legnagyobb? Pontosabban igaz-e, hogy ha $f_1, f_2 \ldots$ egy egyenletesen korlátos ortonormált rendszer, akkor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{\sqrt{2n\log\log n}} \leqq 1. \tag{4}$$

Erre a sejtésre könnyű ellenpéldát konstruálni ([8]). Igen könnyen látható ugyanis, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{r_1(x)r_2(x)+r_1(x)r_3(x)+r_2(x)r_3(x)+\ldots+r_{n-1}(x)r_n(x)}{2n\log\log n} = 1 \tag{5}$$

(ahol $r_n(x)$ az n-edik *Rademacher* függvény), ami nyilván cáfolja a (4) sejtést,[1] de felvet egy másik kérdést is.

2. PROBLÉMA: Jelentse $w_n(x)$ az n-edik *Walsh* függvényt (azaz

$$w_n(x) = r_1^{\varepsilon_1}(x)r_2^{\varepsilon_2}(x)\ldots r_t^{\varepsilon_t}(x) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

ahol $r_i(x)$ az i-edik *Rademacher* függvény, ε_i a 0 és 1 értékeket veheti fel és $n=\sum_{i=0}^{t}\varepsilon_i 2^i$).
Mi az a „legkisebb" $h(k)$ függvény, amelyre fennáll, hogy

$$\frac{w_{n_1}(x)+w_{n_2}(x)+\ldots+w_{n_k}(x)}{\sqrt{k}\,h(k)} \to 0 \qquad (k\to\infty)$$

a természetes számoknak bármely $n_1<n_2<\ldots$ részsorozatára. Igen könnyen látható, hogy bármely pozitív j-re és ε-ra,

$$(\log\log n)^j \leqq h(n) \leqq (\log n)^{3/2+\varepsilon},$$

de ennél pontosabb eredmény nem ismeretes. (Az egyenlőtlenség jobboldala az 1. 3. tételből, míg baloldala (5) megfelelő általánosításából következik).

Eddigi megjegyzéseink azt kívánták megmutatni, hogy ortonormált valószínűségi változók sorozatai általában nem rendelkeznek a független valószínűségi változók jó tulajdonságaival.

Mégis megemlíthetünk három olyan tételt, amelyek bizonyos mértékig pótolják a veszteségeket. Nevezetesen a három sor tétel, az iterált logaritmus tétel, a *Borel-Cantelli* lemma és a nagy számok erős törvényének gyengébb megfelelőit.

[1] Érdemes megemlíteni, hogy PÁL LÁSZLÓ ([25]) foglalkozott ilyen rendszerek vizsgálatával. Bebizonyította pl., hogy ha $\{c_{ik}\}$ egy valós számsorozat, amelyre $\sum_{i,k} c_{ik}^2$ konvergál, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} r_k \sum_{i=1}^{k} r_i c_{ik}$ sor majdnem mindenütt konvergál. Később RÉNYI ALFRÉD (szóbeli közlés) ugyanezt a tényt tisztán valószínűségszámítási módszerekkel, nevezetesen a martingálok elméletének felhasználásával bizonyította be. Azt a körülményt, hogy a martingálok elmélete jól felhasználható a *Walsh* függvényekkel kapcsolatos kutatásokban, már többen észrevették (lásd pl. [26].

1. 1. TÉTEL: *Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots$ ortonormált rendszer és $c_1, c_2, \ldots$ valós számsorozat, amelyre*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \log^2 k < \infty, \tag{6}$$

akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$ sor majdnem mindenütt konvergens.

1. 2. TÉTEL: *Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots$ ortonormált rendszer, akkor majdnem mindenütt*

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{\sqrt{n}\,(\log n)^{3/2+\varepsilon}} \to 0,$$

ahol ε tetszőleges pozitív szám.

1. 3. TÉTEL: *Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots$ egy ortogonális rendszer, amelyre $\int f_i^2(x)d\mu = \sigma_i^2$, $\int f_i\,(x)d\mu = 0$ és $\sum_{=1}^{\infty} \sigma_i^2 \log^2 i < \infty$, akkor majdnem mindenütt*

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{n} \to 0.$$

1. 4. TÉTEL ([9]): *Ha az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ függvények csak a 0 és 1 értékeket vehetik fel és a $g_i = f_i - \int f_i$ függvények páronként ortogonálisak, akkor a*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x : f_i(x) = 1\}$$

halmaz mértéke 0 vagy 1 aszerint, hogy a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu\{x : f_i(x) = 1\}$$

sor konvergens vagy divergens.

Megemlítjük, hogy az 1. 2. és 1. 3 tételek az 1. 1 tétel egyszerű következményei.

Belátható, hogy az 1. 1, 1. 2, és 1. 3 tételek általában nem javíthatók, de az erre vonatkozó állításokat nem kívánjuk itt pontosan megfogalmazni. (Lásd pl. [10], vagy [11] 88. old.)

Az ortogonális sorok elméletének egyik alapproblémája, hogy egyes speciális ortonormált rendszereknél az (5) feltétel milyen gyengébb feltétellel pótolható, illetve milyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ ortonormált rendszerekre igaz, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ feltétel biztosítja a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$ sor majdnem mindenütt való konvergenciáját. Ezen utóbbi tulajdonsággal rendelkező rendszereket nevezik *konvergencia rendszer*eknek. Különösen érdekesek azok a konvergencia rendszerek, amelyek minden sorrendben konvergencia rendszert alkotnak. Az említett három tételből következik, hogy független valószínűségi változók sorozata egy olyan konvergencia rendszer, amely minden sorrendben konvergencia rendszer.

2. §. Erősen multiplikatív és momentum ekvivalens rendszerek

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy lehet-e találni olyan fogalmat, amely erősségben a függetlenség és az ortogonalitás között áll, teljesülését ellenőrizni pedig nem sokkal nehezebb, mint az ortogonalitás teljesülését és biztosítja azoknak a legfontosabb tulajdonságoknak a teljesülését, amit a függetlenség biztosít. Ilyen fogalmakat vezetett be ALEXITS GYÖRGY ([11]).

1. DEFINÍCIÓ: Az $f_1(x), f_2(x), \dots$ valószínűségi változók multiplikatív rendszert alkotnak, ha

$$\int f_{i_1}(x) f_{i_2}(x) \dots f_{i_k}(x)\, d\mu = 0 \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_k; \quad k = 1, 2, \dots).$$

2. DEFINÍCIÓ: Az $f_1(x), f_2(x), \dots$ valószínűségi változók erősen multiplikatív rendszert alkotnak, ha az $\{f_{i_1}(x) f_{i_2}(x) \dots f_{i_k}(x)\}$ függvényrendszer elemei páronként ortogonálisak, azaz, ha

$$\int f_{i_1}^{r_1}(x) f_{i_2}^{r_2}(x) \dots f_{i_k}^{r_k}(x)\, d\mu = 0, \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_k; \quad k = 1, 2, \dots),$$

ahol az $r_1, r_2, \dots, r_k$ számok az 1 és 2 értékeket vehetik fel, de legalább egyikük 1.

3. DEFINÍCIÓ: Az $f_1(x), f_2(x), \dots$ erősen multiplikatív rendszer normáltan erősen multiplikatív, (NEMR), ha

$$\int f_{i_1}^2(x) f_{i_2}^2(x) \dots f_{i_k}^2(x)\, d\mu = 1 \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_k; \quad k = 1, 2, \dots),$$

más szóval az $f_1, f_2, \dots$ ortonormált rendszer normáltan erősen multiplikatív, ha

$$\int f_{i_1}^{r_1} f_{i_2}^{r_2} \dots f_{i_k}^{r_k}\, d\mu = \int f_{i_1}^{r_1}\, d\mu \int f_{i_2}^{r_2}\, d\mu \dots \int f_{i_k}^{r_k}\, d\mu, \tag{7}$$

ahol az $r_1, r_2, \dots, r_k$ számok az 1 és 2 értékeket vehetik fel.

Megemlítjük, hogy ha a (7) reláció a természetes számok tetszőleges $r_1, r_2, \dots, r_k$ rendszerére teljesül és az f_k függvények egyenletesen korlátosak, akkor függetlenek is.

NEMR-t alkot például a $(0, 2\pi)$ intervallumban az $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n_k x\right\}$ sorozat, ahol $n_{k+1}/n_k \geqq 3$.

Az első eredmény, amely arra mutat, hogy ezek a feltételek bizonyos mértékig pótolni tudják a függetlenség feltételt ALEXITS GYÖRGYtől származik és a háromsor tétel megfelelőjének tekinthető.

2. 1. TÉTEL ([11]): *Ha $f_1(x), f_2(x), \dots$ egy NEMR, amelyre $|f_n(x)| \leqq K_n$ és $c_1, c_2, \dots$ valós számoknak egy sorozata, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 K_n^2 < \infty$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ sor majdnem mindenütt konvergál.*

Ennnek a tételnek az ismeretében természetes dolog felvetni azt a kérdést, hogy a független valószínűségi változókra érvényes többi tétel átvihető-e ilyen típusú rendszerekre. Ezzel kapcsolatban e dolgozat szerzője a következő eredményeket bizonyította be ([12]).

2. 2. TÉTEL: *Ha $f_1(x), f_2(x), \dots$ egy egyenletesen korlátos NEMR, akkor minden t-re*

$$\mu\left\{x : \frac{f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)}{\sqrt{n}} \leqq t\right\} \to \Phi(t) \qquad (n \to \infty).$$

2. 3. TÉTEL: *Ha $f_1(x), f_2(x), \dots$ egy egyenletesen korlátos NEMR, akkor majdnem mindenütt*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)}{\sqrt{2n\log\log n}} \leqq 6.$$

Természetesen mindhárom tétellel kapcsolatban felvethető, hogy a korlátossági feltétel mennyire szükséges. A harmadik tétellel kapcsolatban még több nyitott probléma van. Így nem ismeretes, hogy a tételben szereplő 6-os korlát javítható-e, ugyancsak nem ismeretes, hogy található-e valamely pozitív alsó korlát a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)}{\sqrt{2n\log\log n}} \leqq 6$$

függvényre.

Könnyű megmutatni, hogy a 0—1 törvény általában nem érvényes NEMR-re, vagyis ezek a rendszerek nem pótolják mindenben a független függvényeket. Erősen multiplikatív rendszerekre még az sem állítható, hogy az (1) sorozat limesze csak konstans lehet. Ezzel kapcsolatban vetődik fel a következő két kérdés:

1. PROBLÉMA: Létezik-e páronként független valószínűségi változóknak olyan $f_1, f_2, \dots$ sorozata, amelyre az (1) sorozat limesze létezik, de nem konstans?

2. PROBLÉMA: Létezik-e valós számoknak olyan $c_1, c_2, \dots$ sorozata, amelyre az $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k$ sorozat majdnem mindenütt konvergens, de határértéke nem konstans? (Itt w_k jelenti a k-adik *Walsh* függvényt.)

Megemlítjük a normáltan erősen multiplikatív rendszerek egy további lehetséges általánosítását, a momentum ekvivalens rendszereket:

4. DEFINÍCIÓ: Az $f_1(x), f_2(x), \dots$ egyenletesen korlátos valószínűségi változók egy momentum ekvivalens rendszert alkotnak, ha

$$\int f_{i_1}^{r_1}(x) f_{i_2}^{r_2}(x) \dots f_{i_k}^{r_k}(x)\, d\mu = \alpha_{jl}^{(k)}, \tag{8}$$

ahol az $r_1, r_2, \dots, r_k$ számok az 1 és 2 értékeket vehetik fel és j (l) jelenti az $r_1, r_2, \dots, r_k$ sorozatban előforduló egyesek (kettesek) számát $(j+l=k)$. Másszóval, $f_1(x), f_2(x), \dots$ momentum ekvivalens, ha az

$$\int f_{i_1}^{r_1}(x) f_{i_2}^{r_2}(x) \dots f_{i_k}^{r_k}(x)\, d\mu$$

integrál értéke csak attól függ, hogy az integrandusban hány függvény szerepel első és hány második hatványon, de nem függ attól, hogy mely függvények fordulnak elő az integrandusban.

Nyilvánvaló, hogy egy NEMR mindig momentum ekvivalens. A momentum ekvivalens rendszer fogalma az ortogonális sorok elmélete szempontjából talán nem nagyon természetes fogalom. Valószínűségszámítási szempontból azonban a korlátos ekvivalens valószínűségi változóknak egy igen természetes általánosítása. (Az ekvivalens valószínűségi változók elméletével több dolgozat foglalkozik, pl. [23], [24], [13].)

Említsünk meg egy példát olyan momentum ekvivalens rendszerre, amelyik nem NEMR.

Legyen az alaptér a [0, 2] intervallum és a μ valószínűségi mértéket definiáljuk a $\mu(A)=\frac{\lambda(A)}{2}$ képlettel, ahol λ a közönséges *Lebesgue* mérték. Az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat definíciója legyen a következő:

$$f_n(x)=\begin{cases} r_1(x) & \text{ha } 0\leqq x\leqq 1 \\ r_n(x-1) & \text{ha } 1<x\leqq 2.\end{cases}$$

Ekkor

$$\int f_{i_1}^{r_1}(x) f_{i_2}^{r_2}(x)\dots f_{i_k}^{r_k}(x)\,d\mu=\alpha_{jl}^{(k)}=\begin{cases} 1 & \text{ha } j \text{ páros} \\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\{f_n(x)\}$ nem NEMR. Megjegyezzük, hogy ezek az $f_1(x), f_2(x), \dots$ valószínűségi változók ekvivalensek. Könnyű azonban olyan momentum ekvivalens rendszert konstruálni, amely nem NEMR és nem is ekvivalens.

A momentum ekvivalens valószínűségi változók tárgyalása igen egyszerű módon visszavezethető a normáltan erősen multiplikatív rendszerek tárgyalására.

Ebben a következő egyszerű eredmény nyújt segítséget:

2. 4. TÉTEL ([14], [15]): *Ha $f_1(x), f_2(x), \dots$ négyzetesen integrálható függvények sorozata, melyre az*

$$\int f_n^2\,d\mu\leqq K \qquad (n=1,2,\dots)$$

és a

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)f_k(x)\,d\mu$$

határérték minden k-ra létezik, akkor az $f_n(x)$ sorozatnak létezik egy g gyenge limesze, azaz létezik egy olyan négyzetesen integrálható g függvény, amelyre

$$\int f_n(x)h(x)\,d\mu\to\int g(x)h(x)\,d\mu \qquad (n\to\infty)$$

minden négyzetesen integrálható h-ra.

Ebből nyilván következik, hogy egy $\{f_n\}$ momentum ekvivalens sorozatnak is létezik egy $m(x)$ gyenge limese.

Vegyük észre, hogy $j \geqq 1$ esetén

$$\alpha_{jl}^{(k)} = \int f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \dots f_{i_l}^2 f_{i_{l+1}} f_{i_{l+2}} \dots f_{i_k} \, d\mu =$$
$$= \lim_{i_k \to \infty} \int f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \dots f_{i_l}^2 f_{i_{l+1}} f_{i_{l+2}} \dots f_{i_{k-1}} f_{i_k} \, d\mu =$$
$$= \int f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \dots f_{i_l}^2 f_{i_{l+1}} f_{i_{l+2}} \dots f_{i_{k-1}} m \, d\mu =$$
$$= \lim_{i_{k-1} \to \infty} \int f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \dots f_{i_l}^2 f_{i_{l+1}} f_{i_{l+2}} \dots f_{i_{k-1}} m \, d\mu =$$
$$= \int f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \dots f_{i_l}^2 f_{i_{l+1}} f_{i_{l+2}} \dots f_{i_{k-2}} m^2 \, d\mu = \dots = \int f_{i_1}^2 f_{i_2}^2 \dots f_{i_l}^2 m^j \, d\mu.$$

Ebből könnyen adódik, hogy az $f_1 - m, f_2 - m, \dots$ sorozat egy erősen multiplikatív rendszer (általában nem normáltan). Az előbbi gondolatmenet ismétlésével belátható, hogy az

$$\int (f_n - m)^2 (f_m - m)^2 \, d\mu$$

értéke n-től és m-től független konstans. Így a 2. 4 tételből következik, hogy a $\{f_n - m\}^2$ sorozatnak van egy $\sigma^2(x)$ gyenge limesze.

Legyen

$$A = \{x : \sigma^2(x) = 0\}$$
$$\bar{A} = \{x : \sigma^2(x) > 0\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$f_n(x) = m(x), \quad \text{ha} \quad x \in A \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Belátható, hogy az $\bar{A}$ halmazon az $\left\{\frac{f_n - m}{\sigma}\right\}$ sorozat egy NEMR. Ezt a tényt azonban a szerző csak az ortogonális sorok elméletétől igen idegen eszközökkel tudja bizonyítani, nevezetesen a [16] cikkben kidolgozott technika nem egészen triviális alkalmazásával. Ezért jelen dolgozat keretében nem kívánunk ennek a ténynek a bizonyítására kitérni, hanem erre egy későbbi cikkben fogunk visszatérni.

Ebből a megjegyzésből elég könnyen be lehet bizonyítani, hogy az $\bar{A}$ halmazon az $\left\{\frac{f_n - m}{\sigma}\right\}$ rendszerre érvényesek a 2. 2. és 2. 3. tételek állításai, bár ez a rendszer nem feltétlenül korlátos. Ennek bizonyítására ugyancsak nem tudunk itt kitérni.

3. §. Ortonormált és normált sorozatok részsorozatairól

Az ortogonális sorok elméletében jól ismert az a MENSOVtól származó tétel, hogy minden ortonormált rendszer tartalmaz (részsorozatként) egy konvergencia rendszert[2] (lásd pl. [11] 156 oldal). Ez a klasszikus eredmény felveti azt a kérdést, hogy

[2] A MENSOV tétel problémaköréhez kapcsolódó eredmények közül egyik legérdekesebb új eredmény GARSIA ([27]) nevéhez fűződik. Nevezetesen GARSIA azt bizonyította be, hogy egy tetszőleges ortonormált rendszer átrendezhető úgy, hogy konvergencia rendszer legyen. Pontosabban azt bizonyította be, hogy ha egy ortonormált rendszert „véletlenszerűen" átrendezünk, akkor 1 valószínűséggel konvergencia rendszerhez jutunk.

egy teszőleges ortonormált rendszer tartalmaz-e olyan részsorozatot, amelyre érvényes a 0—1 törvény, az iterált logaritmus tétel, vagy a centrális határeloszlástétel.

Könnyű példát adni arra, hogy az első kérdésre általában negatív válasz adható. A második és harmadik kérdésre azonban a válasz pozitív. Nevezetesen érvényesek a következő tételek:

3. 1. TÉTEL ([17]): *Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ ortonormált függvények egy egyenletesen korlátos sorozata, akkor létezik egy olyan $\{f_{n_k}\}$ részsorozat és egy olyan $g(x)$ $\left(\int g=1\right)$ függvény, amelyre*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{a_1 f_{n_1}+a_2 f_{n_2}+\ldots+a_k f_{n_k}}{\sqrt{2A_k \log\log A_k}} = g(x),$$

majdnem mindenütt, ahol $A_k = (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)^{1/2}$, feltéve, hogy $\max\limits_{1\leqq k\leqq n}|a_k| = o(A_n)$.

3. 2. TÉTEL ([18]): *Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ ortonormált függvények egyenletesen korlátos sorozata, akkor létezik egy $\{f_{nk}\}$ részsorozat és egy g függvény úgy, hogy a*

$$\mu\left\{x: \frac{a_1 f_{n_1}(x)+a_2 f_{n_2}(x)+\ldots+a_k f_{n_k}(x)}{A_k}<t\right\}\to\Phi(t) \quad (k\to\infty)$$

eloszlásfüggvénysorozat konvergál egy eloszlásfüggvényhez, amelynek karakterisztikus függvénye $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}g(x)}\,dt$, ahol $A_k = (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)^{1/2}$ feltéve, hogy $\max\limits_{1\leqq k\leqq n}|a_k| = o(A_n)$.

Elképzelhető lenne, hogy ezen tételek érvényességének igazi oka az, hogy minden ortonormált rendszer tartalmaz egy NEMR-t. Erre enged következtetni az a körülmény is, hogy a jól ismert ortonormált rendszerek (sinus, Walsh ortogonális polinom rendszerek) valóban tartalmaznak NEMR-t. Ennek ellenére konstruálható olyan ortonormált rendszer, amely nem tartalmaz NEMR-t. A következő példa ilyen rendszere RÉNYI ALFRÉD-tól származik.

Legyen

$$f(x) = 1+\sum_{i<j<k} c_k r_i r_j r_k \qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

ahol $r_n(x)$ az n-edik *Rademacher* függvény és a c_k együtthatók úgy vannak megválasztva, hogy a $\sum c_k r_i r_j r_k$ sor majdnem mindenütt konvergáljon és $0\leqq f(x)\leqq 2$ legyen. Ekkor könnyen látható, hogy $\{r_n(x)\sqrt{f(x)}\}$ egy ortonormált rendszer, de az $r_n(x)\sqrt{f(x)}$ függvények közül bármely három szorzatának integrálja nem 0.

ALEXITS GYÖRGY vetette fel a következő kérdést [11]:

Létezik-e olyan teljes ortonormált rendszer, amely nem tartalmaz multiplikatív részrendszert.

Talán éppen a MENSOV-tétel ismeretében vetette fel STEINHAUS a következő kérdést:[3]

[3] *The New Scottish Book* (Wroclaw. 1946—1958) 126. Probléma.

Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ egy csak 0 és 1 értékeket felvevő függvénysorozat. Található-e ennek egy olyan $\{f_{n_k}(x)\}$ részsorozata, hogy

$$\frac{f_{n_1}+f_{n_2}+\cdots+f_{n_k}}{k}$$

majdnem mindenütt konvergál.

Jelen dolgozat szerzője a következő sokkal általánosabb tételt bizonyította be:

3. 3. TÉTEL ([19]): *Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ négyzetesen integrálható függvények sorozata, amelyre $\int f_i^2 \leqq K$ (K pozitív állandó). Ekkor létezik az egész számoknak egy $n_1 < n_2 < \ldots$ részsorozata és egy $g(x)$ négyzetesen integrálható függvény úgy, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ esetén a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(f_{n_i}-g) \tag{9}$$

sor majdnem mindenütt konvergál.

Ezen tételnek nyilvánvaló következménye a következő

3. 3.a TÉTEL: *Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ négyzetesen integrálható függvények sorozata, amelyre $\int f_i^2 \leqq K$ (K pozitív állandó). Ekkor létezik az egész számoknak egy $n_1 < n_2 < \ldots$ részsorozata és egy $g(x)$ négyzetesen integrálható függvény úgy, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{k} < \infty$ esetén*

$$\frac{c_1(f_{n_1}-g)+c_2(f_{n_2}-g)+\ldots+c_k(f_{n_k}-g)}{k} \to 0$$

majdnem mindenütt.

Ez a tétel már közvetlenül mutatja, hogy a STEINHAUS problémára pozitív válasz adható.

Természetesen felvethető a kérdés, hogy található-e a 3. 1 és 3. 2 tételnek olyan általánosítása, mint a MENSOV tételnek a 3. 3 tétel. Úgy látszik, hogy a ([19]) dolgozat módszereit követve minden nehézség nélkül nyerhetők ilyen típusú eredmények, ezek részletes kidolgozására a szerzőnek még nem volt módja.

Mind a Mensov tétellel, mind a 3. 3 tétellel kapcsolatban felvetődik az a kérdés, hogy lehet-e olyan részsorozatot találni amely nemcsak konvergens, hanem minden sorrendben konvergens. A ([19]) dolgozat bizonyítása minden nehézség nélkül kiadja ezt az általánosabb eredményt, vagyis azt, hogy a (9) sorozat minden sorrendben konvergens.

A 3.3a tétellel kapcsolatban megemlítjük a következő megoldatlan kérdést.

3. PROBLÉMA: Legyen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ mérhető függvények sorozata, amelyre

$$\int f_i(x)\,d\mu = 0 \quad \text{és} \quad \int |f_i(x)| \leqq K$$

(K pozitív konstans). Található-e olyan $\{f_{n_i}(x)\}$ részsorozat, amelyre

$$\frac{f_{n_1}+f_{n_2}+\dots+f_{n_k}}{k}$$

majdnem mindenütt konvergál.

(KOMLÓS JÁNOS diákköri dolgozatában megmutatta, hogy ha az f_n függvények függetlenek, a válasz pozitív.)

4. §. Néhány speciális ortogonális sorozatról

A 3. §. eredményei nem adnak semmi választ arra vonatkozóan, hogy menynyire kell valamely ortogonális sorozatot kiritkítani ahhoz, hogy a szóban forgó tételek érvényesek legyenek. Erre vonatkozóan csak bizonyos igen speciális ortogonális rendszerekre vonatkozó eredmények ismeretesek. Az ezzel kapcsolatos eredményeket csak egész vázlatosan kívánjuk ismertetni.

Legalaposabban a $\{\sin nx\}$ rendszer tulajdonságait vizsgálták meg. Eredményül az adódott, hogy ha $n_{k+1}/n_k \geqq q > 1$, akkor a $\{\sin n_k x\}$ sorozatra érvényes az iterált logaritmus és a centrális határeloszlástétel, sőt az $\{a_k \sin n_k x\}$ sorozatra is érvényesek ezek a tételek, ha az $\{a_k\}$ sorozat nem tart túl gyorsan végtelenhez; lényegében azt mondhatjuk, hogy az $\{a_k\}$ sorozatoknak olyan gyorsan szabad végtelenhez tartani, mintha a $\{\sin n_k x\}$ sorozat elemei függetlenek lennének. Ezen tételekkel kapcsolatban utalunk a [20], [21] dolgozatokra.

ERDŐS [22] dolgozatában azt mutatta ki, hogy a $\{\sin n_k x\}$ sorozatra érvényes a centrális határeloszlás tétel akkor is, ha az n_{k+1}/n_k sorozat elég lassan tart 1-hez.

A [8] dolgozatban hasonló kérdéseket vizsgálunk Walsh függvényekkel kapcsolatban, de ezek a vizsgálatok még igen kezdetlegesek.

IRODALOM

[1] CHUNG, K. L.: The strong law of large numbers. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium* 1951.

[2] Прохоров, Ю. В: Об усиленном законе больших чисел. Известия Акад. Наук СССР **14** (1950) 523-536.

[3] Прохоров, Ю. В: Усиленная устойчивость сумм и неограниченно делиемы распределения. *Теория Вероятностей и ее Применения.* 3 (1958) 163—165.

[4] FELLER, W.: The general form of the so-called law of the iterated logarithm. *Transaction of AM Math. Soc.* 54 (1943) 373—402.

[5] HARTMAN, P.—WINTNER, A.: On the law of the iterated logarithm. *Amer. J. Math.* **63** (1941) 169—176.

[6] STRASSEN, V.: An invariance Principle for the Law of the Iterated Logarithm. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* (1964).

[7] B. V. GNEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.* Akadémiai Kiadó, 1951.

[8] RÉVÉSZ, P.—WSCHEBOR, M.: On the statistical properties of Walsh functions. Sajtó alatt. *Mat. Kut. Int. Közl.*

[9] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_n}$. *Annales Univ. Sci. Budapestiensis de R. Eötvös. Nom. Soc. Math.* **2** (1959) 93—113.

[10] TANDORI, K.: Über die orthogonalen Funktionen 1. Acta Sci. Math. **18** (1957) 57—130.
[11] ALEXITS, G.: *Convergence problems of orthogonal series.* Akadémiai kiadó 1961.
[12] RÉVÉSZ, P.: Some remarks on strongly multiplicative systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (Sajtó alatt.)
[13] RÉVÉSZ, P.: A central limit theorem for equivalent random variables. *Publicationes Mathemacae.* (Sajtó alatt.)
[14] RÉNYI, A.: On stable sequences of events. *Sankhya* **25** (1963) 293—302.
[15] SCHMEIDLER, W.: *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum.* Teubner, Stuttgart (1954).
[16] RÉNYI, A.—RÉVÉSZ P.: A study of sequences of equivalent events as a special stable sequence. *Publicationes Mathematicae* **10** (1963) 319—325.
[17] WEISS, M.: On the law of iterated logarithm. *Transactions of AM. Math. Soc.* **92** (1959) 531—553.
[18] MORGENTHALER, C.: A central limit theorem for uniformly bounded orthonormal systems. *Transactions of Am. Math. Soc.* **79** (1955) 288—311.
[19] RÉVÉSZ, P.: On a problem of Steinhaus. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (Sajtó alatt.)
[20] WEISS, M.: The law of iterated logarithm for lacunary trigonometric series. *Transactions of Am. Math. Soc.* **91** (1959) 444—469.
[21] SALEM, R.—ZYGMUND, A.: On lacunary trigonometric series I. és II., *Proc. Math. Acad. Sci. USA* **33** (1947) 333—338 és **34** (1948) 54—62.
[22] ERDŐS, P.: On trigonometric sums with gaps, *Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962) 37—42.
[23] HEVITT, E.—SAVAGE, L. I.: Symmetric measures on Cartesian products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955) 470—501.
[24] LOEVE, M.: *Probability Theory,* Van Nostrand New York—Toronto—London (1955) p 365.
[25] PÁL, L. G.: On the convergence of partial sums of Walsh's series, I. Acta Math. (Sajtó alatt.)
[26] KRICKEBERG, K.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Stuttgart. Teubner 1963.
[27] GARSIA, A. M.: Existence of almost everywhere convergent rearrangements for Fourier series of functions. *Annals of Math.* **79** (1964) 623—629.

(Beérkezett: 1965. V. 28.)

A MEGBÍZHATÓSÁG NÖVELÉSÉNEK EGY OPTIMÁLIS ELOSZTÁSÁRÓL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

Bevezetés

Tegyük fel, hogy valamilyen berendezést bizonyos irányban fejleszteni kívánunk. A fejlesztés irányának lényeges szempontja legyen az, hogy az újonnan konstruált rendszer megbízhatósága nagyobb legyen a korábban tervezett rendszer megbízhatóságánál. Tételezzük fel, hogy a fejleszteni kívánt rendszer független soros rendszer, melynek n részrendszere van, s ezek $R_1, R_2, \ldots, R_n$ megbízhatósággal működnek[1]; ekkor a rendszer eredő megbízhatósága:

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n.$$

A fejlesztés legyen a megbízhatóság szempontjából olyan irányú, mely szerint előre megadjuk a tervezendő rendszer elérendő megbízhatóságát. Legyen $\bar{R}$ a konstruálandó rendszer előírt (megkövetelt) megbízhatósága, ahol $\bar{R} > R$. Ahhoz, hogy az R megbízhatóságú rendszer elérje az $\bar{R}$ megbízhatóságú szintet, alrendszerei közül legalább egynek működési megbízhatóságát kellő nagyságú értékre kell növelni.

Egy-egy alrendszer megbízhatóságának a növelése bizonyos munkaráfordítást igényel, amelyet különböző módon lehet az egyes alrendszerek között felosztani. A munkaráfordítás mértéke számos tényező függvénye lehet. Így például ez a mérték függhet a vizsgálatok (kísérletek) számától, a rendelkezésre álló munkaeszközök színvonalától, a kutatók számától és szellemi kapacitásától, fejlesztési költségtől és egyéb itt fel nem sorolt számos más tényezőtől.

Felmerül már most az a kérdés, hogy az R értékének az $\bar{R}$ értékre való növelése során mi a teendőnk, ha ezt minimális munkaráfordítással szeretnénk elérni. Tulajdonképpen itt egy minimális munkaráfordítást igénylő módszer kereséséről van szó.

E kérdéskörnek matematikai megfogalmazása gyakorlati szempontból a Nehézvegyipari Kutató Intézet Automatizálási Osztályán merült fel.

A megbízhatóságelmélet irodalmának tanulmányozása során vettük észre, hogy ugyanezen problémával foglalkozik DAVID K. LLOYD és MYRON LIPOW [1] alatt idézett könyvének 267—270. oldala. A szerzők szerint az általuk közölt eljárás A. ALBERTtől származik. (A. ALBERT, „A Measure of the Effort Required to Increase Reliability," *Technical Report* No. 43, November 5, 1958, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, Contract No. N 6 onr-25140 (NR 342—022).)

[1] Definíció szerint ha ξ_i az i-edik alrendszer meghibásodásának az időpontja, akkor $R_i = R_i(t) = 1 - F_i(t)$, ahol $F_i(t) = P(\xi_i < t)$. Vizsgálataink során t értékét rögzítettnek tekintjük.

[1]-ben a probléma matematikai modelljének feltételei, továbbá az ez alapján kapott eredmény (bizonyítás nélkül) közölve van, ezért lehetőség adódott A. ALBERT és az általunk kapott eredmények összehasonlítására.

Az összevetés során azt találtuk, hogy az általunk kapott eredmény megegyezik A. ALBERT eredményével annak ellenére, hogy a kiinduló feltételek között eltérések mutatkoztak.

A kérdéskör gyakorlati szempontból jelentős, ezért úgy véljük nem érdektelen vizsgálataink közzéadása.

Természetesen a problémának teljesen átfogó és egzakt megoldását minden igényt kielégítően nem lehet megadni, már csak azért sem, mert ha történetesen ismernénk is a fejlesztés során közrejátszó tényezőket, akkor sem lennénk képesek elfogadhatóan ezek hatásainak függvényét megadni. Ennek ellenére a kérdéskör viszonylag eléggé általános feltételezések mellett történő vizsgálata is már némi eredményt biztosít, s az a gyakorlat számára első közelítésként hasznos lehet.

A probléma matematikai modellje

Vizsgáljunk egy tetszés szerinti alrendszert, melynek működési valószínűsége legyen $x(0 \leqq x < 1)$. Jelölje $M(x, y)$ annak a munkaráfordításnak a mértékét, melyet akkor végzünk, amikor az alrendszer megbízhatóságának értékét x-ről y-ra növeljük ($x<y$; $0 \leqq y < 1$). A továbbiakban *az $M(x, y)$ függvényt munkaráfordítás-függvénynek vagy röviden ráfordítás-függvénynek nevezzük.*

$M(x, y)$-ra az alábbi kikötéseket tesszük:

1° $0 < M(x, y) < \infty \qquad (0 \leqq x < y < 1)$

2° $M(x, y) + M(y, z) = M(x, z),$

ha $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1$. (Ez más szóval azt jelenti, hogy amegbízhatóságnak x értékről z értékre való növelésekor szükséges munkaráfordítás megegyezik azoknak a munkaráfordításoknak az összegével, amelyekkel a megbízhatóságot először x értékről y értékre, majd y értékről z-re növeljük.) Könnyen beláthatóak az $M(x, y)$ függvény alábbi tulajdonságai; $(x < y < z)$:

1. $M(x, y) < M(x, z)$

2. $M(x, z) > M(y, z)$

3. $M(x, x) = 0$

4. $M(x, y) = M(0, y) - M(0, x)$

Bevezetve az $M(0, x) = H(x)$ jelölést a 4. alatti tulajdonság egyszerűbben így írható:

4'. $M(x, y) = H(y) - H(x)$.

Nyilvánvaló, hogy e tulajdonság meg is fordítható, azaz ha $M(x, y)$ a 4. alakban állítható elő, akkor arra teljesül az 1° és 2° feltétel.

A munkaráfordítás-függvény következő tulajdonságát — melyet egy újabb feltétel megadása mellett vizsgálunk — már bizonyítani fogjuk.

1. SEGÉDTÉTEL: *Ha*

3° $M(x, x+\varepsilon) < M(y, y+\varepsilon)$

minden $x<y$ *és tetszés szerinti* $\varepsilon>0$ *esetén, akkor a* $H(x)$ *függvény konvex.*

Bizonyítás: Minthogy

$$H(x+\varepsilon)-H(x) < H(y+\varepsilon)-H(y),$$

így tetszőleges $x_1 < x_2$ esetén, ha $x=x_1, y=\frac{x_1+x_2}{2}$, $\varepsilon=\frac{x_2-x_1}{2}$, akkor

$$H(x_1+\varepsilon)-H(x_1) < H\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\varepsilon\right)-H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

ahonnan

$$H\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{H(x_1)+H(x_2)}{2}.$$

Q. e. d.

A továbbiakban szükségünk lesz a konvex függvények egy jól ismert tulajdonságára, melyet a teljesség kedvéért — az eddig közöltek figyelembevétele mellett — bizonyítani fogunk.

2. SEGÉDTÉTEL: *Ha az* $M(x, y)$ *függvény eleget tesz az* 1° — 3° *feltételeknek, akkor az* $M(0, x)=H(x)$ *függvény a* $0 \leqq x < 1$ *intervallumban folytonos.*

Bizonyítás: Először kimutatjuk azt, hogy

(1) $$\lim_{h\to+0} M(x, x+h) = 0$$

tetszőleges $x \in [0, 1)$ esetén.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy létezik olyan $\varepsilon>0$, amelyhez tetszőleges $\delta>0$ esetén van olyan $h>0$ és $x\in[0, 1)$, melyre

$$M(x, x+h) \geqq \varepsilon$$

annak ellenére, hogy $0<h<\delta$. Tekintsük a $\delta_n=\frac{1}{n}$ sorozatot; akkor feltevésünk értelmében tetszőleges δ_n-hez található olyan $h_n<\delta_n$, melyre

$$M(x, x+h_n) \geqq \varepsilon.$$

Válasszuk n_0 értékét olyan nagynak, hogy az

$$x+\frac{1}{n_0} < 1$$

egyenlőtlenség már teljesüljön. Legyen k tetszőleges pozitív egész szám és $n=kn_0$, akkor a 2°, valamint 1. és a konvexitás következtében

$$(2)\qquad M\left(x, x+\frac{1}{n_0}\right) = M\left(x, x+\frac{1}{n}\right)+M\left(x+\frac{1}{n}, x+\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+M\left(x+\frac{k-1}{n}, x+\frac{1}{n_0}\right)>kM\left(x, x+\frac{1}{n}\right)>kM(x, x+h_n)\geqq k\varepsilon.$$

Mivel k tetszés szerinti nagy érték lehet és $\varepsilon>0$, ezért $M\left(x, x+\frac{1}{n_0}\right)<\infty$ folytán k megválasztható úgy, hogy

$$k\varepsilon>M\left(x, x+\frac{1}{n_0}\right).$$

Ez viszont ellentmond a (2) alatti egyenlőtlenségnek.

Az 1°, valamint a konvexitás következtében

$$0<M(x-h, x)<M(x, x+h),$$

gy az előbb kapott eredmény felhasználásával kapjuk, hogy

$$(3)\qquad \lim_{h\to+0} M(x-h, x) = 0$$

tetszőleges $x\in(0, 1)$ esetén.

Az (1) és (3)-ból, valamint a 4. alatti tulajdonságból állításunk már következik.

Mint ismeretes, ha az $f(u)$ függvény a [0, 1] intervallumban eleget tesz a *Lipschitz*-feltételnek, azaz létezik olyan $c>0$ szám, hogy minden u' és $u''\in[0, 1]$ esetén $|f(u')-f(u'')|<c|u'-u''|$, vagy ha $f(u)$ a [0, 1]-ban monoton, akkor az $f(u)$ függvény teljes változása

$$\text{í}(4)\qquad V_f(0, 1) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(u_k)-f(u_{k-1})|\right\}\qquad (0=u_0<u_1<\ldots<u_n=1)$$

eleget tesz az 1° és 2° feltételnek. Nevezetesen

$$(5)\qquad V_f(x, y)+V_f(y, z)=V_f(x, z)\qquad (0\leqq x<y<z\leqq 1).$$

Ennélfogva az $f(u)$ függvény teljes változása munkaráfordítás-függvénynek tekinthető.

További példa munkaráfordítás-függvényre az

$$(6)\qquad M(x, y) = \begin{cases} \ln\dfrac{f(y, a, b, \ldots u)}{f(x, a, b, \ldots u)} & \text{ha } 0\leqq x\leqq y\leqq 1 \\ & a, b, \ldots, u \text{ bizonyos paraméterek} \\ 0 & \text{ha } x>y \end{cases}$$

összefüggés alapján értelmezett függvény, ahol $f(x, a, b, \ldots, u)$ értelmezése olyan, hogy a vele való számolás nem mond ellent $M(x, y)$ tulajdonságainak. Ha pl.: $f(x, a, b, \ldots, u)=(ax+b)^u$, ahol $a, b, u>0$, akkor, mint arról könnyen meggyőződhetünk, az ez alapján számolt $M(x, y)$ függvény valóban ráfordítás-függvény.

Megemelítjük, hogy a DANIEL BERNOULLI felfogását igazoló WEBER és FECHNER-féle pszihofizikai törvény levezetésénél alkalmazott bizonyos analóg feltételezésekkel is nyerhetünk munkaráfordítás-függvényt. (Vö.: [2] 240—241. o.) Eszerint, ha egy alrendszer működési megbízhatósága x és p a valószínűsége annak, hogy Δx-szel növelni tudjuk a megbízhatóságát, akkor a munkaráfordítás mértéke arányos a Δx-szel és a p valószínűséggel, továbbá fordított arányban áll $1-x$-szel. Ebből következik, hogy ha a megbízhatóság p valószínűséggel x-ről y-ra emelkedik, akkor a munkaráfordítás mértéke:

$$M(x, y) = p\int_x^y \frac{dx}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^p. \tag{7}$$

Ha $y \to 1$, akkor $M(x, y) \to \infty$.

A probléma megoldása

Jelöljük $M_i(x_i, y_i) = H_i(y_i) - H_i(x_i)$-vel az i-edik alrendszer ráfordítás-függvényét ($i = 1, 2, \ldots n$). Feltételezve, hogy a fejleszteni kívánt rendszer független soros rendszer, ezért eredő megbízhatósága:

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.$$

Legyen $y > x$ a konstruálandó rendszer előírt megbízhatósága. A közölt előzmények után a minimális munkaráfordítást igénylő módszert a következő matematikai meggondolással nyerhetjük:

Keressük a

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i, y_i) \tag{8}$$

összefüggés minimumát az

$$y_1 y_2 \cdots y_n = y \tag{9}$$

feltétel mellett.[2]

A feladat megoldása esetenként a LAGRANGE-féle multiplikátoros eljárással is történhet. Az alábbiak során viszonylag eléggé általános feltételek mellett, a gyakorlat szempontjából első közelítésként jól felhasználható tételt bizonyítunk.

Tétel: *Ha $M_i(x_i, x_i+\varepsilon_i) = M(x_i, x_i+\varepsilon_i)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re, továbbá ha az $M(x_i, x_i+\varepsilon_i)$ függvényre teljesül az $1°-3°$ feltétel, akkor a*

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i, x_i+\varepsilon_i) \tag{10}$$

[2] Ha az $M_i(x_i, y_i)$ függvény bizonyos paraméterekkel adott függvény (paraméter pl.: a fejlesztési idő t, fejlesztési költség k stb.), akkor elképzelhető, hogy a paraméterekre tett bizonyos megszorítások mellett (pl. $t \leq T$, $k \leq K$) is kell keresnünk a szóban levő minimumot.

függvénynek a $[0, 1-\delta]$ *intervallumban — ahol* δ *esetektől függően megválasztható kis pozitív érték*[3] — *az* $\varepsilon_i \geqq 0$, *továbbá*

(11) $$\prod_{i=1}^{n} (x_i+\varepsilon_i) = y$$

feltételek mellett rögzített $x_i \leqq x_{i+1}$ *értékek esetén minimuma az*

(12) $$\varepsilon_i = \sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1}\dots x_n}} - x_i$$

$i=1, 2, \dots j$ *és* $\varepsilon_{j+1} = \dots = \varepsilon_n = 0$ *értékek mellett van, ahol a* j *index a*

(13) $$v_j < y \leqq v_{j+1}$$

egyenlőtlenség által van definiálva, s itt

(14) $$v_{i+1} = \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^i v_i$$

és

(15) $$v_1 = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n;\; v_{n+1} = 1^4.$$

Bizonyítás: A bizonyítást több lépésen keresztül végezzük. Nyilvánvaló, hogy a

(16) $$\sum_{i=1}^{n} M(x_i, x_i+\varepsilon_i)$$

függvénynek rögzített x_i értékek esetén ott van feltételes minimuma, ahol a

(17) $$\sum_{i=1}^{n} H(x_i+\varepsilon_i)$$

függvénynek feltételes minimuma van[5].

1. Állítás: Ha a (17) *alatti függvény az* $x_i+\varepsilon_i = x_i+\alpha_i$ $(i=1, 2, \dots n)$ *helyen veszi fel a feltételes minimumát és* $\alpha_{i+1}>0$, *akkor*

$$x_{i+1}+\alpha_{i+1} \leqq x_i+\alpha_i \qquad (i=1, 2, \dots n-1).$$

[3] A δ megválasztásánál szükséges feltétel a $\max(x_n, \sqrt[n]{y}) < 1-\delta$ egyenlőtlenség teljesülése.

[4] E tétel eredménye — mint jeleztük — megegyezik A. Albert-nek az 1°, 2°, 1., 2. továbbá az $x\dfrac{dH(x)}{dx}$ függvénynek a $0<x<1$ intervallumon való határozott növekedésének feltételezése mellett kapott eredményével. Mint láttuk, 1. és 2. az 1° és 2° feltétel következménye, a $H(x)$ differenciálhatóságát és $x\dfrac{dH(x)}{dx}$ monotonitásának feltételezését pedig esetünkben az ennél kézenfekvőbb 3° feltétel helyettesíti.

[5] Mivel a 2. segédtétel szerint a $H(x)$ folytonos a $[0, 1)$ intervallumon, ezért tetszőleges kicsiny pozitív δ esetén $H(x)$ a $[0, 1-\delta]$ zárt intervallumon is folytonos, így a $\sum_{i=1}^{n} H(x_i+\varepsilon_i) + \lambda\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i+\varepsilon_i) - y\right)$ függvénynek ezen intervallumon van minimuma.

Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis hogy valamely rögzített k index esetén $(1 \leqq k \leqq n-1)$ $\alpha_{k+1} > 0$, de

$$\alpha_k + x_k < \alpha_{k+1} + x_{k+1}.$$

Vezessük be a

$$\beta_k = x_{k+1} + \alpha_{k+1} - x_k - \alpha_k$$

jelölést. Az indirekt feltevés folytán $\beta_k > 0$. Legyen

$$\omega_k = \min\left(\alpha_{k+1}, \frac{\beta_k}{2}\right). \tag{18}$$

Mivel $0 < \alpha_{k+1}$ és $0 < \frac{\beta_k}{2}$, így $0 < \omega_k$, továbbá $\omega_k \leqq \alpha_{k+1}$, ezért az $x_{k+1} + \alpha_{k+1}$ értéket ω_k-val csökkenthetjük[6]. Ez esetben

$$H(x_{k+1} + \alpha_{k+1}) - H(x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k)$$

értékkel csökken a $k+1$-edik alrendszernél a munkaráfordítás értéke. Ha ugyanakkor a k-adik alrendszer megbízhatóságát δ_k-val növeljük úgy, hogy δ_k értékét az

$$(x_1 + \alpha_1) \ldots (x_k + \alpha_k + \delta_k)(x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k) \ldots (x_n + \alpha_n) = y$$

egyenletből határozzuk meg, akkor kapjuk, hogy

$$\delta_k = \frac{x_k + \alpha_k}{x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k}\, \omega_k. \tag{19}$$

Az ω_k értelmezéséből következik, hogy

$$\omega_k < \beta_k = x_{k+1} + \alpha_{k+1} - x_k - \alpha_k,$$

innen

$$x_k + \alpha_k < x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k.$$

Ez alapján pedig már nyilvánvaló, hogy

$$\delta_k < \omega_k,$$

így a $H(x)$ függvény szigorú monotonitása, valamint konvexitása miatt fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} H(x_k + \alpha_k + \delta_k) - H(x_k + \alpha_k) < H(x_k + \alpha_k + \omega_k) - H(x_k + \alpha_k) \leqq \\ \leqq H(x_{k+1} + \alpha_{k+1}) - H(x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k). \end{aligned} \tag{20}$$

Ez az egyenlőtlenség egyben azt jelenti, hogy ha az $\varepsilon_i = \alpha_i$ értékek mellett van a (17) alatti függvénynek feltételes minimuma, akkor az $x_k + \alpha_k < x_{k+1} + \alpha_{k+1}$ egyenlőtlenség nem teljesülhet, mert ha teljesülne, akkor a (20) szerint az összmunkaráfordítás csökkenthető volna.

Következmény: $\alpha_{i+1} \leqq \alpha_i$. Ugyanis $\alpha_{i+1} > 0$ esetén $\alpha_{i+1} \leqq x_i - x_{i+1} + \alpha_i \leqq \alpha_i$, ha pedig $\alpha_{i+1} = 0$, akkor a tétel feltétele folytán $\alpha_{i+1} \leqq \alpha_i$ teljesülése nyilvánvaló.

[6] Ez azt jelenti, hogy az x_{k+1} értéket $\alpha_{k+1} - \omega_k$-val növeltük.

II. Állítás: Ha a (17) *alatti függvénynek az $x_i+\varepsilon_i=x_i+\alpha_i$ helyen van a feltételes minimuma ($i=1, 2, \dots n$), akkor*

$$x_i+\alpha_i \leqq x_{i+1}+\alpha_{i+1},$$

továbbá $\alpha_{i+1}>0$ esetén

$$x_i+\alpha_i = x_{i+1}+\alpha_{i+1}.$$

Tegyük fel, hogy valamely rögzített k index esetén $(1 \leqq k \leqq n-1)$

$$x_k+\alpha_k > x_{k+1}+\alpha_{k+1}.$$

Vezessük be a

$$\gamma_k = x_k+\alpha_k-x_{k+1}-\alpha_{k+1}$$

jelölést. Az indirekt feltevés folytán $\gamma_k>0$. Az $x_k \leqq x_{k+1}$, valamint $\alpha_{k+1} \leqq \alpha_k$ $(k=1, 2, \dots n-1)$ egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\gamma_k \leqq \alpha_k,$$

ezért az $x_k+\alpha_k$ értéket $\frac{\gamma_k}{2}$-vel csökkenthetjük, ugyanakkor az $x_{k+1}+\alpha_{k+1}$ értéket

$$\mu_k = \frac{x_{k+1}+\alpha_{k+1}}{x_k+\alpha_k-\frac{\gamma_k}{2}} \frac{\gamma_k}{2} < \frac{\gamma_k}{2} \tag{21}$$

értékkel növelhetjük úgy, hogy az eredő megbízhatóság értéke változatlan marad, míg az összráfordítás értéke csökken. Ezen utóbbi állítás belátása ugyanúgy történhet, mint ahogyan azt korábban már tettük. Mivel ellentmondásra jutottunk, ezért fennáll az

$$x_k+\alpha_k \leqq x_{k+1}+\alpha_{k+1}$$

egyenlőtlenség. Ezt az eredményt összevetve az I. állítás eredményével kapjuk, hogy $\alpha_{i+1}>0$ esetén

$$x_i+\alpha_i = x_{i+1}+\alpha_{i+1}.$$

Rátérve a tétel bizonyítására, jelöljük $j+1$-gyel az $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \dots \geqq \alpha_n$ sorozat null tagjai közül a legkisebb indexűt, vagyis azt, melyre $\alpha_j>0$, de $\alpha_{j+1}=0$. (Ha $\alpha_n>0$, akkor $j=n$.) Ezen jelölés mellett az I. és II. állítások eredménye, valamint az I. állítás következménye alapján fennálló $0=\alpha_{j+1} \geqq \alpha_{j+2} \geqq \dots \geqq \alpha_n \geqq 0$ egyenlőtlenség folytán

$$(x_i+\alpha_i)^j x_{j+1} \dots x_n = y,$$

azaz

$$\alpha_i = \sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1} \cdots x_n}} - x_i \qquad (i=1, 2, \dots j).$$

Mivel $\alpha_j>0$, így

$$x_j < \sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1} \cdots x_n}}.$$

Tekintettel az $x_j+\alpha_j \leqq x_{j+1}$ egyenlőtlenségre kapjuk, hogy

$$\sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1} \cdots x_n}} \leqq x_{j+1},$$

azaz azt, hogy

$$x_j^j x_{j+1} \dots x_n < y \leqq x_{j+1}^{j+1} x_{j+2} \dots x_n .$$

A tételben szereplő v_i jelölések mellett ezen egyenlőtlenség a

$$v_j < y \leqq v_{j+1}$$

alakban írható, így a tételt teljes egészében bizonyítottuk.

Megjegyzések: I. Ha $x_n^n \leqq y$, akkor a tételt lényegesen egyszerűbb meggondolásokkal is bizonyíthatjuk. Tudniillik mivel a $H(x)$ függvény a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban konvex, így a JENSEN-féle egyenlőtlenség folytán

$$nH\left(\frac{x_1+\varepsilon_1+\dots+x_n+\varepsilon_n}{n}\right) \leqq H(x_1+\varepsilon_1)+\dots+H(x_n+\varepsilon_n). \tag{22}$$

Figyelembe véve, hogy $H(x)$ monoton növekedő függvény, ezért az egyenlőtlenség baloldalának ott van feltételes minimuma, ahol az

$$\frac{x_1+\varepsilon_1+\dots+x_n+\varepsilon_n}{n} \tag{23}$$

összefüggésnek feltételes minimuma van. A LAGRANGE-féle multiplikátoros módszer alkalmazásával, vagy akár a mértani és számtani középre vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy (23)-nak a (11) feltétel mellett szélső értéke az

$$\varepsilon_i = \sqrt[n]{y} - x_i \tag{24}$$

választás mellett van. Minthogy $\bar{\varepsilon}_i + x_i = \sqrt[n]{y} =$ konstans, ezért ez egyben azt is jelenti, hogy a (22) alatti egyenlőtlenség baloldalán álló függvénynek ugyanott van feltételes szélső értéke, ahol a jobboldalon álló függvénynek. Tudniillik ebben az esetben az egyenlőtlenség egyenlőségbe megy át, azaz a jobboldalon álló függvény értéke is $nH(\sqrt[n]{y})$. Mivel a baloldal $nH(\sqrt[n]{y})$-nál kisebb értéket nem vehet fel, így a jobboldal sem lehet ennél kisebb, ugyanis az egyenlőtlenség minden szóbajöhető értékre fennáll.

II. A (7) alatti ráfordítás-függvény eleget tesz e tétel feltételeinek, így a vele való számolás csak akkor igényel külön vizsgálatot, ha p értéke alrendszerenként változik.

III. A probléma matematikai szempontból egyszerűbbé válik, ha redundáns elemek beiktatásával kívánjuk a megbízhatóságot növelni. (Ez esetben a rendszer előállítási költségének feltételes minimumát célszerű meghatározni.)

IV. Kéziratunk lektorálása során KOVÁCS LÁSZLÓ hívta fel a figyelmünket arra, hogy a

$$-\ln(x_i+\varepsilon_i) = \vartheta_i$$

jelölés bevezetésével a vizsgált probléma általánosan úgy is megfogalmazható, hogy keresendő bizonyos f_i függvényekre vonatkozóan

$$\min\left[f_1(\vartheta_1)+f_2(\vartheta_2)+\dots+f_n(\vartheta_n)\right] \tag{25}$$

az alábbi feltétel mellett:

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n = w. \qquad (\vartheta_i \leqq -\ln x_i) \tag{26}$$

Ezen átfogalmazás segítségével pedig már megoldás nyerhető WILLIAM KARUSH — a konvex programozás körébe vágó — [3] dolgozatában közölt módszerének alkalmazásával.

Megjegyzendő azonban, hogy a KARUSH által közölt algoritmus alkalmazása feltételezi az f_i függvények ismeretét. Természetesen a (25), (26) feladat az $f_i=f$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ esetben megoldható a jelen dolgozatban közölt módszerrel is, s ekkor, mint láttuk, nem feltétlenül szükséges ismerni az f függvény konkrét alakját.

IRODALOM

[1] DAVID K. LLOYD and MYRON LIPOW: *Reliability: Management, Methods, and Mathematics*, New Jersey, 1962.

[2] JORDAN KÁROLY: Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból, Akadémiai Kiadó, Budapest 1956.

[3] W. KARUSH: A General Algorithm for the Optimal Distribution of Effort, *Management Science* 9 (1962) 1.

(Beérkezett: 1965. május 17.)

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. X. 15. — Terjedelem: 11,50 (A/5) ív, 35 ábra, 17 melléklet

Szegedi Nyomda Vállalat 65-5850

Ára: 25,– Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Index: 26 498